

УДК 534.3

Д.Д. Новак, О.В. Коржик, О.М. Петрищев, Ю.В. Губінець

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”, Київ

## ВИЗНАЧЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОЇ НАПРУГИ НА НАВАНТАЖЕННІ ПРИЙОМНОГО СФЕРИЧНОГО ЕЛЕКТРОПРУЖНОГО ПЕРЕТВОРЮВАЧА, ЯКИЙ ЗАПОВНЕНО АКУСТИЧНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ (ПОСТАНОВКА І ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ’ЯЗОК)

На основі електропружної моделі сферичного п'єзокерамічного перетворювача у вигляді тонкої п'єзокерамічної оболонки, яку заповнено акустичним середовищем, розв'язана задача про прийом звукових хвиль для випадку повного електродування активної поверхні перетворювача. Виконано постановку задачі прийому та отримано аналітичний розв'язок для основних фізичних полів з врахуванням зв'язаності системи “робоче середовище – оболонка – внутрішнє середовище”.

**Ключові слова:** прийом звукових хвиль, сферична оболонка, п'єзокерамічний перетворювач, наскрізна задача, метод часткових областей, хвильовий пружний шар.

### Вступ

Застосування в практичній гідроакустиці систем перетворення акустичної та електричної енергії, умови функціонування яких вимагають заповнення їх внутрішніх об'ємів певними акустичними середовищами, тісно пов'язано з необхідністю врахування виникаючих при цьому додаткових інерційно-пружних чинників, що впливають на роботу існуючої вихідної електропружної коливальної системи. В більшості своїй на цей час існуючий “наскрізний підхід” до розв'язку задачі прийому звуку дозволяє дослідити особливості взаємовпливу та зв'язаності акустичних, механічних та електричних полів лише для циліндричних вакуумованих всередині перетворювачів (наприклад, роботи [1 – 3]). В контексті запропонованих в роботі [4] можливих напрямків розвитку хвильових задач доцільним є поширення досліджень щодо наближення умов роботи ідеалізованих моделей гідроакустичних перетворювачів - до реальних, використовуючи перетворювачі як циліндричних так і сферичних типів.

Отже, метою роботи, що пропонується, є постановка і розв'язання стаціонарної наскрізної задачі прийому звуку підводним сферичним п'єзокерамічним перетворювачем, який заповнений акустичним середовищем. Формально задача має бути зведеною до відшукування електричної напруги на навантаженні електродів перетворювача. Для спрощення подальшого розв'язку вдамося до застосування повного електродування зовнішніх і внутрішніх поверхонь сферичного перетворювача. При цьому визначенню підлягають аналітичні співвідношення – як результат розв'язку “наскрізної задачі прийому” звуку сферичним перетворювачем, а також, власне, шлях і спосіб розв'язку.

### Постановка і розв'язок задачі

Розглядається задача про прийом звуку в наскрізній постановці тонкостінним сферичним перет-

ворювачем, який заповнено ідеальним середовищем. Передбачається, що в ідеальній рідині з густиною  $\rho$  і швидкістю звуку  $c$  розташовано коливальну систему у вигляді прийомного поодинокого п'єзокерамічного сферичного перетворювача (рис. 1). Внутрішній простір перетворювача заповнено ідеальним акустичним середовищем з густиною  $\rho_c$  та швидкістю звуку  $c_c$ . Сам перетворювач подано сферичною електропружною радіально поляризованою оболонкою з пезоматеріалу з густиною  $\rho_m$  та швидкістю звуку  $c_m$ , що має радіус  $R_0$  і товщину стінки  $h_0$  (рис. 1).

На зовнішню і внутрішню поверхні перетворювача нанесено суцільні електроди, які повністю їх покривають та є підключеними до довільного електричного навантаження  $Z_n$  ( $Z_H$ ). Електрична напруга  $U_n$  ( $U_{вих}$ ), що виникає на навантаженні  $Z_n$  і є шуканою.

Товщини електродів вважаємо малими та такими, що не впливають на механічні характеристики перетворювача і не вимагають залучення додаткових умов по механічному та електричному полю для крайових ділянок.

На сферичний перетворювач з безкінечності вздовж променя, що визначається в просторі вектором  $\mathbf{n}$  та кутами  $\vartheta_0$ ,  $\varphi_0$  (рис. 1), падає плоска звукова хвиля  $p_0$  амплітуди  $p_0^*$ :

$$p_0 = p_0^* e^{j\omega t}. \quad (1)$$

Математично робота вказаної коливальної системи описується з використанням (дивись джерела [5, 6]):

– рівнянь стану для п'єзокераміки, які лінійно пов'язують між собою компоненти механічних напружень, деформації, електричну напруженість та індукцію;

- рівнянь руху елемента механічної коливальної системи перетворювача;
- співвідношень Коши, що пов'язують компоненти тензору деформацій та вектору переміщення;
- рівнянь вимушеної електростатики.

Сумісний розв'язок вказаних рівнянь дозволяє визначити характеристики перетворювача з врахуванням зв'язаності трьох основних полів – електричного, механічного та акустичного. Розв'язок відбувається за допомогою методу часткових областей [7, 8] з використанням методу Фур'є, а також властивостей повноти і ортогональності приєднаних функцій Лежандра та тригонометричних функцій на інтервалах  $\vartheta \in [0; \pi]$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi]$ . Таким чином, задача зводиться до відшукування невідомих коефіцієнтів розкладень для акустичних, механічних та електричних полів запропонованої коливальної системи “зовнішнє робоче середовище – сферична оболонка – внутрішній об'єм, що заповнений акустичним середовищем – перетворювач”, як системи з розподіленими параметрами.

