

Математичні моделі та методи

УДК 519.233.5:336.76

В.Ю. Дубницький, О.Е. Петренко, А.И. Ходырев

Харьковский институт банковского дела

Университета банковского дела НБУ (Киев), Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ «ФИНАНСОВЫХ ПУЗЫРЕЙ» И ИХ ЛОГОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

Исследованы свойства функции, описывающей биржевые крахи – функции «финансовых пузырей»: периодичность, наличие асимптот и нулей. Рассмотрены тригонометрические свойства логопериодической составляющей этой функции. Получены выражения для косинуса двойного угла, косинуса суммы и косинуса разности тригонометрических функций с логопериодическим аргументом. Приведено дифференциальное уравнение, решение которого приводит к логопериодической функции.

Ключевые слова: биржевые крахи, «финансовые пузыри», функции «финансовых пузырей», логопериодические функции, тригонометрия функций логопериодического аргумента, дифференциальные уравнения.

Вступление

Биржевые крахи, крахи банков и финансовых пирамид всегда находились в центре внимания потому, что затрагивали судьбы многих людей. На расследовании и исследовании их причин делали блистательную юридическую карьеру, они служили источником вдохновения для писателей и художников. Известно [1], что звезда первой величины на русском юридическом небосводе А.Ф. Кони заявил о себе, расследуя в Харькове аферы с ценными бумагами. Причины, которые приводят банки к краху, в художественной форме исследованы в романах современных авторов, например, А. Хейли «Менялы» [2] и Тома Кленси «Долг чести» [3]. Крах московского Ссудного банка в 1874 году получил в 1881 году своё отражение в картине «Крах банка» кисти известного русского художника-передвижника В.Е. Маковского.

Одной из возможных аналогий с финансовым крахом может быть процесс развития мыльного пузыря. Предположим, что некий финансовый инструмент, например, акция, вначале медленно наращивает свою прибыльность, затем начинается стадия бурного её роста и неожиданно наступает внешне неожиданное резкое падение. Математическая модель этого явления стала известна как модель «финансового пузыря».

Анализ литературы. В работе [4] были рассмотрены решения задач квазилинейных уравнений параболического типа такие, что их решения неограниченно возрастали за конечное время. Физические процессы, математические модели которых имели это свойство, получили название режимов с обострением. В 2003 г. в русском переводе вышла работа [5], стимулировавшая изучение режимов с обострением, ха-

рактерных для экономики рыночного типа. В этой работе для описания процессов развития «финансового пузыря» получено выражение вида: [5, С. 327]:

$$y(t) = A + B(t_c - t)^\beta \cdot \left\{ 1 + C \cos \left[\omega \ln \left(\frac{t_c - t}{T} \right) \right] \right\}, \quad t_c \geq t. \quad (1)$$

Для практических расчётов рекомендована [5, С. 230] формула вида:

$$y(t) = A + B(t_c - t)^\beta \cdot \left\{ 1 + C \cos \left[\omega \ln(t_c - t) + \varphi \right] \right\}, \quad t_c \geq t. \quad (2)$$

В выражениях (1) и (2) принято, что $y(t)$ – величина изучаемого показателя, в нашем случае стоимость финансового инструмента во время t , t_c – время схлопывания «финансового пузыря», то есть начало кризиса. Параметры A , B , β , φ , ω , t_c определяют по результатам наблюдений. Естественно, что с учётом целевого назначения задачи основным является определение величины t_c . В работе [5] приведены способы определения параметров модели вида (1)–(2) и описаны результаты её применения. Более подробно методика оценки качества этой модели сделана в работе [6]. Следует отметить, что в работе [6] предложен вид модели, несколько отличающийся от модели вида (1) или (2):

$$y(t) = A + \frac{B}{(t_c - t)^\beta} \cdot \left\{ 1 + C \cos \left[\omega \ln(t_c - t) + \varphi \right] \right\}, \quad (3)$$

при условии, что $\beta > 0$, $B > 0$, $t \in [0, t_c]$, $t_c < \infty$. В условии (3) во втором слагаемом множитель

$$W_1 = \frac{B}{(t_c - t)^\beta} \quad (4)$$

при конечной величине t_c стремится к бесконечности и соответствует определению режима с обострением. Во втором множителе условие

$$W_2 = \cos\left[\omega \ln(t_c - t) + \varphi\right] \quad (5)$$

предназначено для моделирования линейных логопериодических колебаний, которые накладываются на основной тренд (4). Свойства логопериодических колебаний и их свойства рассмотрены в работе [7]. Описанная в работе [5] методика прогнозирования кризисов в развитии экономических систем стала настолько необходимой и важной, что её подробное исследование, как следует из работы [8, С. 36-38], было отнесено к категории фундаментальных.

