Математичні моделі та методи

УДК 681.3

В.Ю. Дубницкий, А.М. Кобылин

Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела Национального банка Украины (Киев), Харьков

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕРВАЛЬНО ЗАДАННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Поставлены прямая и обратная задачи решения системы линейных алгебраических уравнений, в которой все входящие в её состав элементы заданы в интервальном виде. Показано, что результат решения обратной задачи можно использовать для синтеза линейных систем при известных воздействиях на них и их реакциях на эти воздействия. Предложены алгоритмы решения прямой и обратной задач, объединённые общим методическим приёмом, состоящим в том, что решение прямой и обратной задач сводится к решению многокритериальной задачи оптимизации. Для её решения использован поисковый метод, основанный на выборе наилучшего решения на основе метода, связанного с использованием почти равномерных последовательностей.

Ключевые слова: *системы линейных алгебраических уравнений, прямая задача решения системы линейных алгебраических уравнений, обратная задача решения системы линейных алгебраических уравнений, интервальный анализ, почти равномерно распределённые последовательности, нестандартный интервальный анализ, неопределённость измерений.*

Введение

Систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) используют как математическую модель самых разнообразных процессов. Например, в задачах строительной механики [1], при определении усилий в стержнях ферм применяют систему вида:

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} X_j + \Delta_i = 0, \; i = 1,2,...n, \; n = m, \qquad (1)$$

где X_j – величина силы или момента, действующих на конструкцию, δ_{ij} – единичное перемещение по направлению *i,* Δ_i – величина перемещения в направлении i-й связи. При анализе электрических цепей постоянного тока используют систему уравнений вида [2]:

$$\sum_{j=1}^{n} R_{ij} I_{ii} = E_i, \qquad (2)$$

где R_{ij} – сопротивление смежных ветвей между *i*-м и j-м контурами, E_i – контурная ЭДС *i*-го контура, I_{ii} – контурный ток в i-м контуре.

В общем виде эти системы представим так:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i = 0. \; i = 1,2,...n, \qquad (3)$$

или в матричном виде:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} - \mathbf{B} = \mathbf{0}. \qquad (4)$$

В этих и других, аналогичных системах, можно выделить важную особенность. Все входящие в эти системы параметры и неизвестные величины имеют реальный физический смысл и, в силу этого, их значения могут быть получены с некоторой погрешностью. В зависимости от конкретного физического смысла задачи эти погрешности могут быть заранее известными, а в некоторых случаях их определение невозможно. Таким образом, можно утверждать, что все эти величины известны с некоторой неустранимой неопределённостью. В соответствии с [3…6] различают неопределенность типа А, которую оценивают статистическими методами и неопределенность типа В, которую оценивают нестатистическими методами. При этом предлагается два метода оценивания неопределенностей А и В. Для неопределенности типа А это использование известных статистических оценок среднеарифметического значения и среднеквадратического отклонения, используя результаты измерений и опираясь, в основном, на нормальный закон распределения полученных величин. Для неопределенности типа В это использование априорной нестатистической информации, опираясь, в основном, на равномерный закон распределения возможных значений величин в определенных границах. Таким образом, возникает задача получения решения СЛАУ с учётом этой неопределённости.

Постановка задачи

В рамках данной работы будут рассмотрены только физически реализуемые системы, то есть такие, численные значения характеристик которых отличны от нуля. Выделим следующие варианты постановки задач: прямую и обратную. Прямая постановка задачи предполагает следующую формулировку. Определить с точностью до заданного интервала неопределённости значение вектора **X** при условии задания матрицы **A** и вектора **B** с такой же мерой неопределённости. Обратная постановка задачи предполагает, что заданы векторы **X** и **B**, требуется определить матрицу **A** при сохранении тех же точностных характеристик. Таким образом, решение прямой задачи можно считать задачей анализа системы, решение обратной задачи- задачей её синтеза.

Анализ литературы

Одним из первых на необходимость учёта неопределённости в исходных данных обратил внимание А.Н. Крылов. В работе [7, С. 6] он писал: «Отсюда ясно, что для прикладных вопросов нет надобности производить вычисления по абсолютно точным формулам и с совершенною точностью; напротив, можно пользоваться заведомо неточными формулами или приемами, лишь бы была уверенность, что происходящая от этого погрешность не превышает тех пределов, которые в данном вопросе допускаются». Математическим аппаратом в полной мере реализующим эти положения можно считать аппарат интервальных вычислений. Его основы изложены в работах [8 – 10].Следуя этим работам, введём следующие определения.