Введемо такі координатні системи (рис. 1):

- загальну прямокутну систему координат  $O, X_1, X_2, X_3$ , яка розташована так, що вісі  $OX_1$  та  $OX_2$  лежать в площині широтного перетину перетворювача, а вісь  $OX_3$  – в площині його меридіанального перетину;

- сферичну систему координат  $O, r, \varphi, \vartheta$ , центр якої співпадає з центром координат прямокутної системи.

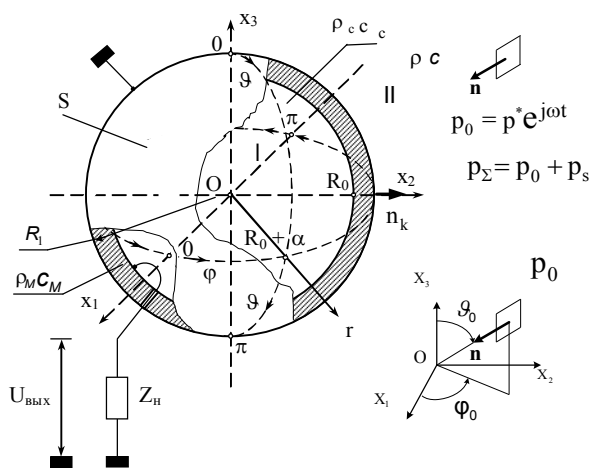


Рис. 1. Сферичний перетворювач-оболонка

Застосуємо метод часткових областей [8]. Для цього розіб'ємо загальну область існування акустичного поля на ряд областей – I, II (рис. 1) так, що внутрішня область (область I,  $0 \leq r \leq R_1 - h_{0s}$ ,  $R_0 = R_1 - h_{0s}$ ;  $\varphi \in [0; 2\pi]$ ,  $\vartheta \in [0; \pm\pi]$ ) відповідає замкненому простору внутрішнього об'єму перетворювача, а область II ( $R_1 \leq r \leq \infty$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi]$ ,  $\vartheta \in [0; \pm\pi]$ ) – зовнішньому простору (робочому середовищу).

### Акустичні поля

Поле в області II у відповідності до класичної постановки задачі прийому [7] представимо суперпозицією виду :

$$p_{II}(r, \varphi, \vartheta) = p_0(r, \varphi, \vartheta) + p_s(r, \varphi, \vartheta), \quad (2)$$

де  $p_s(r, \varphi, \vartheta)$  – поле розсіяної на сфері хвилі.

У відповідності до [7 – 9] та з врахуванням позначення  $j = -i$ , розкладення плоскої хвилі  $p_0(r, \varphi, \vartheta)$  по сферичним функціям матиме вигляд:

$$p_0(r, \varphi, \vartheta) = j\omega\rho \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_0^* \cdot 2j^n \frac{2 - \delta_{0m}}{N_{nm}} i_n(kr) \times \times P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m(\varphi - \varphi_0)), \quad (3)$$

де  $\delta_{0m}$  – символ Кронекера, для якого:

$$\delta_{km} = \delta_{0m} = \begin{cases} 1, m = k = 0 \\ 0, m \neq k \end{cases}; N_{nm} = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

$i_n(kr)$  – сферична функція Бесселя цілого n-го порядку,  $n = 0; 1; 2; 3; \dots$ ;  $P_n^m(\dots)$  – приєднана функція Лежандра першого роду ступеня n та порядку m,  $m = 0; 1; 2; 3; \dots$ .

Зауважимо, що для подальшого застосування доцільним є представлення розкладення (3) в більш деталізованому вигляді :

$$p_0(r, \varphi, \vartheta) = p_0^* \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{1/2}(kr) + p_0^* \times \times \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) j^n \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr) P_n(\cos \vartheta_0) P_n(\cos \vartheta) + \times \times p_0^* \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (2n+1) j^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr) \times \times P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m(\varphi - \varphi_0)), \quad (4)$$

де  $p_0^* = j\omega\rho \cdot a_0^*$  – амплітуда тиску у фронті плоскої

хвилі;  $i_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr)$  – представлення сферичних функцій Бесселя через циліндричні функції Бесселя нецілого порядку.

Розкладення (4) подається у вигляді алгебраїчної суми центрально симетричної сферичної гармоніки (перший доданок), сукупності тессеральних гармонік нульового порядку (або вісесиметричний розв'язок -другий доданок) та тессеральних гармонік вищого порядку (або невісесиметричний розв'язок – третій доданок). Використуємо такий підхід для розсіяного на сфері поля та поля в області I. Отже, розсіяне поле запишемо як

$$p_s(r, \varphi, \vartheta) = j\omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \tilde{C}_{nm} P_n^m(\cos \vartheta) h_n^{(2)}(kr) \times \times \cos(m\varphi), \quad (5)$$

де  $h_n^{(2)}(kr)$  – сферична функція Ханкеля другого ро-

ду  $n$ -го порядку;  $\tilde{C}_{nm}$  – невідомі коефіцієнти розкладення;

$$\begin{aligned} \text{або: } p_s(r, \varphi, \vartheta) = & A_0 \sqrt{\pi / (2kr)} H_{1/2}^{(2)}(kr) + \\ & + \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n H_{n+1/2}^{(2)}(kr) P_n(\cos \vartheta) + \\ & + \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n A_{nm} H_{n+1/2}^{(2)}(kr) P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m\varphi), \end{aligned} \quad (6)$$

$A_{nm} = j\omega\rho\tilde{C}_{nm}$  – невідомі коефіцієнти;  
 $h_n^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+1/2}^{(2)}(kr)$  – представлення

сферичних функцій Ханкеля 2-го роду через циліндричні функції Ханкеля 2-го роду нецілого порядку.