Предложенная модель показала свою пригодность при исследовании систем различной физической природы, например, в механике [9]. В цитируемой работе рассматриваемая модель представлена в виде:

$$y(t) = (t_c - t)^{-\beta} \left\{ a_0 + a_1 \cos\left[\omega \ln\left(\frac{t_c - t}{T}\right)\right] \right\}, \beta > 0. \quad (6)$$

Далее ограничения на величины t_c и β сохраняются по умолчанию.

Общим в рассматриваемых моделях есть наличие множителя z_1 , носителя особенности, создающей режим с обострением и функции вида:

$$z_2 = \cos(\omega \ln(t_c - t)), \quad (7)$$

создающей колебания, называемые логопериодическими. Общим для работ [4...9] является отсутствие исследования свойств функции вида (1) и его различных модификаций как специфического объекта математического анализа.

Постановка задачи. Исследование свойств функций вида (1)...(5) в том виде и той последовательности, которая принята в математическом анализе, например, в работе [10], и действий с тригонометрическими функциями, аргументы которых имеют вид (6).

Результаты исследования

Рассмотрим свойства логопериодической функции вида (1) как специфического математического объекта. Область определения данной функции обусловлена наличием логарифма и включает все значения, для которых справедливо условие $t > t_c$, область значений данной функции определена на всём множестве действительных чисел. Так как данная функция содержит выражение:

$$q = \cos\left(\omega \ln\left(\frac{t_c - t}{T}\right)\right), \quad (8)$$

поэтому её период равен $2\pi n$, $n \in Z$, значения данной функции повторяются при всех t , равных:

$$t = t_c - Te^{2\pi n/\omega}. \quad (9)$$

Данная функция не является чётной или нечётной, следовательно, график этой функции несимметричен относительно осей координат.

Для определения нулей функции (1) представим её в виде:

$$A + B(t_c - t)^\beta + B(t_c - t)^\beta \cos\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T}\right) = 0. \quad (10)$$

Отсюда следует, что нулям функции (1) будет соответствовать условие:

$$t = t_c - Te^{\frac{\arccos\left(\frac{B - \frac{A}{B(t_c - t)^\beta}}{B(t_c - t)^\beta}\right)}{\omega}}. \quad (11)$$

Функция (1) не имеет вертикальных и наклонных асимптот. Отсутствие вертикальной асимптоты следует из условия задания области определения функции (1), а отсутствие наклонных асимптот обусловлено тем, что предел функции вида:

$$y = A + B(t - t_c)^\beta \left[1 + \cos\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T}\right) \right] \quad (12)$$

не существует при значениях $t \rightarrow \infty$, потому, что

$$\left| \cos\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T}\right) \right| \leq 1. \quad (13)$$

Отсутствие вертикальных асимптот означает, что значение данной логопериодической функции не стремится к бесконечности ни при каких значениях t . Отсутствие наклонных асимптот означает, что при $t \rightarrow \infty$ значение функции (1) не приближается ни какому конкретному значению.

Условия возрастания и убывания логопериодической функции вида (1) определим, используя необходимое условие экстремума. Производная функции вида (1) равна:

$$y' = B\beta(t - t_c)^{\beta-1} \left[1 + \cos\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T}\right) \right] - B(t - t_c)^{\beta-1} \sin\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T}\right). \quad (14)$$

Преобразуем (14) к виду (15) и получим, что:

$$y' = B(t - t_c)^{\beta-1} \left[\begin{array}{l} \beta + \beta \cos\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T}\right) - \\ - \sin\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T}\right) \end{array} \right]. \quad (15)$$

Используя необходимое условие экстремума, определим критические точки данной функции при условии (15) в виде:

$$B(t - t_c)^{\beta-1} \left[\begin{array}{l} \beta + \beta \cos\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T}\right) - \\ - \sin\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T}\right) \end{array} \right] = 0. \quad (16)$$