Замкнутым интервалом [a, b] вещественной оси R мы называем множество всех чисел расположенных между заданными числами a и b, включая их самих, т. е.

$$[a, b] := \{x \in R \mid a \le x \le b\}. \quad (5)$$

В соответствии с правилами классической интервальной арифметики [8 – 10] действия с интервальными числами выполняют по следующим правилам:

$$\mathbf{A + B} = \left[\underline{a}; \overline{a}\right] + \left[\underline{b}; \overline{b}\right] = \left[\underline{a} + \underline{b}; \overline{a} + \overline{b}\right]; \quad (6)$$

$$\mathbf{A - B} = \left[\underline{a}; \overline{a}\right] - \left[\underline{b}; \overline{b}\right] = \left[\underline{a} - \overline{b}; \overline{a} - \underline{b}\right]; \quad (7)$$

$$\mathbf{A * B} = \left[\underline{a}; \overline{a}\right] * \left[\underline{b}; \overline{b}\right] = \begin{bmatrix} \min\left\{\underline{a}\cdot\underline{b}, \underline{a}\cdot\overline{b}, \overline{a}\cdot\underline{b}, \overline{a}\cdot\overline{b}\right\}, \\ \max\left\{\underline{a}\cdot\underline{b}, \underline{a}\cdot\overline{b}, \overline{a}\cdot\underline{b}, \overline{a}\cdot\overline{b}\right\} \end{bmatrix}; \quad (8)$$

$$\mathbf{A / B} = \left[\underline{a}; \overline{a}\right] / \left[\underline{b}; \overline{b}\right] = \left[\underline{a}, \overline{a}\right] * \left[1/\overline{b}, 1/\underline{b}\right]. \; 0 \notin b. \quad (9)$$

В условии (6) и далее принято, что нижнее подчёркивание соответствует левой границе интервала, содержащего число **[A],** верхнее подчёркивание соответствует правой границе при условии, что $\mathbf{A} \subset \mathbf{R}^{+}$.

В инженерной практике границы предельных погрешностей определяют в виде интервала, симметрично расположенного относительно средины оцениваемой величины. Поэтому для дальнейших расчётов целесообразно применять правила так называемой нестандартной интервальной арифметики, изложенные в работе [11]. В соответствии с ними введём операции, определяющие центры интервалов и радиусы **A** и **B** соответственно:

$$a = \frac{\underline{a} + \overline{a}}{2}, \quad r_a = \frac{\overline{a} - \underline{a}}{2}, b = \frac{\underline{b} + \overline{b}}{2}, \quad r_b = \frac{\overline{b} - \underline{b}}{2}. \quad (10)$$

Нестандартная интервально-арифметическая операция сложения определена так:

$$\mathbf{A} +^{-} \mathbf{B} = \left\langle a + b, | r_a - r_b | \right\rangle. \quad (11)$$

Нестандартная интервально-арифметическая операция вычитания определена так:

$$\mathbf{A} -^{-} \mathbf{B} = \left\langle a - b, | r_a - r_b | \right\rangle. \quad (12)$$

Нестандартная интервально-арифметическая операция произведения определена так:

$$\mathbf{A} \times^{-} \mathbf{B} = \left\langle ab - \mathrm{sgn}(ab) r_a r_b, | a r_b - \mathrm{sgn}(ab) b r_a | \right\rangle, \quad (13)$$

если

$$|a|/r_a \ge 1, \quad |b|/r_b \ge 1; \quad (14)$$

$$\mathbf{A} \times^{-} \mathbf{B} = \left\langle ab - \mathrm{sgn}(b) a r_b, | b r_a - \mathrm{sgn}(b) r_a r_b | \right\rangle, \quad (15)$$

если

$$|a|/r_a < 1, \quad |a|/r_a < |b|/r_b; \quad (16)$$

$$\mathbf{A} \times^{-} \mathbf{B} = \left\langle ab - \mathrm{sgn}(a) b r_b, | a r_a - \mathrm{sgn}(a) r_b r_b | \right\rangle, \quad (17)$$

если

$$b/r_b < 1, \quad |a|/r_a \ge |b|/r_b. \quad (18)$$

Нестандартная интервально-арифметическая операция деления определена так:

$$\mathbf{A} /^{-} \mathbf{B} = \frac{\left\langle ab - \mathrm{sgn}(ab) r_a r_b, |a r_b - \mathrm{sgn}(ab) b r_a| \right\rangle}{b^2 - r_b^2}, \quad (19)$$

