УДК 519.677

Е.В. Азаренко[1], Ю.Ю. Гончаренко[1], М.М. Дивизинюк[2]

[1] *Севастопольский национальный университет ядерной энергии и промышленности, Севастополь*
[2] *Институт геохимии окружающей среды НАН Украины, Киев*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЪЕМА РЕЧЕВОЙ ИНФОРМАЦИИ

Показано, что эффективность съема речевой информации в особых условиях, определяемых конкретными физико-географическими факторами, в состав которых входят вертикальное распределение скорости звука, рельеф местности, характер подстилающей поверхности и др., описывается интегральными уравнениями Радона.

Ключевые слова: *математическая модель, акустический сигнал, речевая информация, звук.*

Введение

Одна из актуальных проблем современности в области национальной безопасности связана с необходимостью съема речевой (акустической) информации. Строго говоря, эта проблема разделяется на множество задач, начиная от регистрации факта появления конкретного акустического сигнала (звука, хлопка, скрежета и т.п.) до распознавания многофункциональных образов (распознания человеческой речи, определения принадлежности автора речи и др.) [1]. Формально эти задачи решаются и описываются в работах Наттера и Льюиса [2, 3]. Особые условия зависят от помеховой обстановки, определяемой конкретными физико-географическими факторами, которые способны не только заглушать акустические сигналы, но и искажать их. Компьютерное восстановление речи возможно в том случае, когда этот процесс описан математически, тогда на основе полученных аналитических зависимостей возможна алгоритмизация исследуемого процесса, а затем его реализация с использованием алгоритмических языков программирования.

Постановка цели и задач научного исследования

Целью данной работы является математическое описание процесса съема речевой информации в особых условиях. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие научные задачи: первоначально сформулировать условия решения задачи, а затем разработать математическую модель процесса съема речевой информации.

Постановка условий решения задачи

Условия реальной физико-географической обстановки, безусловно, отличаются от идеальных. Их составляют факторы среды, факторы подстилающей поверхности и факторы, определяемые застройкой и наличием инженерно-технических сооружений. При проведении научных исследований учесть все эти факторы не представляется возможным. В связи с этим задача съема речевой информации относится к классу некорректно поставленных задач, одним из инструментов описания и исследования которых является сингулярное разложение преобразования Радона как оператора, действующего из $L_2(\Omega^n)$ в $L_2(Z,\omega^{1-n})$, где $\omega(s)=(1-s^2)^{\frac{1}{2}}$.

Покажем, что для $\theta_1,\theta_2\in S^{n-1}$ выполняется равенство:

$$R_{\theta_1}R^{\#}_{\theta_2}g(s)=$$
$$=\left|\Omega^{n-2}\right|\int\limits_{|t|\le\sqrt{1-s^2}} g\left(t\sin\phi+s\cos\phi\right)\omega^{n-2}\sqrt{s^2+t^2}dt, \quad (1)$$

где $\phi\in[0,\pi]$ – угол между θ_1 и θ_2, т.е. $\cos\phi=\theta_1\cdot\theta_2$.

Если $\theta_1=(0,...,0,1)^T$ и $\theta_2=(\theta',\cos\phi)^T$, где $|\theta'|=\sin\phi$, то для $x=(x',x_n)^T$

$$R^{\#}_{\theta_2}g(x)=g(x\cdot\theta_2)=g(x'\cdot\theta'+x_n\cos\phi);$$

$$R_{\theta_1}R^{\#}_{\theta_2}g(s)=\int\limits_{|x'|\le\sqrt{1-s^2}}R^{\#}_{\theta_2}g(x',s)dx'=$$
$$=\int\limits_{|x'|\le\sqrt{1-s^2}}g(x'\cdot\theta'+s\cos\phi)dx'.$$

Т.к. мера множества $\left\{x'\in R^{n-1}:|x'|\le\sqrt{1-s^2},x'\cdot\theta'=t|\theta'|\right\}$ при $|t|\le\sqrt{1-s^2}$ и $n>2$ равна

$$\left|\Omega^{n-2}\right|(1-s^2-t^2)^{\frac{n-2}{2}}, \quad (2)$$

то по теореме Фубини

$$R_{\theta_1}R^{\#}_{\theta_2}g(s)=$$

$$=\int\limits_{|t|\le\sqrt{1-s^2}} g(t|\theta'|+s\cos\phi)\left|\Omega^{n-2}\right|(1-s^2-t^2)^{\frac{n-2}{2}}dt. \quad (3)$$

Выражение (3) имеет место и для $n=2$, так как $\left|\Omega^0\right|=1$. При условии $|\theta'|=\sin\phi$ равенство (1) также справедливо.