Из (16) следует, что если $\beta - 1 > 0$, то при $t = t_c$ производная равна нулю, если $\beta - 1 < 0$, то при $t = t_c$ производная функции (1) не существует. Критические точки определим из условия:

$$\left[\beta + \beta \cos\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T}\right) - \sin\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T}\right) \right] = 0. \quad (17)$$

Для решения уравнения (17) приведём его к виду:

$$-\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \cos\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \sin\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T}\right) = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}. \quad (18)$$

Так как [10, С.189]:

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} = \arcsin \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad (19)$$

то представим равенство (19) в виде:

$$\sin\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T} - \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\right) = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}. \quad (20)$$

Решением уравнения (20) относительно переменной t будет равенство:

$$t = t_c + T \alpha \left(\frac{1}{\omega} \left((-1)^k \arcsin \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} + \pi k \right) \right), k \in Z. \quad (21)$$

Используя [19], приведём (21) к виду:

$$t = t_c + T \epsilon \left(\frac{1}{\omega} \left(\arcsin \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \left((-1)^k + 1 \right) + \pi k \right) \right), k \in Z. \quad (22)$$

Равенство (22) при чётных и нечётных значениях $k \in Z$ будет иметь разные значения. При $k = 2n$ получим, что:

$$t = t_c + T \epsilon \left(\frac{1}{\omega} \left(2 \arcsin \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} + \pi k \right) \right), k \in Z, \quad (23)$$

при $k = 2n + 1$ получим, что:

$$t = t_c + T \epsilon \frac{\pi k}{\omega}, k \in Z. \quad (24)$$

Полученные в условиях (23) и (24) выражения и будут критическими точками для функции вида (1). Рассмотрим решение аналогичной задачи для функции вида (5), представив её для общности в виде

$$y = A + B(t - t_c)^{-\beta} \left[1 + \cos\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T}\right) \right]. \quad (25)$$

Выполняя действия, аналогичные ранее описанным, получим, что нулям функции (25) соответствует условие:

$$t = t_c - T \epsilon \arccos \frac{(-A(t_c - t)^m - B)}{B^m} \omega. \quad (26)$$

Производная функции (25) примет вид

$$y' = -B\beta(t - t_c)^{-\beta-1} \left[1 + \cos\left(\omega \log \frac{t - t_c}{T}\right) \right] - B(t - t_c)^{-\beta-1} \sin\left(\omega \log \frac{t - t_c}{T}\right). \quad (27)$$

Условие равенства нулю выражения (27) примет вид:

$$-B(t - t_c)^{-\beta-1} \left[\beta + \beta \cos\left(\omega \log \frac{t - t_c}{T}\right) + \sin\left(\omega \log \frac{t - t_c}{T}\right) \right] = 0. \quad (28)$$

Если $\beta - 1 > 0$, то при $t = t_c$ производная равна нулю, если $\beta - 1 < 0$ то при $t = t_c$ производная не существует. Критические точки определим из условия:

$$\left[\beta + \beta \cos\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T}\right) + \sin\left(\omega \ln \frac{t_c - t}{T}\right) \right] = 0. \quad (29)$$

Выполняя действия, аналогичные описанным, получим выражение для корня уравнения (29) в виде:

$$t = t_c + T \epsilon \left(\frac{1}{\omega} \left(\arcsin \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \left((-1)^{k+1} - 1 \right) + \pi k \right) \right), k \in Z. \quad (30)$$

При чётных k получим:

$$t = t_c + T \epsilon \left(\frac{1}{\omega} \left(-2 \arcsin \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} + \pi k \right) \right), k \in Z. \quad (31)$$

При нечётных k получим:

$$t = t_c + T \epsilon \frac{\pi k}{\omega}, k \in Z. \quad (32)$$

В работе [5, С. 238] для уравнения вида (3) были определены следующие численные значения параметров: $A=571$, $B=267$, $C=0,053$, $\beta=0,45$, $\varphi=1,0$, $\omega=7,9$, $t_c=1930.22$. В этой же работе отмечено, что именно такой график соответствует биржевому краху, ознаменовавшему начало Великой депрессии. Точность данной модели можно определить, сравнив её фактическое начало – 29 октября 1929 г. и величину t_c , соответствующую дате 22 марта 1930 г. На рис. 1...3 показаны графики, вычисленные с разной степенью точности.