если

$$|a|/r_a \ge 1;$$

$$\mathbf{A} /^{-} \mathbf{B} = \frac{\left\langle ab - \mathrm{sgn}(b) a r_b, |b r_a - \mathrm{sgn}(b) r_a r_b| \right\rangle}{b^2 - r_b^2}, \quad (20)$$

если

$$|a|/r_a < 1. \quad (21)$$

Современное состояние проблемы решения системы (3) при интервально заданных условиях рассмотрено в работе [10].Решение обратной задачи задачи для системы (3) при обычном определении чисел рассмотрено в работах [12, 13].Из проведенного анализа литературы следует, что в настоящее время известны методы решения СЛАУ при интервальном определении параметров и переменных, входящих в СЛАУ и методы решения обратной задачи для СЛАУ, но только при традиционном определении параметров и переменных, входящих в СЛАУ.

Результаты исследований

Известно, что интервал возможных значений любой физически реализуемой величины W в общем виде можно представить так:

$$\overline{A}(1 - \varepsilon) < A < \overline{A}(1 + \varepsilon), \quad (22)$$

где $\overline{A}$ – среднее значение измеряемой величины, ε – относительная погрешность её определения. Примем, что левая часть условия (22) определяет нижнюю границу интервала, на котором определена величина А, правая часть условия (22) – верхнюю. В соответствии с принятой в интервальном анализе символикой обозначим эти границы так:

$$\underline{a} = \overline{A}(1-\varepsilon);\ \overline{a} = (1+\varepsilon), \tag{23}$$

Следовательно, связь между величиной относительной погрешности определения величины А и свойствами интервальной величине [A] определяют по условию:

$$\varepsilon = \frac{2*\left(\overline{a}-\underline{a}\right)}{\left(\overline{a}+\underline{a}\right)}. \tag{24}$$

Из условия (10) следует, что:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot\frac{r_a}{a} = \frac{\overline{a}-\underline{a}}{\overline{a}+\underline{a}}. \tag{25}$$

Полученные условия (24) и (25) устанавливают связь между погрешностью определения величины и интервалом неопределённости, который ей соответствует.

В интервальном виде условие (4) примет вид:

$$\sum_{j=1}^{n}[A]\ [X] = [B]. \tag{26}$$

Раскрыв (26) получим:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}\right)\ \left(\underline{x}_j,\overline{x}_j\right) = \left(\underline{b}_j,\overline{b}_j\right),\ i = 1,2,...n. \tag{27}$$

В работах [8]…[10] описано понятие расстояния между интервалами [**A**] и [**B**], определяемое по правилу (28):

$$d(a,b) = \max\left\{\left|\underline{a}-\underline{b}\right|,\left|\overline{a}-\overline{b}\right|\right\}. \tag{28}$$

Интервально определенный вектор

$$\left[\overline{\overline{X}}\right]=\left[\left(\underline{\underline{x_1}},\overline{\overline{x_1}}\right),\left(\underline{\underline{x_2}},\overline{\overline{x_2}}\right),...\left(\underline{\underline{x_i}},\overline{\overline{x_i}}\right),...\left(\underline{\underline{x_n}},\overline{\overline{x_n}}\right)\right]^T. \tag{29}$$

назовём решением системы (26) или, что то же (27), если при его подстановке в условие (27) решается следующая задача оптимизации:

$$L = \sum_{i}^{n}\max_{i}\left\{\left|\underline{b}_i-\underline{\underline{b}}_i\right|,\left|\overline{b}_i-\overline{\overline{b}}_i\right|\right\} \to \min, \tag{30}$$

при ограничениях:

$$\left[\overline{\overline{X}}\right] \subset R^+, \tag{31}$$

$$\max_i \varepsilon(x_i) \le \frac{\overline{\overline{x_i}}-\underline{\underline{x_i}}}{\overline{\overline{x_i}}+\underline{\underline{x_i}}}\max \le \begin{Bmatrix}\max\limits_i\max\limits_j\left(a_{ij}\right);\\ \max\limits_i\varepsilon\left(b_i\right)\end{Bmatrix}. \tag{32}$$

