УДК 621.391

С.Г. Рассомахін

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

УНІВЕРСАЛЬНИЙ МЕТОД ПОРОЗРЯДНОЇ ОБРОБКИ ПОЗИЦІЙНИХ ЧИСЕЛ В УМОВАХ ГАУССОВА ШУМУ

Розглянутий метод, що забезпечує якнайкращий спосіб комбінування "м'якого" і "жорсткого" вирішальних правил при роздільному порозрядному прийомі позиційних кодів на виході гауссова каналу. Одержані формули для обчислення середнього квадрата помилки, проведено порівняння показників якості з альтернативними методами обробки.

гауссов канал, дисперсія помилки, позиційний код, відношення правдоподібності

Вступ

Постановка проблеми. Значна частина систем передачі дискретної інформації (СПДІ) пов'язана з обробкою і передачею цифрових даних і кількісної інформації. До цього класу відносяться системи управління високоточною зброєю, в яких циркулює телеметрична і координатно-цільова інформація, необхідна для здійснення програмної траєкторії руху і наведення на об'єкти поразки. При цьому дані є результатами вимірювань фізичних параметрів, що мають аналогову природу. У цих умовах, при використанні методів імпульсно-кодової модуляції, основним показником якості системи є точність відновлення чисел на виході каналів, що характеризуються, як правило, наявністю адитивного гауссова шуму. На відміну від звичайних цифрових систем зв'язку, інформаційно-вимірювальні комплекси можуть порівнюватися між собою не по показнику середньої вірогідності помилки на біт, що передається, а по величині середнього квадрата (дисперсії) помилки відновлення. При цьому слід мати на увазі, що система з меншою величиною вірогідності помилки може володіти гіршими показниками точності, чим система з мінімальним значенням дисперсії помилки прийому чисел. В зв'язку з цим актуальними є питання продовження поглибленого вивчення особливостей обробки числових даних в модемах СПДІ. В деяких випадках перехід до позиційних кодів при передачі дискретних повідомлень викликаний використанням перспективних способів перешкодостійкого представлення даних, при цьому стає можливою реалізація алгоритмів "накопичення" для усереднювання дій перешкод, що заважають. Таким чином, точність функціонування СПДІ досягається комплексним компромісом при виборі алгоритмів і параметрів перетворення цифрових даних в умовах перешкод каналів зв'язку при повному обліку факторів дії цифрового кодування.

Аналіз літератури. Методи цифрової передачі безперервних повідомлень і завдання мінімізації дисперсії помилки відновлення постійно привертають увагу інженерів. Що найбільш розвиненими на сьогодні в даній проблематиці є питання оптимального маніпуляційного кодування в каналі зв'язку [1] і способи нерівномірного енергетичного захисту позиційно значущих розрядів чисел [2, 3]. Разом з тим, недостатньо вивченими є деякі аспекти використання "м'яких" алгоритмів ухвалення рішень про значення розрядів числових кодів, представлених в дискретній формі в позиційно значущих системах числення. Хоча перевага "м'яких" рішень давно доведена [4, 5] і складає приблизно 2 дБ прирости по енергетичній ефективності СПДІ, набір функцій амплітудної дискримінації обмежується, як правило, логарифмом відношення правдоподібності [5]. Основною гідністю такого еквівалента представлення числового значення оброблюваного сигналу є його лінійність шкали вимірювання [4]. Проте оптимальність (по показнику середнього квадрата помилки) числового уявлення шляхом логарифмування відношення функцій правдоподібності бінарних сигналів в даний час не доведена.

Мета статті. Основною метою даної роботи є строге рішення математичної задачі, що полягає в отриманні виразу для оптимальної функції "м'якої" амплітудної дискримінації бінарних сигналів при порозрядній обробці числових позиційних кодів на виході гауссових каналів за умови нерівномірного енергетичного захисту. Крім того корисною є кількісна оцінка виграшу (по показнику середнього квадрата помилки), що досягається при використанні оптимальних амплітудних дискримінаторів з індивідуальними параметрами для кожної позиційної ваги розрядів чисел.