Таким чином, для довільного напрямку падіння плоскої хвилі  $\vartheta_0$ ,  $\varphi_0$  повне поле  $p_{II}(r, \varphi, \vartheta)$ , що визначається виразом (2), матиме вигляд [8, 9]:

$$\begin{aligned} p_{II}(r, \varphi, \vartheta) = & j\omega\rho \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n p_0^* \cdot 2j^n \frac{2 - \delta_{0m}}{N_{nm}} i_n(kr) \times \\ & \times P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m(\varphi - \varphi_0)) + \\ & + \tilde{C}_{nm} h_n^{(2)}(kr) P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m\varphi), \end{aligned} \quad (7)$$

або:

$$\begin{aligned} p_{II}(r, \varphi, \vartheta) = & \left[ p_0^* \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{1/2}(kr) + A_0 \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{1/2}^{(2)}(kr) \right] + \\ & + \left[ p_0^* \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)j^n \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr) P_n(\cos \vartheta_0) P_n(\cos \vartheta) + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n H_{n+1/2}^{(2)}(kr) P_n(\cos \vartheta) \right] + \\ & + \left[ p_0^* \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (2n+1)j^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr) \times \right. \\ & \left. \times P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m(\varphi - \varphi_0)) + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n A_{nm} H_{n+1/2}^{(2)}(kr) P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m\varphi) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

де квадратні дужки визначають згадані вище доданки-розв'язки. При цьому внутрішнє поле (область I) –  $p_I(r, \varphi, \vartheta)$  подається у вигляді:

$$\begin{aligned} p_I(r, \varphi, \vartheta) = & \\ = & j\omega\rho c \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \tilde{B}_{nm} i_n(k_c r) P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m\varphi), \end{aligned} \quad (9)$$

або за аналогією з (3), (4), або (5), (6) – по іншому:

$$\begin{aligned} p_I(r, \varphi, \vartheta) = & B_0 \sqrt{\pi / (2kr)} J_{1/2}(k_c r) + \sqrt{\pi / (2kr)} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_{n+1/2}(k_c r) P_n(\cos \vartheta) + \sqrt{\pi / (2kr)} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n B_{nm} J_{n+1/2}(k_c r) P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m\varphi), \end{aligned} \quad (10)$$

де  $B_{nm} = j\omega\rho c \tilde{B}_{nm}$  – невідомі коефіцієнти розкладення;  $k_c = \omega / c_c$  – хвильове число для внутрішнього об'єму.

### Акусто-механічні граничні умови

Розглянемо граничні умови на поверхнях коливної системи.

Вважаємо, що на зовнішній поверхні перетворювача (тонкої п'єзокерамічної оболонки), що межує з робочим середовищем, мають виконуватися силові (3-й закон Ньютона) і кінематичні умови спряження областей I та II, які складають наступну систему функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} p_I = p_{II} = \sigma_{rr}; \\ r = R_1, r = R_0; \varphi \in [0; 2\pi], \vartheta \in [0; \pi]; \\ v_{rI} = v_{rII}; \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} v_{rI}|_{r=R_0} = v_{rII}|_{r=R_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{j\rho c c_c} \frac{\partial p_I}{\partial(k_c r)} \Big|_{r=R_0} = \frac{1}{j\rho c} \frac{\partial p_{II}}{\partial(kr)} \Big|_{r=R_1}; \end{aligned} \quad (12)$$

$v_{rI}, v_{rII}$  – радіальні складові коливальних швидкостей точок внутрішньої та зовнішньої поверхонь оболонки, що вважаються рівними;

$\sigma_{rr} = \sigma_{kj}$  – радіальна складова тензору результуючих механічних напружень, що виникають в п'єзоматеріалі оболонки під час її деформації;

$$\begin{aligned} v_{rII}|_{r=R_1} = v_{r0}|_{r=R_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{j\rho c} \frac{\partial p_{II}}{\partial(kr)} \Big|_{r=R_1} = v_{r0}|_{r=R_1}; \end{aligned} \quad (13)$$

$v_{r0}$  – радіальні складові коливальних швидкостей часток середовища ( $v_{rII}|_{r=R_1} = v_{r0}|_{r=R_1}$ ).

До того ж, в розвиток умови, що визначається першим рівнянням системи функціональних рівнянь (11), за умов контакту п'єзокерамічної оболонки з рідиною малої динамічної в'язкості, доречним є запис третього закону Ньютона к вигляді такої рівності:

$$n_k (\sigma_{kj} - \delta_{kj} \Delta p) = 0, \forall x_k \in S, \quad (14)$$

де  $n_k$  –  $k$ -й компонент вектора зовнішньої нормалі до поверхні перетворювача  $S$  (рис. 1);  $\delta_{kj}$  – символ Кронекера для індексів  $k, j$ ;  $\Delta p = p_I(r, \varphi, \vartheta) - p_{II}(r, \varphi, \vartheta)$  – збитковий тиск, який приведено до поверхні оболонки  $r = R_1$  або  $r = R_0$ ;  $x_k \in S$  – умова належності просторової координати - середовищу оболонки.