Физический смысл условий (29)…(32) следующий. Символ $\left[\overline{\overline{X}}\right]$ соответствует возможному значению интервального числа вида: $\left[\overline{\overline{X}}\right]=\left(\underline{\underline{x}},\overline{\overline{x}}\right)$. Символами $\underline{\underline{b_i}},\overline{\overline{b_i}}$ обозначены нижнее и верхнее значение интервала элемента вектора [B] соответственно, вычисленные при условии, что $\left[X\right] = \left[\overline{\overline{X}}\right]$. Модуль интервального числа $\left[X\right]$ согласно работе [10, С.32] определяют по условию:

$$\left|X\right| = \max\left\{\underline{x},\overline{x}\right\}. \tag{33}$$

Условие (30) означает, что приближённое решение системы (27) определяют, используя принцип наименьшего модуля. Условие (31) является следствием предположения о физической реализуемости системы. Условие (32) сформулировано с учётом описанных в [7] требований к точности выполняемых вычислений и имеет следующий физический смысл:

- относительная ошибка результата расчёта должна быть не меньше, чем реально достижимая точность измерения (определения) переменных;
- сверху точность расчёт должна быть ограничена точностью определения исходных данных.

Для определения существования решения системы (27) в [10] дано определение относительной узости интервала, величины $\chi(a)$:

$$\chi(a) = \begin{cases}\underline{a}/\overline{a}, \text{если} \left|\underline{a}\right| < \left|\overline{a}\right|;\\ \overline{a}/\underline{a}, \quad \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{34}$$

В работе [8, С. 19] показано, что уравнение вида (29) имеет решение только в том случае, когда:

$$\chi(a) \ge \chi(b). \tag{35}$$

Условие (35) более жесткое, чем условия (30)…(32). Условия (30)…(32) дают возможность учёта фактора неопределённости исходных данных, вызванной неопределённостью, присущей исходным данным.

Для решения поставленной задачи применён метод, основанный на сканировании пространства переменных с использованием почти равномерно распределённых последовательностей. Этот метод относится к поисковым методам оптимизации. Теоретические основы метода изложены в работе [14]. Так, как эта монография представлена в сети ИНТЕРНЕТ на многих сайтах, например, http://www.mashinoved.ru/optimization/optimization.htm, авторы данного сообщения, в целях экономии места, посчитали излишним излагать теоретические основы использованного ими метода. Фактически, используя этот метод, задача решения СЛАУ сводится к многокритериальной задаче оптимизации в которой количество критериев равно количеству уравнений, свертка критериев выполняется по условию (32).

Алгоритм решения прямой задачи СЛАУ состоит из первого, общего и заключительного шага.

Исходными данными служат следующие значения интервальных чисел: Правая часть уравнения (26) , заданная в виде:

$$[B] = \left[\left(\underline{b_1},\overline{b_1}\right),\left(\underline{b_2},\overline{b_2}\right)...\left(\underline{b_i},\overline{b_i}\right),...\left(\underline{b_n},\overline{b_n}\right)\right]^T$$

соответствует желаемому выходному результату физически реализуемой системы. Матрицу $[A]$ - матрицу параметров системы , в соответствии с работами (8)…(10), задают в виде:

$$[A] =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\underline{a_{11}}, \overline{a_{11}}\right) & \left(\underline{a_{12}}, \overline{a_{12}}\right) \cdots & \left(\underline{a_{1j}}, \overline{a_{1j}}\right) \cdots & \left(\underline{a_{1n}}, \overline{a_{1n}}\right) \\ \left(\underline{a_{21}}, \overline{a_{21}}\right) & \left(\underline{a_{22}}, \overline{a_{22}}\right) \cdots & \left(\underline{a_{2j}}, \overline{a_{2j}}\right) \cdots & \left(\underline{a_{2n}}, \overline{a_{2n}}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\underline{a_{n1}}, \overline{a_{n1}}\right) & \left(\underline{a_{n2}}, \overline{a_{n2}}\right) \cdots & \left(\underline{a_{nj}}, \overline{a_{nj}}\right) \cdots & \left(\underline{a_{nn}}, \overline{a_{nn}}\right) \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Способ определения вектора $[X]$ описан условием (29).

<u>*Первый шаг алгоритма*</u>. На этом шаге формируют начальное значение вектора $\left[\overline{\overline{X}}\right]$. Для каждого значения $j = 1,...n$ выполняют следующие операции.