С учетом выражения (1) для полиномов, ортогональных на $[-1,+1]$ с весовой функцией ω^{n-1}, нормализованных так, что выполняется условие $C_m^{\frac{n}{2}}(1)=1$, т.е. для полиномов Гегенбауэра $C_m^{\frac{n}{2}}$ получим функцию $C_m^{\frac{n}{2}}(t\sin\phi+s\cos\phi)$ как линейную комбинацию функций вида $t^j s^{k-j}$, $0\le j\le k\le m$. Сделаем замену переменной, приняв $t=(1-s^2)^{\frac{1}{2}}$, получим для каждой из рассматриваемых функций:

$$\int\limits_{|t|\le\sqrt{1-s^2}} t^j s^{k-j}(1-s^2-t^2)^{\frac{n-2}{2}}dt=$$
$$=s^{k-j}(1-s^2)^{\frac{j}{2}+\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2}}\int\limits_{-1}^{1}u^j(1-u^2)^{\frac{n-2}{2}}du. \quad (4)$$

Выражение (4) равно 0 при j – нечетных, а при четных равно $\omega^{n-1}(s)P_k(s)$, где P_k – полином степени k. Откуда

$$R_{\theta_1}R^{\#}_{\theta_2}C_m^{\frac{n}{2}}=\omega^{n-1}P_m, \quad (5)$$

где P_m – полином степени m. Так как полиномы Гегенбауэра ортогональны, то

$$(R_{\theta_1}R^{\#}_{\theta_2}C_m^{\frac{n}{2}},C_l^{\frac{n}{2}})_{L_2(-1,+1)}=\int\limits_{-1}^{1}\omega^{n-1}P_m C_l^{\frac{n}{2}}ds=0 \quad (6)$$

при $l>m$. Из (6) следует, что оператор $R_{\theta_1}R^{\#}_{\theta_2}$ симметричен, значит (6) справедливо и при $l<m$. Получили, что полином P_m ортогонален в $L_2([-1,1],\omega^{n-1})$ полиномам $C_l^{\frac{n}{2}}$, $l\ne m$, т.е. P_m совпадает с $C_l^{\frac{n}{2}}$ с точностью до постоянного коэффициента. С учетом вышесказанного соотношение (5) примет вид:

$$R_{\theta_1}R^{\#}_{\theta_2}C_m^{\frac{n}{2}}=\alpha_m(\theta_1\cdot\theta_2)\omega^{n-1}C_m^{\frac{n}{2}}, \quad (7)$$

где $\alpha_m(\theta_1\cdot\theta_2)$ – некоторая постоянная. Найдем ее, переходя к пределу при $s\to 1$. С учетом (1) получим:

$$\alpha_m(t)=c(n)C_m^{\frac{n}{2}}(t),$$

$$c(n)=\left|\Omega^{n-2}\right|\int\limits_{-1}^{1}(1-u^2)^{\frac{n-2}{2}}du=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \quad (8)$$

Как следствие из (8) при условии

$$C_{m,\theta}^{\frac{n}{2}}(x)=C_m^{\frac{n}{2}}(x\cdot\theta)$$

в Ω^n имеет место

$$\left(C_{m,\theta_1}^{\frac{n}{2}},C_{l,\theta_2}^{\frac{n}{2}}\right)_{L_2(\Omega^n)}=\begin{cases}0, & m\ne l,\\ c(m,n)C_m^{\frac{n}{2}}(\theta_1\cdot\theta_2), & m=l,\end{cases}$$

где

$$c(m,n)=\left|\Omega^{n-2}\right|\int\limits_{-1}^{1}\left(1-u^2\right)^{\frac{n-2}{2}}du\int\limits_{-1}^{1}\omega^{n-1}(s)\left(C_m^{\frac{n}{2}}(s)\right)^2ds=$$
$$=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(m+\frac{n}{2}\right)(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+n-1)}.$$

Здесь постоянная $c(m,n)$ находится по формулам для Г-функции.