Залучаючи до умов спряження переміщення  $u_r, u_\varphi, u_\vartheta$  можна записати:

$$v_{rII}|_{r=R_1} = v_r|_{r=R_1} = j\omega u_r, r \in [R_0, R_1], \quad (15)$$

де  $v_r$  – радіальна складова коливної швидкості

матеріальних часток поверхні оболонки;  $u_r$  – радіальна складова переміщень матеріальних часток поверхні оболонки.

### Коливання оболонки

Під впливом збиткового тиску, який представлено умовою (14), оболонка деформується, що визначається певними переміщеннями матеріальних точок оболонки та виникненням за законом Гука відповідних механічних напружень. Відзначимо на прикладі, скажімо, деформацій, що можливим є представлення виду:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\lambda\beta}(\varphi, \vartheta) = & \varepsilon_{\lambda\beta}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{\lambda\beta}^n P_n(\cos\vartheta) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \varepsilon_{\lambda\beta}^{nm} P_n^m(\cos\vartheta) \cos(m\varphi), \end{aligned} \quad (16)$$

що представляє алгебраїчну суму центрально симетричних, вісесиметричних та невісесиметричних розв'язків задачі.

При цьому для будь якої характеристики розглянутих полів  $X(r, \varphi, \vartheta)$  у відповідності до залучених сферичних координат справедливим є представлення відповідного розв'язку як:

$$\begin{aligned} X(r, \varphi, \vartheta) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n X_r^{nm}(r) P_n^m(\cos\vartheta) \cos m\varphi = \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n X_r^{nm}(r) f_n^m(\varphi, \vartheta), \quad (17) \\ f_n^m(\varphi, \vartheta) = & P_n^m(\cos\vartheta) \cos m\varphi. \end{aligned}$$

Розуміючи це, рівняння коливань оболонки вивчатимемо, виходячи з загальних умов руху, що наведені в роботах [1, 5, 6]. Для цього:

– застосуємо вирази для розрахунку компонентів тензору результуючих механічних напружень

$$\sigma_{rr} = c_{11}^E \varepsilon_{rr} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{\vartheta\vartheta} - e_{11} E_r, \quad (18)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = c_{12}^E \varepsilon_{rr} + c_{22}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{\vartheta\vartheta} - e_{12} E_r, \quad (19)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = c_{12}^E \varepsilon_{rr} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{22}^E \varepsilon_{\vartheta\vartheta} - e_{12} E_r, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\vartheta} = & 2c_{44}^E \varepsilon_{\varphi\vartheta}, \\ \sigma_{r\vartheta} = & 2c_{55}^E \varepsilon_{r\vartheta} - e_{26} E_{\vartheta}, \\ \sigma_{r\varphi} = & 2c_{55}^E \varepsilon_{r\varphi} - e_{26} E_{\varphi}. \end{aligned} \quad (21)$$

де  $c_{11}^E; c_{12}^E; c_{22}^E; c_{44}^E; c_{55}^E$  – компоненти тензору модулей пружності (радіальна вісь сфери співпадає з віссю  $OX_1$ );  $\sigma_{\varphi\varphi}; \sigma_{\vartheta\vartheta}; \sigma_{\varphi\vartheta}; \sigma_{r\varphi}; \sigma_{r\vartheta}$  – компоненти тензору результуючих механічних напружень;  $e_{11}; e_{12}; e_{26}$  – пьезомодулі;  $\varepsilon_{rr}; \varepsilon_{\varphi\varphi}; \varepsilon_{\vartheta\vartheta}; \varepsilon_{r\varphi}; \varepsilon_{r\vartheta}; \varepsilon_{\varphi\vartheta}$  – компоненти тензору деформацій;  $E_r; E_{\varphi}; E_{\vartheta}$  – компоненти вектору напруженості електричного поля в п'єзокераміці.

Визначимо рівняння стану для компонентів вектору електричної індукції за формулою

$$D_m = e_{mij} \varepsilon_{ij} + \chi_{mn}^E E_n, \quad (22)$$

де  $D_m$  –  $m$ -компонентний вектор електричної індукції, який визначається алгебраїчною сумою “електричної поляризації”  $D_m^d = e_{mij} \varepsilon_{ij}$ , (що обумовлено пружними механічними деформаціями  $\varepsilon_{ij}$  – тобто, це є динамічна складова) та “кулонівської” складової  $D_m^s = \chi_{mn}^E E_n$ , яка обумовлена попередньою поляризацією кераміки (це є статична складова);  $\chi_{mn}^E$  – компоненти тензору діелектричної проникності.

Далі, спираючись на [6] та реалізуючи умову задовільнення коливань перетворювача другому закону Ньютона в диференціальній формі, запишемо рівняння руху сфери відносно механічних напружень  $\sigma_{kj}$  та зміщень матеріальних часток оболонки  $u_r, u_{\varphi}, u_{\vartheta}$ :

$$\frac{1}{R_0} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\vartheta\vartheta}) + \rho_M \omega^2 u_r = 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_0 \sin \vartheta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial \sigma_{\varphi\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{2\sigma_{\varphi\vartheta}}{R_0} \operatorname{ctg} \vartheta + \\ + \rho_M \omega^2 u_{\varphi} = 0; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_0 \sin \vartheta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\vartheta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{R_0} (\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \times \\ \times \operatorname{ctg} \vartheta + \rho_M \omega^2 u_{\vartheta} = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

де  $u_{\varphi}, u_{\vartheta}$  – кутові компоненти вектору зміщень матеріальних часток деформівної сферичної оболонки.