1. Генерируется пара $Z = (\xi_1, \xi_2)$ равномерно распределённых на интервале $[0;1]$ случайных чисел. Примем, что:

$$r_1 = \min(\xi_1, \xi_2)\,,\ r_2 = \max(\xi_1, \xi_2)\,.$$

2. Определяется пара чисел: $\underline{\underline{x}}_j^{(1)}$, $\overline{\overline{x}}_j^{(1)}$ по правилу:

$$\underline{\underline{x}}_j^{(1)} = \min\left\{ \begin{matrix} \left[\underline{x}_j + \left(\overline{x}_j - \underline{x}_j\right) r_1^{(1)}\right]; \\ \left[\underline{x}_j + \left(\overline{x}_j - \underline{x}_j\right) r_2^{(1)}\right] \end{matrix} \right\}; \quad (37)$$

$$\overline{\overline{x}}_j^{(1)} = \max\left\{ \begin{matrix} \left[\underline{x}_j + \left(\overline{x}_j - \underline{x}_j\right) r_1^{(1)}\right]; \\ \left[\underline{x}_j + \left(\overline{x}_j - \underline{x}_j\right) r_2^{(1)}\right] \end{matrix} \right\}. \quad (38)$$

Условия (37) и (38) формируют интервал возможного решения задачи по каждой из переменных $x_j, j = 1,2,...n.$ Условно это показано на рис. 1.

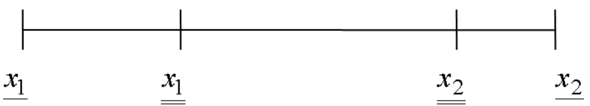

Рис. 1. Схема последовательного сжатия возможного интервала решения.

3. Вычисляется величина:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right)\left(\underline{\underline{x_j^{(1)}, \overline{\overline{x}}_j^{(1)}}}\right) = \left(\underline{\underline{b}}_j^{(1)}, \overline{\overline{b}}_j^{(1)}\right).\ \ j = 1,2,...n. \quad (39)$$

$$\text{и} \quad L^{(1)} = \sum_{i}^{n} \max_{i}\left\{\left|\underline{b}_i - \underline{\underline{b}}_i^{(1)}\right|, \left|\overline{b}_i - \overline{\overline{b}}_i^{(1)}\right|\right\} \to \min\,. \quad (40)$$

4. Проверяется выполнения условий (31) и (32).Если эти условия (32) выполнены, то переходят к следующему шагу, предварительно запомнив величину $L^{(1)}$. Если условия (31) и (32) не выполнено, то проводят следующее испытание с новыми парами случайных чисел. Если после R испытаний условия (31) и (32) не выполнены, то процесс поиска решения прекращается.

<u>*Общий (к+1)*</u> <u>*шаг алгоритма*</u>. На этом шаге формируют (к+1) значение вектора $\left[\overline{\overline{X}}\right]$. Для каждого значения $j = 1,2,...n$:

1. Генерируется пара $Z = (\xi_1, \xi_2)$ равномерно распределённых на интервале $[0;1]$ случайных чисел. Примем, что:

$$r_1 = \min(\xi_1, \xi_2)\,,$$

$$r_2 = \max(\xi_1, \xi_2)\,.$$

2. Определяется пара чисел $\underline{\underline{x}}_j^{(k+1)}$, $\overline{\overline{x}}_j^{(k+1)}$:

$$\underline{\underline{x}}_j^{(k+1)} = \min\left\{ \begin{matrix} \left[\underline{\underline{x}}_j^{(k)} + \left(\overline{\overline{x}}_j^{(k)} - \underline{\underline{x}}_j^{(k)}\right) r_1^{(k)}\right]; \\ \left[\underline{\underline{x}}_j^{(k)} + \left(\overline{\overline{x}}_j^{(k)} - \underline{\underline{x}}_j^{(k)}\right) r_2^{(k)}\right] \end{matrix} \right\}; \quad (41)$$

$$\overline{\overline{x}}_j^{(k+1)} = \max\left\{ \begin{matrix} \left[\underline{\underline{x}}_j^{(k)} + \left(\overline{\overline{x}}_j^{(k)} - \underline{\underline{x}}_j^{(k)}\right) r_1^{(k)}\right]; \\ \left[\underline{\underline{x}}_j^{(k)} + \left(\overline{\overline{x}}_j^{(k)} - \underline{\underline{x}}_j^{(k)}\right) r_2^{(k)}\right] \end{matrix} \right\}. \quad (42)$$

4. Проверяется выполнения условий (46) и (47).Если они выполнено, то переходят к следующему шагу, Если после R испытаний условие (46) и (47) не выполнены, то процесс поиска решения прекращается.

5. Вычисляется величина $L^{(k+1)}$ и запоминается.