Для определения сингулярного разложения оператора R используем оператор RR^*, где под сопряжением понимают скалярное произведение в пространстве $L_2\left(Z,\omega^{1-n}\right)$, при этом получим $R_\theta^*h=R_\theta^{\#}\left(\omega^{1-n}h\right)$, $R^*g=\int\limits_{S^{n-1}}R_\theta^*g\,d\theta$, значит

$$RR^*g(\omega,s)=\int\limits_{S^{n-1}}R_\omega R_\theta^*g(s)d\theta.$$

Для $u_m=\omega^{n-1}C_m^{\frac{n}{2}}$ равенство (7) примет вид $R_{\theta_1}R^*_{\theta_2}u_m=\alpha_m(\theta_1\cdot\theta_2)u_m$. Таким образом, функция u_m является собственной функцией $R_{\theta_1}R^*_{\theta_2}$, соответствующей собственному значению $\alpha_m(\theta_1\cdot\theta_2)$. Значит, для некоторой функции h на S^{n-1} имеет место

$$RR^*\left(hu_m\right)(\omega,s)=$$
$$=\int\limits_{S^{n-1}}\left(R_\omega R_\theta^*u_m\right)(s)h(\theta)d\theta=$$
$$=\int\limits_{S^{n-1}}\alpha_m(\omega\cdot\theta)h(\theta)d\theta u_m(s)=A_m h(\omega)u_m(s),$$

где A_m – интегральный оператор вида $A_m h(\omega)=\int\limits_{S^{n-1}}\alpha_m(\omega\cdot\theta)h(\theta)d\theta$.

Из теоремы Функа-Хекке для рассматриваемой сферической гармоники $h = Y_l$ степени l следует:

$$A_m Y_l(\omega) = \int_{S^{n-1}} \alpha_m(\omega \cdot \theta) Y_l(\theta) d\theta = \sigma^2{}_{ml} Y_l(\theta); \quad (9)$$

$$\sigma^2{}_{ml} = \left|S^{n-2}\right| \int_{-1}^{1} \alpha_m(t) C_l^{\frac{n-2}{2}}(t)\left(1-t^2\right)^{\frac{n-3}{2}} dt. \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что гармоники $h = Y_l$ принадлежат собственному подпространству A_m, соответствующему собственному значению $\sigma^2{}_{ml}$, следовательно, в $L_2\left(Z, \omega^{1-n}\right)$ самосопряженный оператор RR^* имеет собственные функции $Y_l u_m$, соответствующие собственным значениям $\sigma^2{}_{ml}$, образующие базис, значит, получены все собственные функции и собственные значения оператора RR^*.

Математическая модель съема речевой информации

В силу ортогональности полиномов Гегенбауэра $\sigma_{ml} = 0$ при $l > m$, $\alpha_{ml} = 0$ при нечетных $l + m$, т.к. полином $C_l^{\frac{n-2}{2}}$ четный при четных l и нечетный при нечетных l. С учетом выражения (8) для α_{ml} из (10) получим для положительных собственных значений:

$$\sigma^2{}_{ml} = \left|S^{n-2}\right| \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} C_m^{\frac{n}{2}}(t) C_l^{\frac{n-2}{2}}(t)\left(1-t^2\right)^{\frac{n-3}{2}} dt,$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots, \quad l = m, m-2, \ldots$.