Виходячи з рівнянь п'єзоэффекту (18) – (21), які доповнені копонентами вектору  $D_m$  ( $D_r, D_{\varphi}, D_{\vartheta}$ ) у вигляді:

$$D_r = e_{11} \varepsilon_{rr} + e_{12} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}) + \chi_{11}^E E_r, \quad (26)$$

$$D_{\varphi} = 2e_{26} \varepsilon_{r\varphi} + \chi_{22}^E E_{\varphi}, \quad (27)$$

$$D_{\vartheta} = 2e_{26} \varepsilon_{r\vartheta} + \chi_{22}^E E_{\vartheta}, \quad (28)$$

враховуючи повне електродування поверхонь та відповідну рівність  $D_{\varphi} = D_{\vartheta} = 0$ , а також співвідношення Коши для зміщень і деформацій [5, 6]:

$$u_{\varphi} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}, \quad u_{\vartheta} = \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta}, \quad (29)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R_0} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{u_{\vartheta}}{R_0} \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{u_r}{R_0}, \quad (30)$$

$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{R_0} \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{R_0}, \quad (31)$$

підставляючи (29) – (31) в (18) – (21), (26) – (28) і далі – в рівняння руху (23) – (25), можна побудувати систему коливань тонкої п'єзокерамічної сферичної радіально поляризованої оболонки.

Крім того, знаючи про рівність тиску  $p_{II} = p_{II}(r, \varphi, \vartheta) = \sigma_{rr}$  при  $r = R_1$ , та поширюючи умову (11) на результуючий тиск  $\Delta p$ , для компоненти тензору деформацій  $\varepsilon_{rr}$  можна записати:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\Delta p}{c_{11}^E} - \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}) + \frac{e_{11}}{c_{11}^E} E_r, \quad (32)$$

$$\text{де } \Delta p = p_{II}(R_1, \varphi, \vartheta) - p_I(R_0, \varphi, \vartheta) = p_0(R_1, \varphi, \vartheta) + p_s(R_1, \varphi, \vartheta) - p_I(R_0, \varphi, \vartheta). \quad (33)$$

Підставляючи вираз (32) в рівняння (19), (20) також маємо:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = c_{22}^* \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^* \varepsilon_{\vartheta\vartheta} - e_{12}^* E_r + \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E} \Delta p, \quad (34)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = c_{12}^* \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{22}^* \varepsilon_{\vartheta\vartheta} - e_{12}^* E_r + \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E} \Delta p, \quad (35)$$

де  $c_{12}^* = c_{12}^E (1 - c_{12}^E / c_{11}^E)$ ,  $c_{22}^* = c_{22}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{11}^E$  - ефективні модулі пружності деформівної оболонки;  $e_{12}^* = e_{12} - e_{11} c_{12}^E / c_{11}^E$  - п'єзоелектричний модуль, який відповідає існуючому в сферичній оболонці напружено-деформівному стану.

Після проведення ряду пертворень рівняння руху (23) відносно  $u_r$  з використанням (34), (35), а також з врахуванням співвідношень Коши (29) - (31), отримаємо відносно радіальної компоненти зміщень  $u_r$  рівняння:

$$\frac{c_{12}^{**}}{R_0^2} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \frac{c_{12}^{**}}{R_0^2} \text{ctg} \vartheta \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{c_{12}^{**}}{R_0^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \vartheta^2} + \left[ \frac{2c_{12}^{**}}{R_0^2} + \rho_M \omega^2 \right] u_r + \frac{c_{11}^{**}}{R_0} \Delta p - \frac{e_{11}^{**}}{R_0} E_r = 0, \quad (36)$$

$$\text{де } c_{11}^{**} = \frac{2(c_{12}^E - c_{22}^E)}{c_{11}^E}, \quad (37)$$

$$c_{12}^{**} = -2 \left( 1 - \frac{(c_{12}^E)^2}{c_{11}^E} \right) + (c_{12}^E - c_{22}^E), \quad (38)$$

$$e_{11}^{**} = 2(e_{11} - e_{12}). \quad (39)$$

Проведемо ряд пертворень, переписавши рівняння (36) як

$$\frac{c_{12}^{**}}{R_0^2} \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial \vartheta^2} + \text{ctg} \vartheta \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + 2u_r \right] + \left[ \rho_M \omega^2 \right] u_r + \frac{c_{11}^{**}}{R_0} \Delta p - \frac{e_{11}^{**}}{R_0} E_r = 0. \quad (40)$$

Вважатимемо, що компоненту  $u_r$  можна представити рядом:  $u_r = u_r(r, \varphi, \vartheta) =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{m=0}^v u_r^{nm}(r) P_v^m(\cos \vartheta) \cos(m\varphi) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n u_r^{nm} f_n^m(\varphi, \vartheta), r = R_1, \end{aligned} \quad (41)$$

де  $v = 0; 1; 2; \dots$ ;  $u_r^{nm}$  - невідомий коефіцієнт розкладення.