Из приведённых рисунков видно, что колебательная составляющая процесса проявляется с уменьшением шага расчёта.

Рассмотрим особенности выполнения основных тригонометрических операций с функциями вида:

$$Z = \cos(\omega \ln(t_c - t) + \varphi). \quad (33)$$

Для удобства дальнейшего изложения введём следующие условные обозначения:

$$[\omega \ln(t_c - t) + \varphi] = \cos(z_1(\omega, \varphi)) = z_1; \quad (34)$$

$$[\omega \ln(t_c - t) + \varphi] = \cos(z_2(\omega, \varphi)) = z_2; \quad (35)$$

$$[u \ln(t_c - t) + \varphi] = \cos(z_3(u, \varphi)) = z_3; \quad (36)$$

$$[u \ln(t_c - t) + \varphi] = \cos(z_4(u, \varphi)) = z_4; \quad (37)$$

$$z_{ij} = z_i + z_j; i \leq j, i = 1, 4; j = 1, 4; \quad (38)$$

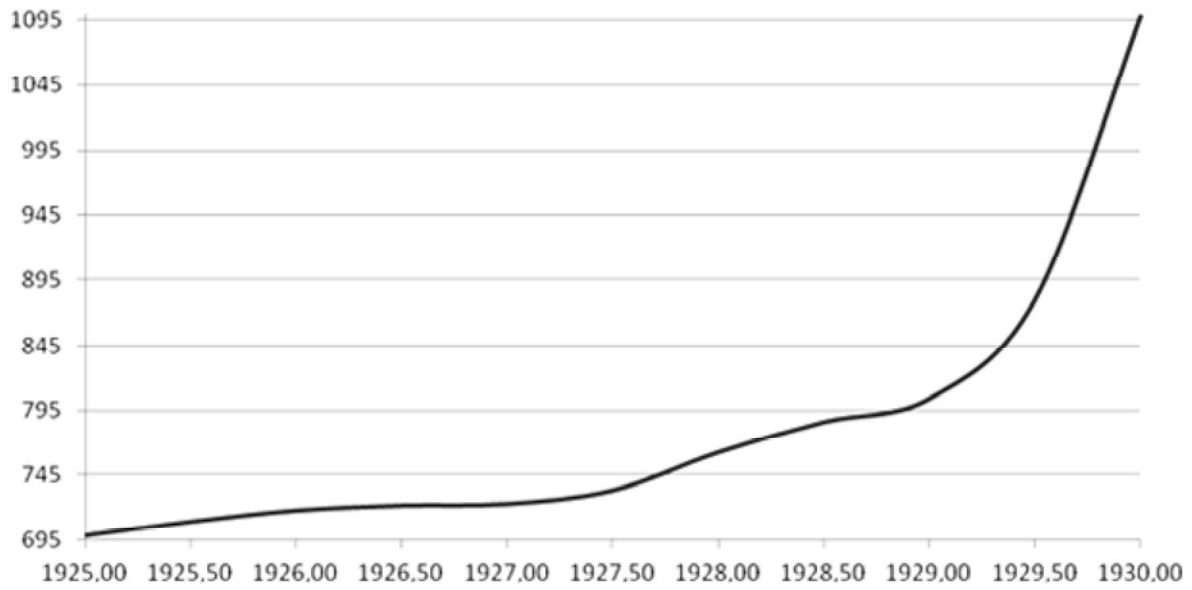


Рис. 1. Графік розвитку "мильного бульбашки". Ррахчт проведён по формуле (3) с шагом $\Delta t = 0,5$