Для нормированных собственных функций оператора RR^* вида

$$g_{ml} = c(m) Y_l u_m, \quad (11)$$

где

$$c(m) = \left(\int_{-1}^{1} \omega^{1-n} u_m^2 ds\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \int_{S^{n-1}} Y_l^2(\theta) d\theta = 1. \quad (12)$$

Найдем функции

$$f_{ml}(x) = \frac{1}{\sigma_{ml}} R^* g_{ml}(x) = \frac{c(m)}{\sigma_{ml}} \int_{S^{n-1}} Y_l(\theta) C_n^{\frac{n}{2}}(x \cdot \theta) d\theta.$$

С другой стороны, из теоремы Функа-Хекке следует, что $f_{ml}(x) = Q_{ml}(|x|) Y_l \frac{x}{|x|}$, где

$$Q_{ml}(r) = \frac{c(m)}{\sigma_{ml}} \left|S^{n-2}\right| \int_{-1}^{1} C_m^{\frac{n}{2}}(rt) C_l^{\frac{n-2}{2}}(t)\left(1-t^2\right)^{\frac{n-3}{2}} dt.$$

Если представить $C_m^{\frac{n}{2}}$ в виде разложения $C_m^{\frac{n}{2}}(t) = a_m t^m + a_{m-2} t^{m-2} + \ldots + a_l t^l + \ldots$, то из ортогональности полиномов Гегенбауэра получим:

$$Q_{ml}(r) = \frac{c(m)}{\sigma_{ml}} \left|S^{n-2}\right| \int_{-1}^{1} \left(a_m r^m t^m + a_{m-2} r^{m-2} t^{m-2} + \ldots + a_l r^l t^l\right) \times C_l^{\frac{n-2}{2}}(t)\left(1-t^2\right)^{\frac{n-3}{2}} dt = r^l q_{ml}\left(r^2\right),$$

где q_{ml} – полином степени $\frac{m-1}{2}$. Функции $f_{ml}(x)$ ортогональны в $L_2\left(\Omega^n\right)$, т.к. функции g_{ml} ортогональны в $L_2\left(Z, \omega^{1-n}\right)$, тогда из условия

$$\left(f_{ml}, f_{kl}\right)_{L_2\left(\Omega^n\right)} = \int_0^1 r^{n-1} \int_{S^{n-1}} f_{ml}(r\theta) f_{kl}(r\theta) d\theta dr = \int_0^1 r^{2l+n-1} q_{ml}\left(r^2\right) q_{kl}\left(r^2\right) \int_{S^{n-1}} |Y(\theta)|^2 d\theta dr = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{l+\frac{n-2}{2}} q_{ml}(t) q_{kl}(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = k, \\ 0 & \text{при} \quad m \neq k \end{cases}$$

следует

$$q_{ml} = \sqrt{2} P_{\frac{m-1}{2}, l+\frac{n-2}{2}},$$

где $P_{k,l}, \quad k = 0, 1, \ldots$ – полиномы степени k, для которых выполняется условие

$$\int_0^1 t^l P_{k,l}(t) P_{m,l}(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = k, \\ 0 & \text{при} \quad m \neq k. \end{cases}$$

Полиномы $P_{k,l}(t)$ с точностью до нормирования совпадают с полиномами Якоби $G_k\left(1+\frac{n-2}{2}, l+\frac{n-2}{2}, t\right)$, тогда получим

$$f_{ml} = \sqrt{2} P_{\frac{m-1}{2}, l+\frac{n-2}{2}}\left(|x|^2\right)|x|^l Y_l\left(\frac{x}{|x|}\right). \quad (13)$$

С учетом формул (10) – (13) получим сингулярное разложение оператора R в виде:

$$Rf = \sum_{m=0}^{\infty} \bigoplus_{l \le m} \sigma_{ml} \sum_{k=1}^{N(m,l)} \left(f, f_{mlk}\right)_{L_2\left(\Omega^2\right)} g_{mlk},$$

где каждое сингулярное число кратно $N(m,l)$, а функции Y_{lk} при $k = 1,\dots,N(m,l)$ образуют нормированный ортогональный базис сферических гармоник степени l и

$$f_{mlk}(x) = \sqrt{2} P_{\frac{m-1}{2}, l+\frac{n-2}{2}}\left(|x|^2\right)|x|^l Y_{lk}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

$$g_{mlk}(\theta, s) = c(m) Y_{lk}(\theta) u_m(s),$$

а символ $\oplus$ в знаке суммирования означает, что оно ведется по l: $l+m$ – четное. В соответствии с формулой обращения $g = Rf$ получим вид решения