Общий шаг выполняют заранее заданное число реализаций К. . Выполнив этот шаг, выбирают наилучшее решение, соответствующее условию (30).

Решение аналогичной задачи рассмотрено в работе [15]. От изложенного в этой работе метода предложенный метод отличается тем, что для решения задачи оптимизации, позволяющей получить решение СЛАУ в интервальном виде, использован поисковый метод определения экстремума.

Алгоритм решения обратной задачи СЛАУ состоит из первого, общего и заключительного шага

Обратная задача решения СЛАУ предполагает, что в системе вида (3) или (4) интервально заданные величины $B = (b_1, b_2, ...b_n)^T$ и $X = (x_1, x_2, ...x_n)^T$ известны и требуется определить такие элемента матрицы А, которые минимизируют условие:

$$\|Z\| = \|AX - B\|. \quad (44)$$

Следуя работе [10] изложим его физический смысл так. Для системы, модель которой может быть представлена в виде СЛАУ, требуется так определить её параметры, заданные матрицей А, чтобы при входных воздействиях, заданных вектором Х, выходной сигнал, определяемый произведением вида АХ, был бы наилучшим приближением по отношению к вектору желаемых результатов В.

Определим решение обратной задачи для СЛАУ, заданной в виде (26) или (27) как задачу определения интервально заданной матрицы вида :

$$\left[\overline{\overline{A}}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} (\underline{\underline{a}}_{11}, \overline{\overline{a}}_{11}) & (\underline{\underline{a}}_{12}, \overline{\overline{a}}_{12}) \cdots & (\underline{\underline{a}}_{1j}, \overline{\overline{a}}_{1j}) \cdots & (\underline{\underline{a}}_{1n}, \overline{\overline{a}}_{1n}) \\ (\underline{\underline{a}}_{21}, \overline{\overline{a}}_{21}) & (\underline{\underline{a}}_{22}, \overline{\overline{a}}_{22}) \cdots & (\underline{\underline{a}}_{2j}, \overline{\overline{a}}_{2j}) \cdots & (\underline{\underline{a}}_{2n}, \overline{\overline{a}}_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\underline{\underline{a}}_{n1}, \overline{\overline{a}}_{n1}) & (\underline{\underline{a}}_{n2}, \overline{\overline{a}}_{n2}) \cdots & (\underline{\underline{a}}_{nj}, \overline{\overline{a}}_{nj}) \cdots & (\underline{\underline{a}}_{nn}, \overset{=}{a}_{nn}) \end{pmatrix}, \quad (45)$$

обеспечивающей выполнение условия (30) при соблюдении ограничений:

$$\left[\overline{\overline{A}}\right] \subseteq \left[\overline{D}\right] \quad (46)$$

и

$$\max_i \max_j \varepsilon(a_{ij}) \le$$

$$\le \frac{\overline{\overline{a}}_{ij} - \underline{\underline{a}}_{ij}}{\overline{\overline{a}}_{ij} + \underline{\underline{a}}_{ij}} \le \max\begin{cases} \max\limits_i \max\limits_j \varepsilon(x_i); \\ \max\limits_i \varepsilon(b_i) \end{cases} \quad (47)$$

при $i, j = 1, 2, \ldots n$.

В условии (46) принято, что $\left[\overline{D}\right]$ многомерный параллелепипед, заведомо содержащий матрицу $[A]$ и границы которого назначают исходя из физического смысла задачи.

Исходными данными служат следующие значения интервальных чисел: условия (29), (35) и матрица (36).

Первый шаг алгоритма. На этом шаге формируют начальное значение матрицы $\left[\overline{\overline{A}}\right]$, имеющей размерность $(n \times n)$. С ‘этой целью выполняют следующие действия.

1. Формируют матрицу $\|Z\|$ размерности $(n \times n)$, каждый элемент которой задан парой равномерно распределённых случайных чисел ξ_1, ξ_2, т.е.

$$\|Z\|_{n\times n} = (\xi_1, \xi_2)_{ij}, i = 1, 2, \ldots n; j = 1, 2, \ldots n.$$