Основна частина

Розглянемо бінарний сигнал джерела повідомлень, що приймає з рівною імовірністю два числові значення $x = 0,1$, які відповідають квантованому вимірюванню довільної фізичної величини. При використанні фазової маніпуляції в каналі і виборі протилежних (біортогональних) векторів, відповідні сигнали (у низькочастотній області) описуватимуться виразами

$$s_0(t) = -a \cdot \mathrm{Sin}(2\pi\omega t); \quad s_1(t) = a \cdot \mathrm{Sin}(2\pi\omega t); \quad t \in [0,T], \qquad (1)$$

де a – амплітуда; ω – кругова частота; T – тривалість сигналу. Надалі для спрощення вважатимемо $T = 1$ с. В умовах адитивного гауссова білого шуму (АБГШ) $\xi(t)$, що володіє спектральної щільністю потужності N_0, оптимальний кореляційний приймач здійснює оцінку прийнятого значення сигналу за правилом

$$x = 2\int_T [s(t) + \xi(t)] \cdot [\pm \mathrm{Sin}(2\pi\omega t)] dt = \pm(a + \xi), \qquad (2)$$

де ξ – амплітуда відповідної квадратурної компоненти АБГШ на частоті сигналу. Випадкова величина ξ є гауссової, що володіє нульовим середнім і дисперсією $D[\xi] = N_0/2$. Відповідно моменти випадкової оцінки матимуть значення $M[x] = \pm a$, $D[x] = N_0/2$, а функції правдоподібності (тобто умовні ймовірності появи значення x після передачі кожного з сигналів) мають вигляд

$$\varphi_0(x) = P(x|0) = (\pi N_0)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(x+a)^2}{N_0}\right];$$
$$\varphi_1(x) = P(x|1) = (\pi N_0)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{N_0}\right]. \qquad (3)$$

На підставі зміряної на виході корелятора величини x оптимальний амплітудний дискримінатор повинен виробити числове значення $K = f(x)$ з інтервалу $[0,1]$, що мінімізує середній квадрат помилки при оцінці переданого числа $M\left[(\pm 1 - x)^2\right]$. Еталон ± 1 вибраний в даному випадку тому, що звичайно в симетричному каналі при використанні правила максимальної правдоподібності рішення про прийнятий сигнал ухвалюється по знаку відгуку корелятора $\mathrm{sign}(x) = \pm 1$. Для визначення функції оптимального дискримінатора $f(x)$ запишемо вирази для очікуваного квадрата помилки при передачі двох можливих числових значень:

$$M\left[(1+x)^2\right] = \varphi_0(x) \cdot dx \cdot [1 + f(x)]^2;$$
$$M\left[(1-x)^2\right] = \varphi_1(x) \cdot dx \cdot [1 - f(x)]^2, \qquad (4)$$

де $\varphi_i(x) \cdot dx$ – вірогідність попадання оцінки в довільно малу округу біля значення x. Тоді середній квадрат помилки оцінки числа можна визначити виразом

$$M\left[(1 \pm x)^2\right] = P(0) \cdot M\left[(1+x)^2\right] + P(1) \cdot M\left[(1-x)^2\right].$$

За умови рівно імовірних значень числа, що передається, $P(0) = P(1) = 1/2$, інтегруванням по всіх значеннях x маємо дисперсію оцінки

$$D[x] =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varphi_0(x)[1 + f(x)]^2 + \varphi_1(x)[1 - f(x)]^2 \right\} dx =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [1 + f(x)]^2 + [1 - f(x)]^2 e^{\frac{4ax}{N_0}} \right\} \times$$
$$\times e^{-\frac{(x+a)^2}{N_0}} dx.$$

Для визначення оптимального амплітудного дискримінатора необхідно знайти функцію $f(x)$, що забезпечує мінімум $D[x]$. Скористаємося стандартним методом варіаційного числення, поклавши шукану функцію рівній сумі деякої допоміжної функції від x і довільної змінної: $f(x) = g(x) + \Delta$.