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l \le m}^{\oplus} \frac{1}{\sigma_{ml}} \sum_{k=1}^{N(m,l)} \left(g, g_{mlk}\right)_{L_2\left(Z, \omega^{1-n}\right)} f_{mlk}, \quad (14)$$

где функция f_{mlk} – полином степени m, поэтому выражение (14) представляет собой полиномиальное приближение f. При $n = 2$ сингулярные числа оператора R равны

$$\sigma^2_{ml} = 2\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{m+1} \int_{-1}^{1} \frac{U_m(t) T_l(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt. \quad (15)$$

Так как $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, а $t = \cos\phi$, то выражение (15) примет вид:

$$\sigma^2_{ml} = \frac{4}{m+1} \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+1)\phi}{\sin\phi} \cos l\phi d\phi,$$

тогда с учетом разложения функции

$$\frac{\sin(m+1)\phi}{\sin\phi} = $$

$$= \begin{cases} 2\left(\cos m\phi + \cos(m-2)\phi + \dots + \cos\phi\right) \\ \text{при } m - \text{нечетном}, \\ 2\left(\cos m\phi + \cos(m-2)\phi + \dots + \cos 2\phi\right) + 1 \\ \text{при } m - \text{четном}, \end{cases}$$

получим

$$\sigma^2_{ml} = \frac{8}{m+1} \int_0^{\pi} \cos^2 l\phi d\phi = \frac{4\pi}{m+1} \quad (16)$$

при $0 \le l \le m$ и $(m+1)$ – четных. Из (16) следует, что при $m \to \infty$ сингулярные числа $\sigma_{ml} \to 0$, но скорость убывания малая, т.е. в этом случае у интегрального уравнения Радона некорректность выражена не ярко.

Вывод

Эффективность съема речевой информации, определяемой некорректностью интегрального уравнения Радона, пропорциональна количеству реально известных параметров, характеризующих особые условия решения задачи.

Направление дальнейших исследований: на основе полученных аналитических зависимостей проведение алгоритмизации исследуемого процесса, а затем его реализации с использованием алгоритмических языков программирования

Список литературы

1. *Гринченко В.Т. Волновые задачи акустики / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк, В.Т. Мацыпура. – К.: Интерсервис, 2013. – 572 с.*
2. *Natterer F. Some nonstandard Radon problems / F. Natterer. – Teubuer: Application of Mathematics in Technology, 1984. – 343 p.*
3. *Louis A.K. Analytische Methoden in der Computer Tomographie / A.K. Louis. – Habilitationsschrift: Fachebereich Mathematik der Universitet Munster, 1981. – 220 p.*

Поступила в редколлегию 27.06.2014

Рецензент: член-корр. НАНУ, д-р техн. наук, проф. Г.В. Лисиченко, Институт геохимии окружающей среды НАН Украины, Киев.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗНЯТТЯ МОВНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

О.В. Азаренко, Ю.Ю. Гончаренко, М.М. Дівізінюк

Показано, що ефективність знімання мовної інформації в особливих умовах, що визначаються конкретними фізико-географічними факторами, до складу яких входять: вертикальний розподіл швидкості звуку, рельєф місцевості, характер підстилаючої поверхні та ін., описується інтегральними рівняннями Радона.

***Ключові слова:** математична модель, акустичний сигнал, мовна інформація, звук.*

MATHEMATICAL MODEL OF SPEECH INFORMATION OUTPUT

O.V. Azarenko, Yu.Yu. Goncharenko, M.M. Divizinyuk

It is shown that the efficiency of speech information output in special circumstances determined by the specific physical and geographical factors, which include the vertical sound velocity distribution, terrain, the nature of the underlying surface, and other, is described with the help of Radon integral equations.

***Keywords:** mathematical model, an acoustic signal, speech information, sound.*