

УДК: 621.039: 681.5 : 691.32/34

В.Ю. Дубницкий<sup>1</sup>, В.О. Бутенко<sup>2</sup>, В.Л. Чернявский<sup>3</sup><sup>1</sup> Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ, Харьков<sup>2</sup> Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков<sup>3</sup> Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков

## ОЦЕНКА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦЕМЕНТНОГО БЕТОНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

Предложены структурно-функциональные модели взаимодействия цементного камня с внешней средой. Модели представлены в виде взвешенных орграфов. Для описания функционирования модели во времени составлены системы линейных дифференциальных уравнений. При их составлении использовали метод динамики средних. Определена жёсткость полученной системы. Установлено, что система является нежесткой. Показано, что наибольшее влияние на состояние системы «в целом» оказывает изменение интенсивности протекания деградиционных процессов. Меньшее, но также заметное, влияние на поведение системы оказывает изменение интенсивностей созидательных процессов в средней стадии развития процесса, что служит косвенным подтверждением проявления адапционных свойств цементного бетона в процессе его бытия.

**Ключевые слова:** цементный бетон, адаптация бетона, коррозия бетона, модели коррозии бетона, графы, ориентированные графы, системы линейных дифференциальных уравнений, жесткие системы линейных дифференциальных уравнений, численные методы решения систем линейных дифференциальных уравнений.

### Вступление

Коррозия бетона, то есть разрушение его под действием внешней среды, как предмет научных исследований, всегда была в центре внимания специалистов в области строительных материалов. В 1970 году авторами была предложена структурно-функциональная модель взаимодействия цементного бетона с внешней средой [1]. Итоги многолетних исследований нашли своё отражение в монографиях [2, 3] и последующих публикациях. Основным формальным результатом исследований можно считать получение систем линейных дифференциальных уравнений, моделирующих взаимодействие цементного бетона с внешней средой и её идентификация.

**Получение систем линейных дифференциальных уравнений структурно – функциональных моделей взаимодействия бетона с внешней средой.** Для моделирования использовано представление о структуре цементного камня, основанное на группировке его компонентов в блоки по признаку общности функциональных свойств. Относительное содержание негидратированных частиц вяжущего обозначено как  $V_1$ ; относительное содержание гидратных образований, в том числе модифицированных внешней средой –  $V_2$ ; относительное содержание пустот ( $r \geq 10^{-5}$  м) –  $V_3$ ; относительное содержание продуктов коррозии –  $V_4$ . При построении модели приняты такие допущения:

– в каждом элементарном объёме присутствуют все компоненты  $V_i$ ,  $i=1, 2, \dots, 4$ , расположенные равномерно по всем координатным осям в соотно-

шении, соответствующим «в среднем» соотношению структурных компонентов в реальном материале;

– на всём интервале функционирования модели выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^4 V_i = 1; \quad (1)$$

– все компоненты  $V_i$ ,  $i=1, 2, \dots, 4$ , находящиеся в единичном объёме, то есть в объёме, для которого справедливо условие (1), равнодоступны для взаимодействия с внешней средой и остальными элементами модели;

– связь каждого компонента  $V_i$  с элементом  $V_j$ ,  $j=1, \dots, 4$  непрерывна. Отношения между элементами представлены в виде взвешенного орграфа. Вес дуги  $\alpha_{ij}$  равен количеству элемента  $V_i$  перешедшему в элемент  $V_j$  в единицу времени. По физическому смыслу задачи переходы  $V_1 \rightarrow V_2$ ;  $V_3 \rightarrow V_2$  описывают созидательные процессы, переходы  $V_1 \rightarrow V_3$ ;  $V_2 \rightarrow V_3$ ;  $V_1 \rightarrow V_4$ ;  $V_3 \rightarrow V_4$ ;  $V_2 \rightarrow V_4$ . – процессы деградации. Физическое обоснование такой модели выполнено в работах [2, 3].

Учитывая условие (1), при выводе дифференциальных уравнений модели был использован метод динамики средних [4]. Графы отношений между элементами модели для различных типов процессов, протекающих в бетоне при взаимодействии с внешней средой, показаны на рис. 1, а – 1, г.

При выводе систем дифференциальных уравнений (СДУ) модели принят следующий формализм: для каждой вершины графов составляли уравнение вида:

$$\frac{dV_i}{dt} = -\sum_{j=1}^p \alpha_{ij} V_j + \sum_{j=1}^p \alpha_{ji} V_j, i = 1, 2, \dots, p, \\ j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, p. \quad (2)$$

Для цементного камня, в котором протекают только процессы поздней гидратации, исходная СДУ имеет вид (рис. 1, а):

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = -(\alpha_{12}(t) + \alpha_{13}(t))V_1; \\ \frac{dV_2}{dt} = \alpha_{12}(t)V_1 + \alpha_{32}(t)V_3; \\ \frac{dV_3}{dt} = \alpha_{13}(t)V_1 - \alpha_{32}(t)V_3. \end{cases} \quad (3)$$