Підставивши це значення у формулу дисперсії і диференціюючи по Δ, одержуємо

$$\frac{d D[x, g(x), \Delta]}{d\Delta} = \frac{1}{\sqrt{(\pi N_0)}} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 + g(x) + \Delta - [1 - g(x) - \Delta] e^{\frac{4ax}{N_0}} \right\} e^{-\frac{(x+a)^2}{N_0}} dx.$$

Прирівнявши до нуля дану похідну, вибираємо основне і, одночасно, саме просте рішення одержаного рівняння, відповідне рівності нулю виразу у фігурних дужках під інтегралом. Далі, вважаючи $\Delta = 0$, остаточно одержуємо

$$f_{\text{опт}}(x) = g(x) = -\frac{1 - \exp(4ax/N_0)}{1 + \exp(4ax/N_0)}. \qquad (5)$$

Це і є виразом для визначення оптимальної функції амплітудного дискримінатора. Зміни характеру функції $f_{\text{опт}}(x)$ при різних значеннях співвідношення амплітуди сигналу і спектральної щільності потужності АБГШ ілюструються на рис. 1. Дана функція відповідає інтуїтивно справедливим уявленням про алгоритм ухвалення рішення оптимальним дискримінатором.

Основними властивостями одержаної функції є наступні.

1. $f_{\text{опт}}(x) \equiv 0$ при $a/N_0 = 0$. Це означає, що дискримінатор відмовляється від ухвалення рішення, вважаючи прийняте число рівним своєму математичному очікуванню при $P(0) = P(1) = 1/2$ (канал "розірваний").

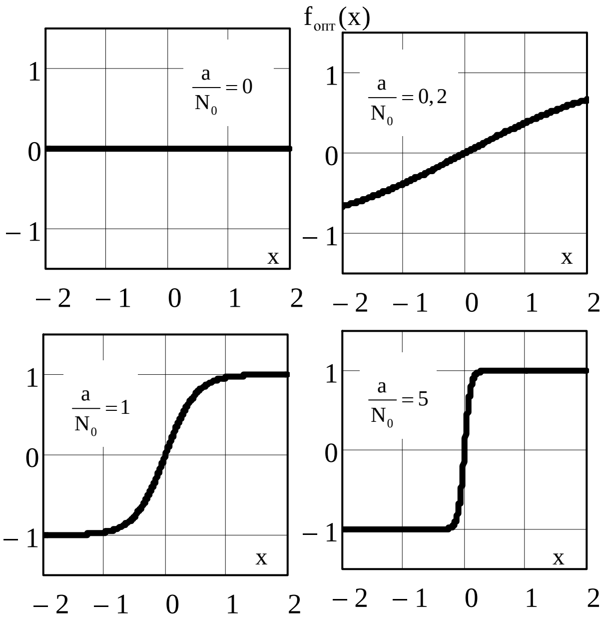

Рис. 1. Функція оптимального амплітудного дискримінатора при різних відносинах амплітуді сигналу к спектральної потужності шуму

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_{опт}(x)=\pm 1$ при $a/N_0>0$. Чим далі оцінка числа від математичного очікування (більше відхилення у бік тієї або іншої межі інтервалу) , тим більше ймовірно відповідне граничне значення діапазону $[0,1]$.

3. $\lim\limits_{a/N_0\to\infty} \frac{d f_{опт}(x)}{dx}=\infty$ у крапці $x=0$. Чим кращий канал, тим ближче функція дискримінатора до "порогової", відповідної звичайному правилу максимальної правдоподібності при прийомі бінарних сигналів.

$$K=\begin{cases}1, & \text{при } x\ge 0;\\ 0, & \text{при } x<0.\end{cases}$$

4. При будь-яких $0<a/N_0<\infty$ існує інтервал "м'яких рішень" $[0-\varepsilon, 0+\varepsilon]$, у якому $\frac{d f_{опт}(x)}{dx}$ істотно більше за нуль. Причому величина ε монотонно убуває при поліпшенні якості каналу (зростанні відношення a/N_0).