Примем, что:

$$(r_1)_{ij} = \min(\xi_1, \xi_2)_{ij},$$

$$(r_2)_{ij} = \max(\xi_1, \xi_2)_{ij}.$$

2. Определяют пару чисел :

$$\left(\underline{\underline{a}}^{(1)}\right)_{ij} = \min\left\{\begin{matrix}\left[\underline{a}_{ij} + (\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})(r_1)_{ij}\right], \\ \left[\underline{a}_{ij} + (\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})(r_1)_{ij}\right]\end{matrix}\right\}, \quad (48)$$

$$\left(\overline{\overline{a}}^{(1)}\right)_{ij} = \max\left\{\begin{matrix}\left[\underline{a}_{ij} + (\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})(r_1)_{ij}\right], \\ \left[\underline{a}_{ij} + (\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})(r_1)_{ij}\right]\end{matrix}\right\}. \quad (49)$$

3. Вычисляются величины (37) и (38).

$$L^{(1)} = \sum_i^n \max_i\left\{\left|\underline{b}_i - \underline{\underline{b}}_i^{(1)}\right|, \left|\overline{b}_i - \overline{\overline{b}}_i^{(1)}\right|\right\} \to \min. \quad (50)$$

4. Проверяется выполнения условий (46) и (47).Если эти условия выполнены, то переходят к следующему шагу, предварительно запомнив величину $L^{(1)}$. Если условия (46) и (47) не выполнено, то проводят следующее испытание с новыми парами случайных чисел. Если после *R* испытаний условия (46) и (47) не выполнены, то процесс поиска решения прекращается.

Общий (к+1) шаг алгоритма. На этом шаге формируют (к+1) значение интервально заданной матрицы A. Для получения элемента $\left(\underline{\underline{a}}_{ij}, \overset{=}{a}_{ij}\right)^{(k+1)}$ выполняют следующие действия.

1. 1.Формируют матрицу $\|Z\|$ размерности $(n \times n)$, каждый элемент которой задан парой равномерно распределённых случайных чисел ξ_1, ξ_2, т.е.

$$\|Z\|_{n\times n} = (\xi_1, \xi_2)_{ij}, i = 1, 2, \ldots n; j = 1, 2, \ldots n.$$

Примем, что:

$$(r_1)_{ij} = \min(\xi_1, \xi_2)_{ij},$$

$$(r_2)_{ij} = \max(\xi_1, \xi_2)_{ij}.$$

2. .Определяют пару чисел:

$$\left(\underline{\underline{a}}^{(k+1)}\right)_{ij} =$$

$$= \min\left\{\begin{matrix}\left[\underline{\underline{a}}^{(k)}{}_{ij} + \left(\overset{=}{a}{}^{(k)}{}_{ij} - \underline{\underline{a}}_{ij}{}^{(k)}\right)(r_1)_{ij}\right], \\ \left[\underline{\underline{a}}^{(k)}{}_{ij} + \left(\overset{=}{a}{}^{(k)}{}_{ij} - \underline{\underline{a}}_{ij}{}^{(k)}\right)(r_1)_{ij}\right]\end{matrix}\right\}, \quad (51)$$

$$\left(\overset{=}{a}{}^{(k+1)}\right)_{ij} =$$

$$= \min\left\{\begin{matrix}\left[\underline{\underline{a}}^{(k)}{}_{ij} + \left(\overset{=}{a}{}^{(k)}{}_{ij} - \underline{\underline{a}}_{ij}{}^{(k)}\right)(r_1)_{ij}\right], \\ \left[\underline{\underline{a}}^{(k)}{}_{ij} + \left(\overset{=}{a}{}^{(k)}{}_{ij} - \underline{\underline{a}}_{ij}{}^{(k)}\right)(r_1)_{ij}\right]\end{matrix}\right\}. \quad .(53)$$

Дальнейшие действия аналогичны ранее описанным вычислениям, использованным при изложении содержания общего шага решения прямой задачи СЛАУ. Все арифметические операции в рамках данной работы выполнены с использованием аксиом нестандартного интервального анализа [11].такой выбор обусловлен тем, что, как показано авторами данного сообщения в работе [16], именно эта система аксиом позволяет получить интервалы наименьшей ширины.

Выводы

1. Поставлена прямая задача решения системы линейных алгебраических уравнений, в которой все входящие в её состав элементы заданы в интервальном виде.

2. Поставлена обратная задача решения системы линейных алгебраических уравнений в которой все входящие в её состав элементы заданы в интервальном виде.

3. Показано, что результат решения обратной задачи можно использовать для синтеза свойств линейных систем при известных воздействиях на систему и её реакциях на эти воздействия.

4. Предложены алгоритмы решения прямой и обратной задачи, объединённые общим методическим приёмом, состоящим в том, что решение прямой и обратной задачи сводится к решению многокритериальной задачи оптимизации. Для её решения использован поисковый метод, основанный на выборе наилучшего решения с использованием почти равномерных последовательностей.