Далі доповнюємо вираз (40) сумою  $v(v+1) - v(v-1)$ , беремо похідну по  $\varphi$  та виносимо за дужки тригонометричний множник  $\cos(m\varphi)$ . При цьому отримуємо рівняння для приєднаних функцій Лежандра, яке відповідає ситуації виключення з розв'язку особливих точок (тобто, записане для цілих значень  $v$ ):

$$\begin{aligned} &\frac{c_{12}^{**}}{R_0^2} \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial \vartheta^2} + \text{ctg} \vartheta \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \left( v(v+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) u_r \right] + \\ &+ \left[ \frac{c_{12}^{**}}{R_0^2} (2 - v(v+1)) + \rho_M \omega^2 \right] u_r + \frac{c_{11}^{**}}{R_0} \Delta p - \frac{e_{11}^{**}}{R_0} E_r = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, в останній формулі перші квадратні дужки можна прирівняти нулю. В результаті рівняння (40) суттєво спрощується до такої форми:

$$\alpha_v u_r + \frac{c_{11}^{**}}{R_0} \Delta p - \frac{e_{11}^{**}}{R_0} E_r = 0, \quad (42)$$

$$\text{де } \alpha_v = \left( c_{12}^{**} / R_0^2 \right) (2 - v(v+1)) + \rho_M \omega^2.$$

Отже, в рівнянні (42) треба визначитися з напруженістю електричного поля  $E_r$ . Для цього розглянемо граничні умови по електричному полю.

### Електричні граничні умови

Вбачаючи малість по товщині самої оболонки ( $h_0 \ll R_0, R_1$ ), вважаємо, що електрична поляризація деформівної п'єзокерамічної оболонки повністю визначатиметься радіальним компонентом вектора електричної індукції  $D_m \rightarrow (D_r)$ . При цьому електричний заряд  $Q$ , який формується на електродованих поверхнях вільними носіями електричного струму в результаті впливу на них поляризаційних зарядів деформівного п'єзокерамічного елемента, з врахуванням [5, 6] запишемо у вигляді:

$$Q = - \int_S D_r dS = - R_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D_r(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (43)$$

де  $D_r(\varphi, \vartheta)$  відповідає рівнянню:

$$D_r = e_{11} \varepsilon_{rr} + e_{12} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}) + \chi_{11}^E E_r, \quad (44)$$

$S$  - площа електроду,  $dS = R_0^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ .

Струм  $I_n$  кола навантаження (тобто, струм через навантаження електроду  $Z_n$ ) представимо як швидкість змінення заряду  $Q$ , що визначатиметься похідною за часом:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\partial Q}{\partial t} = j\omega Q = \\ &= -j\omega \int_S D_r dS = -j\omega R_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D_r(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \end{aligned} \quad (45)$$

$$= -j\omega \int_S D_r dS = -j\omega R_0^2 \cdot I,$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D_r(\varphi, \vartheta) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D_r^{vm}(\varphi, \vartheta) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \quad (46)$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) d\varphi \int_0^\pi D_r^{vm}(\varphi, \vartheta) P_v^m(\cos\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta.$$

Застосовуючи [10] до форми

$$\int_0^\pi P_v^m(\cos\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta = \int_{-1}^1 P_v^{m'}(x) P_v^m(x) dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & m' = 0, v' \neq 0 \\ 2, & m' = 0, v' = 0, \end{cases} \quad (47)$$

де  $x = \cos\vartheta, dx = -\sin\vartheta d\vartheta, v', m' = 0; 1; 2; 3; \dots$   
дістанемо:

$$I = 4\pi D_r^0. \quad (48)$$

Отже, струм визначатиметься за виразом:

$$I_n = -j\omega 4\pi R_0^2 D_r^0, \quad (49)$$

де  $D_r^0$  відповідає центрально симетричній складовій виразу (26) за аналогією до (17):

$$D_r^0 = \epsilon_{11} \epsilon_{rr}^0 + \epsilon_{12} (\epsilon_{\varphi\varphi}^0 + \epsilon_{\vartheta\vartheta}^0) + \chi_{11}^E E_r^0. \quad (50)$$

Застосуємо граничні умови виду [5]:

$$\text{div} D = \text{div} D_r = \text{div} D_r^0 = 0, \quad (51)$$

$$E_r = E_r^0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}, \quad (52)$$

де  $\Psi$  – скалярний електричний потенціал, який надає можливість визначення напруги  $U_n$  на електродах оболонки через відповідну різницю потенціалів.

Значимо, що визначення  $E_r^0$  відповідає умові відсутності вільних зарядів в п'єзокераміці. Таким чином, для вектора  $D_r^0$  з (51), використавши форму запису оператора  $\text{div}$  в сферичних координатах, матимемо:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r^0) = 0, \quad (53)$$

звідки 
$$D_r^0 = \frac{C_1}{r^2}, \quad (54)$$

де  $C_1$  – константа, що підлягає визначенню.

Оже, для знаходження вказаних електричних характеристик необхідно визначити центрально симетричні компоненти розглянутих фізичних полів, а саме:  $\sigma_{\vartheta\vartheta}^0, \sigma_{\varphi\varphi}^0, \epsilon_{rr}^0, \epsilon_{\varphi\varphi}^0, \epsilon_{\vartheta\vartheta}^0, E_r^0, D_r^0, u_r^0, \Delta p^0$ .