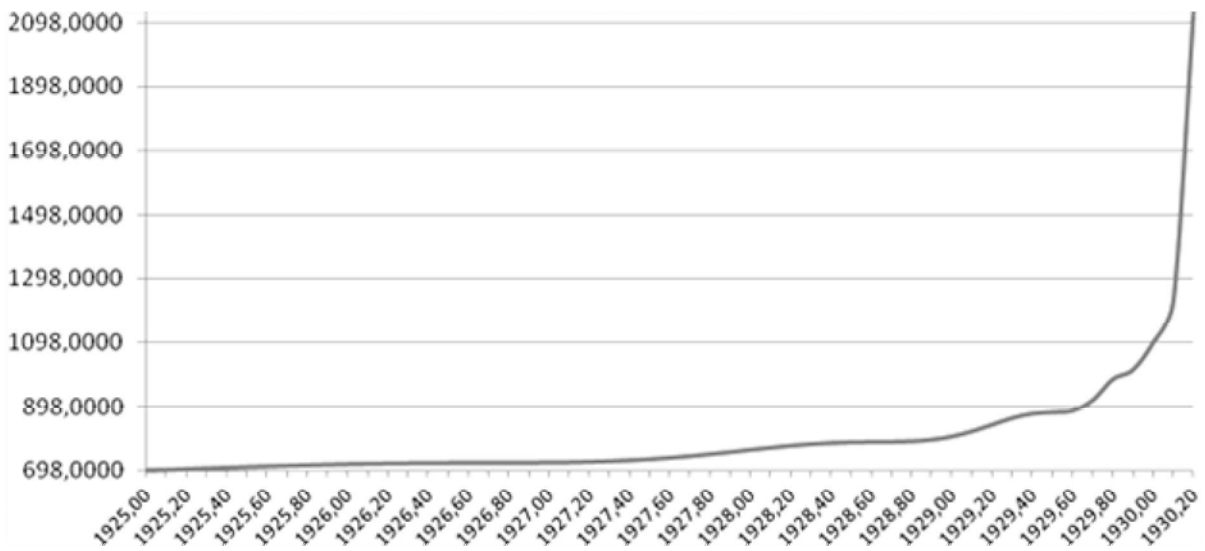


Рис. 2. Графік розвитку "мильного бульбашки". Ррахчт проведён по формуле (3) с шагом $\Delta t = 0,1$

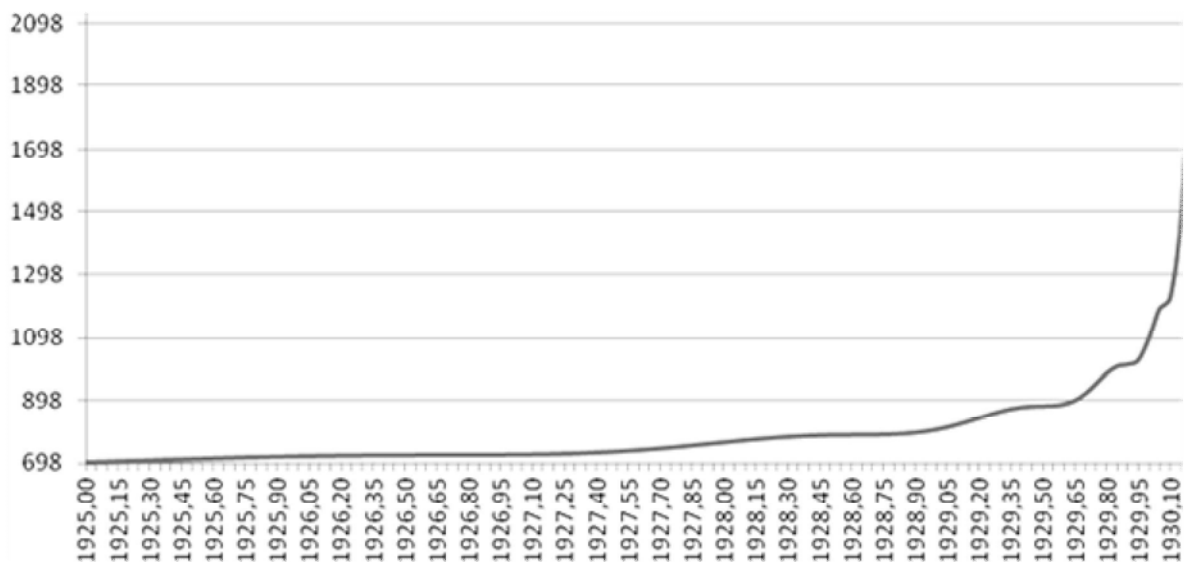


Рис. 3. Графік розвитку "мильного бульбашки". Ррахчт проведён по формуле (3) с шагом $\Delta t = 0,05$