Список литературы

1. Дарков А.В. Строительная механика / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.

2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи./ Л.А. Бессонов. – М.: Высш. шк., 1996. – 626 с.

3. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First edition. – ISO, Switzerland, 1993.

4. ДСТУ – Н РМГ 43:2006 Метрологія. Застосування «Руководства по выражению неопределенности измерений» (РМГ 43:2001).

5. Поджаренко В.О. Опрацювання результатів вимірювань на основі концепції невизначеності. Навч. пос. / В.О. Поджаренко, О.М. Васілевський, В.Ю. Кучерук. – Вінниця : ВНТУ, 2008. – 158 с.

6. Захаров И.П. Теория неопределённости в измерениях. / И.П. Захаров, В.Д. Кукуш. – Х., Консум, 2002 – 256 с.

7. Крылов А.Н. Лекции о приближенных вычислениях / А.Н. Крылов. – Л. : Изд. АН СССР, 1993. – 541 с.

8. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 259 с.

9. Алтунин А.Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях/А.Е. Алтунин, М.В. Семухин. – Тюмень: Изд. ТГУ, 2000. – 352 с.

10. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ / С.П. Шарый. – Н-ск . XYZ, 2010. – 601 с.

11. Жуковская О.А. Исследование нестандартных интервальных арифметических операций / О.А. Жуковская // Системные исследования и информационные технологии. – 2005. – № 2. – С. 106 – 116.

12. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 287 с.

13. Ольховой А.Ф. Обратные некорректные задачи. Введение в проблематику / А.Ф. Ольховой. – Таганрог : Технологический институт ЮФУ ГСП 17А, 2009. – 131 с.

14. Соболь И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И.М. Соболь, Р.Б. Статников. – М.: Дрофа, 2006. – 175 с.

15. Раскин Л.Г. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения / Л.Г. Раскин, О.В. Серая. – Х.: Парус, 2008. – 352 с.

16. Дубницький В.Ю. Порівняльний аналіз результатів планування нормативів банківської безпеки засобами класичної та нестандартної арифметики / В.Ю. Дубницький, А.М. Кобилін // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2014. – № 5 (69). – С. 29 – 33.

Поступила в редколлегию 3.07.2014

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. М.В. Новожилова, Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРЯМОЇ І ЗВОРОТНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ІНТЕРВАЛЬНО ЗАДАНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В.Ю. Дубницький, О.М. Кобилін

Визначені пряма і зворотна задачі розв'язання системи лінійних рівнянь, всі складові якої задано в інтервальному вигляді. Показано, що результат розв'язання зворотної задачі можна використовувати для синтезу властивостей лінійних систем при заздалегідь заданих впливах та відомих реакціях системи на ці впливи. Запропоновано алгоритми розв'язання прямої і зворотної задач, об'єднані загальним методичним прийомом, що полягає в тому, що рішення прямої і зворотної задач зводиться до рішення багатокритеріальної задачі оптимізації. Для її вирішення використаний пошуковий метод, заснований на виборі найкращого рішення з використанням майже рівномірних послідовностей.

***Ключові слова:** системи лінійних рівнянь алгебри, пряма задача вирішення системи лінійних рівнянь алгебри, зворотна задача вирішення системи лінійних рівнянь алгебри, інтервальний аналіз, майже рівномірно розподілені послідовності, нестандартний інтервальний аналіз, невизначеність вимірювань.*

SOLUTION OF DIRECT AND INVERSE PROBLEM FOR A SYSTEM OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS WITH INTERVAL-GIVEN CHARACTERISTICS

V.Yu. Dubnitskiy, A.M. Kobylin

Direct and inverse problem was set for a system of linear algebraic equations wherein all forming elements were given in interval form. It was shown that the result of inverse problem solution might be used for synthesis of linear systems under known effects on them and their responses to such effects. Algorithms were proposed for direct and inverse problem solution united by a common methodological technique which consists in coming of direct and inverse solution to solution of a multi-criterion optimization problem. For its solution we used a search method based on choice of the best solution 0n the basis of a method connected with use of almost uniform sequences.

***Keywords:** systems of linear algebraic equations, direct problem solution of a system of linear algebraic equations, inverse problem solution of a system of linear algebraic equations, interval analysis, almost uniformly distributed sequences, non-standard interval analysis, measurement indeterminacy.*