СДУ для цементного камня с протекающими в нём процессами гидратации и процессами извлечения структурных компонентов имеет вид (рис. 1, б):

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = -(\alpha_{12}(t) + \alpha_{13}(t))V_1; \\ \frac{dV_2}{dt} = \alpha_{12}(t)V_1 - \alpha_{23}(t)V_3 + \alpha_{32}(t)V_3; \\ \frac{dV_3}{dt} = \alpha_{13}(t)V_1 + \alpha_{23}(t)V_2 - \alpha_{32}(t)V_3. \end{cases} \quad (4)$$

СДУ для цементного камня с протекающими в нём процессами гидратации и процессами накопления продуктов коррозии имеет вид (рис. 1, в):

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = -(\alpha_{12}(t) + \alpha_{13}(t) + \alpha_{14}(t))V_1; \\ \frac{dV_2}{dt} = \alpha_{12}(t)V_1 - \alpha_{24}(t)V_2 + \alpha_{32}(t)V_3; \\ \frac{dV_3}{dt} = \alpha_{13}(t)V_1 - (\alpha_{32}(t) + \alpha_{34}(t))V_3; \\ \frac{dV_4}{dt} = \alpha_{14}(t)V_1 + \alpha_{24}(t)V_2 + \alpha_{34}(t)V_3. \end{cases} \quad (5)$$

СДУ для цементного камня с протекающими в нём процессами гидратации, процессами извлечения структурных компонентов и процессами накопления продуктов коррозии имеет вид (рис. 1, г):

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = -(\alpha_{12}(t) + \alpha_{13}(t) + \alpha_{14}(t))V_1; \\ \frac{dV_2}{dt} = \alpha_{12}(t)V_1 - (\alpha_{23}(t) + \alpha_{24}(t))V_2 + \alpha_{32}(t)V_3; \\ \frac{dV_3}{dt} = \alpha_{13}(t)V_1 + \alpha_{23}(t)V_2 - \\ - (\alpha_{32}(t) + \alpha_{34}(t))V_3 + \alpha_{43}(t)V_4; \\ \frac{dV_4}{dt} = \alpha_{14}(t)V_1 + \alpha_{24}(t)V_2 + \alpha_{34}(t)V_3 - \alpha_{43}V_4. \end{cases} \quad (6)$$

Так как все элементы исследуемой системы связаны условием (1), то для систем (3)...(6) представим элемент

$$V_1 = 1 - V_2 - V_3. \quad (7)$$

Таким образом, СДУ (3) представим в виде (8):

$$\begin{cases} \frac{dV_2}{dt} = \alpha_{12} - \alpha_{12}V_2 - (\alpha_{12} - \alpha_{32})V_3; \\ \frac{dV_3}{dt} = \alpha_{13} - \alpha_{13}V_2 - (\alpha_{13} + \alpha_{32})V_3. \end{cases} \quad (8)$$

Используя условие (1) для выражения  $V_1$  компонента в системах (4) – (6), представляем их соответственно в виде (9) – (11).

$$\begin{cases} \frac{dV_2}{dt} = \alpha_{12} - (\alpha_{12} + \alpha_{23})V_2 - (\alpha_{12} - \alpha_{23})V_3; \\ \frac{dV_3}{dt} = \alpha_{13} - (\alpha_{13} - \alpha_{23})V_2 - (\alpha_{13} + \alpha_{32})V_3. \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{dV_2}{dt} = \alpha_{12} - (\alpha_{12} + \alpha_{24})V_2 - (\alpha_{12} - \alpha_{32})V_3 - \alpha_{12}V_4; \\ \frac{dV_3}{dt} = \alpha_{13} - (\alpha_{13} + \alpha_{24})V_2 - (\alpha_{13} - \alpha_{23})V_3 - \alpha_{13}V_4; \\ \frac{dV_4}{dt} = \alpha_{14} - (\alpha_{14} - \alpha_{24})V_2 - (\alpha_{14} - \alpha_{34})V_3 - \alpha_{14}V_4. \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{dV_2}{dt} = \alpha_{12} - (\alpha_{12} + (\alpha_{23} + \alpha_{24})V_2 - (\alpha_{12} - \alpha_{32})V_3) - \\ - \alpha_{24}V_4; \\ \frac{dV_3}{dt} = \alpha_{13} - (\alpha_{13} - \alpha_{23})V_2 - (\alpha_{13} + (\alpha_{32} + \alpha_{34}))V_3 - \\ - (\alpha_{13} - \alpha_{43})V_4; \\ \frac{dV_4}{dt} = \alpha_{14} - (\alpha_{14} - \alpha_{24})V_2 - (\alpha_{14} - \alpha_{34})V_3 - \\ - (\alpha_{14} + \alpha_{43})V_4. \end{cases} \quad (11)$$

Для получения численного значения коэффициентов  $\alpha_{ij}(t)$ , характеризующих интенсивность структурообразования, использован специально разработанный метод идентификации, учитывающий ограничения вида (2), являющееся неотъемлемой частью метода динамики средних [3]. Результаты идентификации моделей для различных взаимодействий цементного камня со средой представлены на рис. 2, а – 2, г.