$$\cos(z_{ij}) = \cos(z_i + z_j) \tag{39}$$

$$\cos(\Delta_{ij}) = \cos(z_i - z_j) \tag{40}$$

Тогда косинус двойного угла запишем в виде:

$$\cos(2z_{ij}) = \cos(z_{ii}) = \cos(z_i + z_i), i = 1, \dots, 4. \tag{41}$$

Из анализа хорошо известных и приведённых в справочнике [10] тригонометрических формул следует, что базовыми можно принять выражения вида (39)...(41). Используя введённые обозначения, для основных тригонометрических формул получим следующие обозначения:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cos \frac{z_{ij}}{2} \cos \frac{\Delta_{ij}}{2} \tag{42}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos \Delta_{ij} \cos z_{ij} \tag{43}$$

Принимая во внимание громоздкость необходимых при этом преобразований, была использована система аналитических преобразований Derive 6.

Результаты её применения показаны на рис. 4 – 6.

Расшифровка условных обозначений, принятая на этих рисунках, показана в табл. 1 – 3.

Таблица 1

Таблица условных обозначений для операции косинуса двойного угла

Пары аргументов	№, №	Пары аргументов, №, №			
		ω, φ	ω, φ	u, φ	u, φ
		1	2	3	4
ω, φ	1	$z_{11} \Leftrightarrow (\#2, \#3)$	–	–	–
ω, φ	2	–	$z_{22} \Leftrightarrow (\#4, \#5)$	–	–
u, φ	3	–	–	$z_{33} \Leftrightarrow (\#6, \#7)$	–
u, φ	4	–	–	–	$z_{44} \Leftrightarrow (\#8, \#9)$

Примечание. Расшифровка условных обозначений показана на рис. 4.

Таблица 2

Таблица условных обозначений для операции косинуса суммы

Пары аргументов	№, №	Пары аргументов, №, №			
		ω, φ	ω, φ	u, φ	u, φ
		1	2	3	4
ω, φ	1	–	$z_{12} \Leftrightarrow (\#2, \#3)$	$z_{13} \Leftrightarrow (\#4, \#5)$	$z_{14} \Leftrightarrow (\#6, \#7)$
ω, φ	2	–	–	$z_{23} \Leftrightarrow (\#8, \#9)$	$z_{24} \Leftrightarrow (\#10, \#11)$
u, φ	3	–	–	–	$z_{34} \Leftrightarrow (\#12, \#13)$
u, φ	4	–	–	–	–

Примечание. Расшифровка условных обозначений показана на рис. 5.

Таблица 3

Таблица условных обозначений для операции косинуса разности

Пары аргументов	№, №	Пары аргументов, №, №			
		ω, φ	ω, φ	u, φ	u, φ
		1	2	3	4
ω, φ	1	–	$\Delta_{12} \Leftrightarrow (\#2, \#3)$	$\Delta_{13} \Leftrightarrow (\#4, \#5)$	$\Delta_{14} \Leftrightarrow (\#6, \#7)$
ω, φ	2	–	–	$z_{23} \Leftrightarrow (\#8, \#9)$	$z_{24} \Leftrightarrow (\#10, \#11)$
u, φ	3	–	–	–	$z_{34} \Leftrightarrow (\#12, \#13)$
u, φ	4	–	–	–	–

Примечание. Расшифровка условных обозначений показана на рис. 6.

Используя (33) примем, что:

$$L = \cos[\omega \ln(t_c - t) + \varphi]. \quad (44)$$

Тогда первая производная по времени функции, определённой условием (44), примет вид:

$$\dot{L} = \omega \sin[\omega \ln(t_c - t) + \varphi] / (t_c - t), \quad (45)$$

вторая производная по времени этой же функции примет вид:

$$\ddot{L} = \frac{\omega \sin[\omega \ln(t_c - t) + \varphi]}{(t_c - t)^2} - \frac{\omega \cos[\omega \ln(t_c - t) + \varphi]}{(t_c - t)^2}. \quad (46)$$

Следовательно, дифференциальное уравнение, решением которого будет функция вида (44), примет вид:

$$\ddot{L} - \frac{1}{t_c - t} \dot{L} + \frac{\omega}{(t_c - t)^2} L = 0 \quad (47)$$

с начальными условиями:

$$L(0) = L_0. \quad (48)$$

Проведённый анализ кривых роста мыльных пузырей позволяет не только прогнозировать возможное время наступления краха (кризиса), но и, используя связи между макроэкономическими показателями и коэффициентами анализируемой кривой, влиять на внешние факторы, приводящие к нему.