Головною відмінністю знайденої функції оптимального дискримінатора (5) від відомого способу кількісної оцінки бінарної величини на основі логарифма відношення правдоподібності є нелінійний характер $f_{опт}(x)$.

Цим пояснюється універсальність правила (5), що забезпечує якнайкращу імовірнісну оцінку числового значення в умовах гауссова шуму.

Дискримінатор, побудований на основі логарифма відношення правдоподібності, володіє функцією

$$f'(x)=\begin{cases}-1, & x\le N_0/(4a);\\ \frac{4a\cdot x}{N_0}, & |x|<N_0/(4a);\\ +1, & x\ge N_0/(4a);\end{cases} \qquad (6)$$

яка є лінійною апроксимацією першого порядку функції оптимального дискримінатора $f_{опт}(x)$ (рис. 2).:

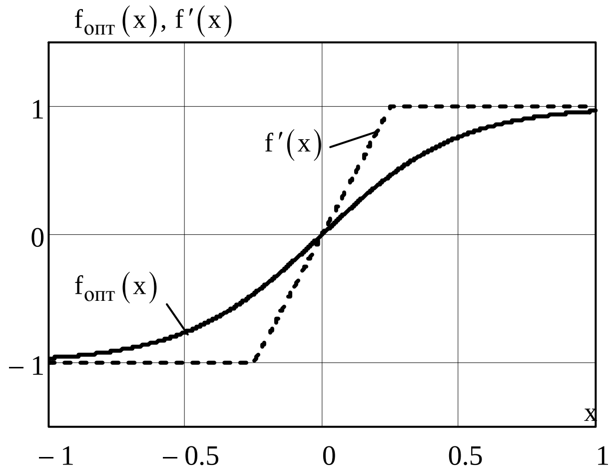

Рис. 2. Порівняння функцій оптимального і логарифмічного дискримінаторів

Для порівняння показників точності оптимального і логарифмічного дискримінаторів при обробці багато розрядних двійкових чисел запишемо відповідні вирази для середнього квадрата помилки. При цьому матимемо на увазі, що кожний з розрядів, що володіє визначеною його позицією k вагою $2^k, k=0,\ldots,n-1$, може передаватися сигналами різної амплітуди (потужності) [3]. Перерозподіл енергії, що витрачається на передачу символів чисел, є одним із способів підвищення перешкодостійкості без додаткових енергетичних витрат.

Позначивши $\vec{A}=\{a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}\}$ – вектор амплітуд n-розрядного двійкового кодового слова, можемо записати вираз для середнього квадрата помилки відновлення при використанні оптимального дискримінатора

$$D_{опт}(\vec{A})=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}2^{2j}D\left[x,a_j,f_{опт}(x)\right]. \qquad (7)$$

Тут множник 2^{2j} використаний для позначення квадрата позиційної ваги j-го розряду числа, а величина $D[x,a_j]$ – нормований на одиничну вагу розряду середній квадрат помилки, визначений раніше, за умови підстановки j-го елементу вектора амплітудних коефіцієнтів $\vec{A}$. Використовуючи (5), після нескладних спрощень одержуємо

$$D_{опт}\left(\vec{A}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi N_0}}\sum_{i=0}^{n-1}2^{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-\frac{\left(x+a_i\right)^2}{N_0}\right]}{1+\exp\left(-\frac{4a_i x}{N_0}\right)}dx\,. \quad (8)$$

У разі використання логарифмічного дискримінатора аналогічна величина $D'(\vec{A})$ може бути обчислена з виразу (7) при використанні функції $f'(x)$ замість $f_{опт}(x)$.