Так, у випадку центральної симетрії деформації

$$\epsilon_{\varphi\varphi}^0 = \epsilon_{\vartheta\vartheta}^0 = u_r^0 / R_0.$$

Отже, для компонент тензора результуючих напружень  $\sigma_{\vartheta\vartheta}^0, \sigma_{\varphi\varphi}^0$  маємо:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^0 = \left( c_{12}^* + c_{22}^* \right) \frac{u_r^0}{R_0} - \epsilon_{12}^* E_r^0 + \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E} \Delta p^0, \quad (55)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}^0 = \left( c_{12}^* + c_{22}^* \right) \frac{u_r^0}{R_0} - \epsilon_{12}^* E_r^0 + \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E} \Delta p^0, \quad (56)$$

де

$$\Delta p^0 = \left[ B_0 \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{1/2}(kr) \right] -$$

$$= \left[ p_0^* \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{1/2}(kr) + A_0 \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{1/2}^{(2)}(kr) \right]. \quad (57)$$

Поширюючи умову спряження (11) на збитковий тиск  $\Delta p^0$ :

$$\sigma_{rr}^0 = c_{11}^E \epsilon_{rr}^0 + \frac{2c_{12}^E u_r^0}{R_0} - \epsilon_{11}^E E_r^0 = \Delta p^0 \quad (58)$$

та враховуючи рівність

$$\epsilon_{\varphi\varphi}^0 = \epsilon_{\vartheta\vartheta}^0 = \frac{u_r^0}{R_0}, \quad (59)$$

з (18) для деформації центрально симетричного розв'язку (стиснення-розтягнення) маємо:

$$\epsilon_{rr}^0 = \frac{\Delta p^0}{c_{11}^E} - \frac{2c_{12}^E}{c_{11}^E} \frac{u_r^0}{R_0} + \frac{\epsilon_{11}^E}{c_{11}^E} E_r^0. \quad (60)$$

Підставимо (59), (60) до (50) і для індукції  $D_r^0$  отримаємо

$$D_r^0 = \frac{2\epsilon_{12}^*}{R_0} u_r^0 + \chi_{11}^* E_r^0 + \frac{\epsilon_{11}^E}{c_{11}^E} \Delta p^0, \quad (61)$$

де  $\epsilon_{12}^* = \epsilon_{12} - \epsilon_{11} c_{12}^E / c_{11}^E, \chi_{11}^* = \chi_{11}^E + \epsilon_{11}^2 / c_{11}^E$ .

Використовуємо (61) як ліву частину виразу (54) та дістанемо для компонента напруженості електричного поля  $E_r^0$ :

$$E_r^0 = \frac{C_1}{\chi_{11}^* r^2} + \frac{2\epsilon_{12}^*}{\chi_{11}^* R_0} u_r^0 - \frac{\epsilon_{11}^E}{\chi_{11}^* c_{11}^E} \Delta p^0. \quad (62)$$

Таким чином, кутові компоненти тензору механічних напружень  $\sigma_{\vartheta\vartheta}^0, \sigma_{\varphi\varphi}^0$  (55), (56) з врахуванням визначення (62) можуть бути записані у вигляді:

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}^0 = \sigma_{\varphi\varphi}^0 =$$

$$= \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E} \left( 1 + \frac{\epsilon_{12}^* \epsilon_{11}^E}{\chi_{11}^* c_{12}^E} \right) \Delta p^0 +$$

$$+ \left( c_{12}^* + c_{22}^* + 2 \frac{(\epsilon_{12}^*)^2}{\chi_{11}^*} \right) \frac{u_r^0}{R_0} - \frac{\epsilon_{12}^* C_1}{\chi_{11}^* R_0^2}. \quad (63)$$

Використаємо умову (52) для центрально симетричного розв'язку:

$$E_r^0 = -\frac{\partial \Psi^0}{\partial r}, \quad (64)$$

де  $\Psi^0$  – потенціал центрально симетричного електричного поля.

Далі проінтегруємо праву і ліву частини виразу (64) по радіальній координаті та отримуємо для потенціала  $\Psi^0$ :

$$\Psi^0 = \frac{C_1}{\chi_{11}^* r} + C_2 + \left( \frac{e_{11}}{\chi_{11}^* c_{11}^E} \Delta p^0 - \frac{2e_{12}^*}{\chi_{11}^* R_0} u_r^0 \right) (r - R_0), \quad (65)$$

де  $C_2$  – константа, що підлягає визначенню.

Очевидно, вважаючи потенціал зовнішнього електроду нульовим, різниця потенціалів “зовнішній електрод – внутрішній електрод” становитиме:

$$\Psi^0 \Big|_{r=R_1} - \Psi^0 \Big|_{r=R_0+h_0} = 0; \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \Psi^0 \Big|_{r=R_0} - \Psi^0 \Big|_{r=R_1} &= U_n = \\ &= j\omega Z_n 4\pi r^2 D_r^0 \Big|_{r=R_0} = \\ &= j\omega Z_n 4\pi R_0^2 D_r^0 = j\omega Z_n 4\pi C_1, \end{aligned} \quad (67)$$

де  $U_n = I_n Z_n$ , а  $Z_n = R_n + jX_n$ .

### Результуюча система рівнянь та коефіцієнти розкладень

Таким чином, в результаті загального розв’язання задачі для вказаних граничних умов маємо п’ять невідомих коефіцієнтів:  $u_r^0$ ,  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ .

Натомість, такій кількості невідомих є можливість протиставлення п’яти отриманих вище рівнянь. А саме:

– двох рівнянь, що витікають з силових і кінематичних умов спряження (11), (12) із залученням розкладень (8) і (10);

– двох рівнянь – (66), (67), що з використанням (65) дозволяють знайти коефіцієнти  $C_1$ ,  $C_2$  для відомого  $Z_n$ .

Останнє п’яте рівняння для відшукування коефіцієнту  $u_r^0$  знайдемо, виходячи з (42), записаного для центрально симетричного розв’язку при  $\nu = 0$ , що дасть:

$$\alpha_0 u_r^0 + \frac{c_{11}^{**}}{R_0} \Delta p^0 - \frac{e_{11}}{R_0} E_r^0 = 0, \quad (68)$$

де  $\alpha_0 = \frac{2c_{12}^{**}}{R_0^2} + \rho_M \omega^2$ .

Таким чином, формально отримано систему з п’яти алгебраїчних рівнянь (11), (12), (66), (67), (68),

кількість яких відповідає кількості невідомих коефіцієнтів розкладень та рівнянь для електричного поля, що забезпечує можливість їх однозначного відшукування.

### Висновки

В роботі поставлена та в загальному вигляді аналітично розв’язана задача відшукування вихідної напруги на електричному навантаженні електродів підводного сферичного п’єзокерамічного електропружного перетворювача з повністю електродованою поверхнею.

Отримані вирази враховують фізичні особливості, що виникають за рахунок зв’язаності полів, які беруть участь в процесі перетворення акустичної енергії на електричну.

### Список літератури

1. Дидковський В.С. Радиальные колебания цилиндрической пьезокерамической оболочки / В.С. Дидковський, А.Е. Климов, А.Г. Лейко, О.Н. Петрищев // *Электроника и связь*. – 2009. – № 6(53). – С. 31-40.
2. Петрищев О.Н. Осесимметричные колебания цилиндрической пьезокерамической оболочки конечной высоты / О.Н. Петрищев, А.В. Коржик, Н.Ю. Филиппова // *Электроника и связь*. – 2011. – №6. – С. 33-39.
3. Филиппова Н.Ю. Постановка и решение задачи о приеме звука цилиндрическим электроупругим преобразователем с полностью электродированной поверхностью, размещенным в замкнутом волновом слое / Н.Ю. Филиппова, А.В. Коржик // *Электроника и связь*. – 2012. – № 1. – С. 17-23.
4. Дидковський В.С. Многомодовые системы в задачах звукоподводной связи / В.С. Дидковський, А.В. Коржик // *Системы обработки информации*. – Х.: ХУПС, 2013. – Вып. 7(114). – С. 6-13.
5. Гринченко В.Т. Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга; отв. ред. А.Н. Гузь АН УССР. – К.: Наукова думка, 1989. – Т. 5: *Электроупругость*. – 280 с.
6. Петрищев О.Н. Гармонические колебания пьезокерамических элементов Часть 1. Гармонические колебания пьезоэлектрических элементов в вакууме и метод резонанс-антирезонанса / О.Н. Петрищев. – К.: “АВЕРС”, 2012. – 299 с.
7. Гринченко В.Т. Основы акустики / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк, В.Т. Мацитура. – К.: Наукова думка, 2007. – 640 с.
8. Гринченко В.Т. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк. – К.: *Наук.думка*, 1986. – 240 с.
9. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е.А. Иванов. – Минск: *Наука и техника*, 1968. – 584 с.
10. Абрамовиц М. *Справочник по специальным функциям* / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: *Наука*, 1979. – 832 с.

Надійшла до редколегії 30.06.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. О.Г. Лейко, Державне підприємство “Київський науково-дослідний інститут гідропріладів”, Київ.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕНИЯ НА НАГРУЗКЕ ПРИЕМНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ, ЗАПОЛНЕННОГО АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ (ПОСТАНОВКА И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ)**

Д.Д. Новак, А.В.Коржик, О.Н.Петрицев, Ю.В. Губинец

*На основе электроупругой модели сферического пьезокерамического преобразователя, выполненного в виде тонкой пьезокерамической оболочки, заполненной акустической средой, решена задача о приеме звуковых волн для случая полного электродирования активной поверхности преобразователя. Выполнена постановка задачи и получено общее аналитическое решение для основных физических полей с учетом связанности системы “рабочая среда – оболочка – внутренняя среда”.*

**Ключевые слова:** прием звуковых волн, сферическая оболочка, пьезокерамический преобразователь, сквозная задача, метод частичных областей.

**THE OUTPUT VOLTAGE DETERMINATION ON THE LOAD OF PIEZOELASTIC SPHERICAL TRANSDUCER WITH ACOUSTIC MEDIUM INSIDE (THE THEORETICAL BASIS AND SOLUTION)**

D.D. Novak, O.V. Korzhyk, O.M. Petrishev, J.V. Gubinec

*The problem of sound wave reception is solved for the case of transducer with fully electroded active surface. The solution is obtained on the base of spherical electroelastic model for the piezoelectric transducer in the form of thin shell filled with acoustic medium with the method of partial domains, using the Fourier method, the properties of completeness and orthogonality of the spherical wave functions and matching of the fields on the boundaries of sub-domains. The expansion coefficients for sound, mechanical and electrical fields and the annular layer are found.*

**Keywords:** sound waves, spherical piezoelectric shell, acoustical receiver, transducer, method of partial domains.