Выводы

1. Исследованы свойства функции, описывающей биржевые крахи-функции «финансовых пузырей».

2. Рассмотрены тригонометрические свойства логопериодической составляющей этой функции. Получены выражения для косинуса двойного угла, косинуса суммы и косинуса разности тригонометрических функций с логарифмическим аргументом.

3. Получены выражения для вычисления остатальных основных тригонометрических функций с логарифмическим аргументом.

4. Получено дифференциальное уравнение, решение которого приводит логопериодической функции.

Список литературы

1. Высоцкий С.А. Кони / С.А. Высоцкий. – М.: Молодая гвардия, 1988. – 429(3) с.
2. Хейли А. Менялы / А. Хейли. – М.: Изд. АСТ, 2001. – 400 с.
3. Clancy T. Debt of Honour / Tom Clancy. – London: Harper Collins Publishers, 1995. – 531 p.
4. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / [Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.] – М.: Наука, 1987. – 480 с.
5. Сорнетте Д. Как предсказывать крахи финансовых рынков. Критические события в комплексных финансовых системах. / Д. Сорнетте. – М.: Интернет-трейдинг, 2003. – 394 с.
6. Уренцов О.В. Проверка возможности предсказания кризисов на финансовом рынке с помощью метода Д.Сорнетте / О.В. Уренцов // Труды института системного анализа РАН. – 2008. – Т.40. – С. 174-191.
7. Петров Б.М. Логопериодические вибраторные антенны / Б.М. Петров, Г.И. Костромитин, Е.В. Горемыкин. – М.: Горячая линия, 2005. – 239 с.
8. Отчет о новых научных результатах, полученных в 2011 году при выполнении Программы научных исследований Президиума РАН №31 «Экономика и социальные знания», Проект 11.1 Разработка методики прогнозирования экономической нестабильности. – М.: РАН, 2012. – 67 с.
9. Подлазов А.В. Режимы с обострением с комплексными показателями. Лог-периодические колебания в модели разрыва пучка волокон / А.В. Подлазов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2009. – №35. – 22 с.
10. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1959. – 608 с.

Поступила в редколлегию 3.06.2014

Рецензент: д-р техн. наук В.О. Мищенко, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков.

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ «ФІНАНСОВИХ БУЛЬБАШОК» ТА ЇХ ЛОГОПЕРІОДИЧНОЇ СКЛАДОВОЇ

В.Ю. Дубницький, О.Є. Петренко, О.І. Ходирев

Досліджено властивості функції, що описує біржові крахи – функції «фінансових бульбашок»: періодичність, наявність асимптот і нулів. Розглянуто тригонометричні властивості логоперіодичної складової цієї функції. Отримані вираження для косинуса подвійного кута, косинуса суми і косинуса різниці тригонометричних функцій з логоперіодичним аргументом. Наведено диференціальне рівняння, розв'язок якого призводить до логоперіодичної функції.

Ключові слова: біржові крахи, «фінансові бульбашки», функції «фінансових бульбашок», логоперіодичні функції, тригонометрія функцій логоперіодичного аргументу, диференціальні рівняння.

A STUDY IN PROPERTIES OF FINANCIAL BUBBLE FUNCTIONS AND THEIR LOGOPERIODICAL COMPONENT

V.Yu. Dubnitskiy, O.Ye. Petrenko, O.I. Khodyrev

Properties studied of a function describing stock market crash functions of financial bubbles: periodicity, availability of asymptotes and zeroes. Trigonometric properties of logoperiodical component of this function are discussed. Expressions were obtained for double angle cosine, sum cosine and cosine of difference between trigonometric functions and logoperiodical argument. A differential equation is shown whose solution leads to logoperiodical function.

Keywords: stock market crash, financial bubble, financial bubble functions, logoperiodical function, trigonometry of logoperiodical argument functions, differential equations.