Якнайкращий спосіб розподілу енергії між розрядами позиційного числа може бути знайдений для обох випадків з рішення задач мінімізації, що визначає координати вектора $\vec{A}$: a_i, $i=\overline{0,n-1}$

$$\left.\begin{array}{l}\min\limits_{\vec{A}}\left\langle D_{опт}\right\rangle,\\ \min\limits_{\vec{A}}\left\langle D'\right\rangle\end{array}\right\}\text{ при нормуванні }\sum_{i=0}^{n-1}{a_i}^2=n. \quad (9)$$

Для отримання практичних рекомендацій по синтезу оптимального алгоритму передачі і прийому позиційних кодів одержані чисельні рішення задач (7), (8) і (9) для різних значень відношення сигнал/шум в каналах з АГБШ. Результати розрахунків свідчать про те, що при будь-якому відношенні сигнал/шум і будь-якої розрядності чисел універсальний метод, заснований на функції амплітудного дискримінатора $f_{опт}(x)$, забезпечує зменшення середнього квадрата помилки відновлення не менше ніж на 0,5 дБ в порівнянні з функцією логарифма відношення правдоподібності. З урахуванням того, що при цьому не потрібний, практично, ніяких додаткових витрат (смуги частот і енергії), даний результат є цілком прийнятним.

В процесі рішення оптимізаційної задачі (9) відбувається одночасне, найбільш раціональне "укорочення" кодових слів позиційних чисел. Даний ефект викликаний тим, що розрядам, вага яких істотно менше за рівень шуму, відповідають нульові амплітудні коефіцієнти у векторі $\vec{A}$. Це дозволяє (при малих відносинах сигнал/шум) зменшувати необхідну смугу частот і максимальну потужність передавача за рахунок збільшення тривалості інтервалу модуляції T. Застосування оптимального амплітудного дискримінатора можливо, як при використанні звичайних ФМ сигналів, так і сигналів з декількома несучими частотами (OFDM).

Висновки

Рішення математичної задачі визначення оптимальної функції перемикача амплітудного дискримінатора дозволило створити універсальний метод порозрядної обробки позиційних чисел в процесі прийому їх з гауссова каналу.

Одержана функція $f_{опт}(x)$ адаптивна до будь-якого відношення сигнал/шум і забезпечує найбільш раціональне поєднання "м'якого" і "жорсткого" правил ухвалення рішень в демодуляторі. При цьому поєднання "жорсткого" (для старших розрядів чисел) і "м'якого" (для молодших розрядів) вирішальних правил забезпечує приріст точності СПДІ при збереженні показників енергетичної і смугової ефективності.

Використання розробленого універсального алгоритму в поєднанні з перерозподілом енергії між розрядами чисел забезпечує зниження середньої потужності шуму відновлення чисел, в порівнянні із звичайними методами передачі, не менше, чим в 10 - 25 разів. При цьому виграш по точності в порівнянні з відомими логарифмічними дискримінаторами складає приблизно 0,5 дБ.

Список літератури

1. Величкин А.И. Теория дискретной передачи непрерывных сообщений. – М.: Сов. радио, 1970. – 296 с.

2. Терентьев С. Н. Минимизация среднеквадратической ошибки при передаче количественной информации // Труды Института Кибернетики АН УССР. – 1969. – Вып. 3. – С. 37-41.

3. Рассомахин С.Г. Синтез оптимального алгоритма передачи числовых позиционных кодов для дискретно-непрерывных каналов с флуктуационным шумом // Системи обробки інформації.– Х.: ХУ ПС, 2007. – № 8 (66). – С. 81-84.

4. Рассомахин С.Г., Ткаченко С.А. Оценка эффективности применения сигналов с фазово-частотной модуляцией // Збірник наукових праць Об'єднаного науково-дослідного інституту Збройних Сил. – Х.: ОНДІ ЗС, 2007. – Вип. 2 (7). – С. 107-120.

5. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации / А.Г. Зюко, А.И. Фалько, И.П. Панфилов, В.Л. Банкет, П.В. Иващенко; Под ред. А.Г. Зюко. – М.: Радио и связь, 1985. – 272 с.

Надійшла до редколегії 14.11.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.С. Сорока, Харківський державний університет ім. В.Н. Каразіна, Харків.