**Анализ литературы.** Получение достоверных численных результатов исследования для описанных выше моделей взаимодействия бетона с внешней средой является одним из центральных требований в рамках данной работы. Обеспечение необходимой точности полученных результатов является одной из наиболее важных задач в процессе решения СДУ.

Для достижения данной цели необходимо учитывать в процессе построения, а также решения модели такие особенности как ее размерность и жесткость. Так как отношения между элементами исследуемой структуры графически представлены с помощью орграфа, то увеличение уровня детализации системы приводит к росту размерности ее модели. На практике зачастую встречаются модели, описывающиеся тысячами состояний [5]. Таким образом, чем более сложна моделируемая структура, и чем большее количество взаимосвязей необходимо отобразить – тем выше размерность модели.

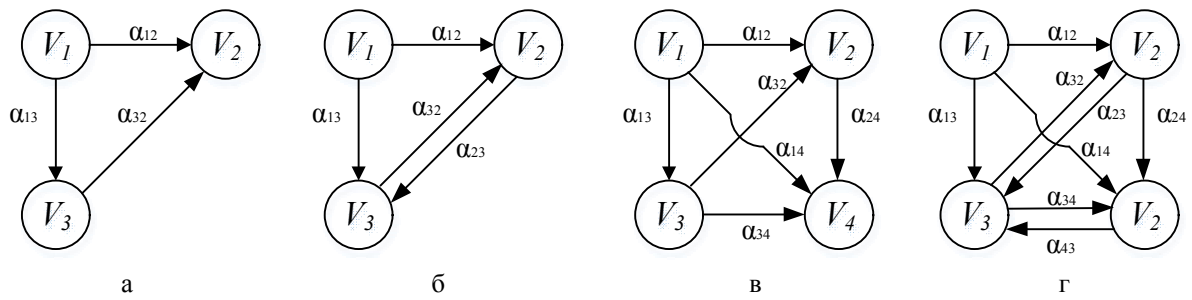


Рис. 1. Графы отношений между элементами модели: а – при отсутствии коррозии в цементном камне; б – при извлечении компонентов цементного камня; в – при накоплении компонентов цементного камня; г – при совместном протекании процессов типа б и в в цементном камне

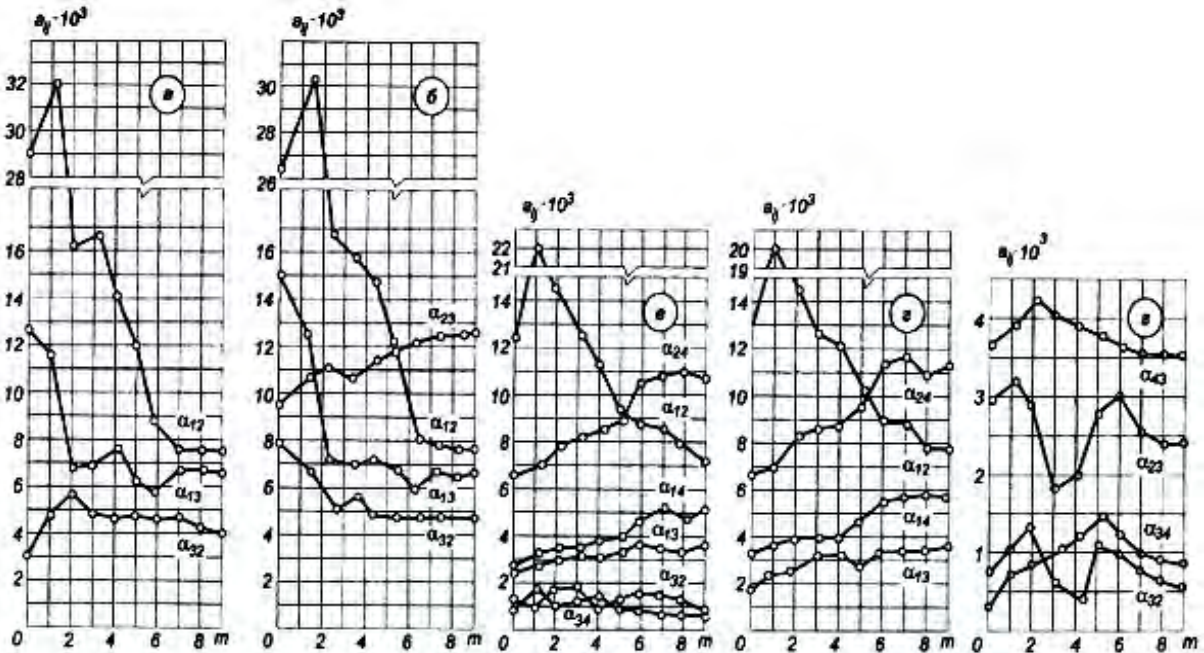


Рис. 2. Результаты идентификации моделей для различных видов взаимодействий цементного камня с внешней средой: а – для системы (3), граф показан на рис. 1, а; б – для системы (4), граф показан на рис. 1, б; в – для системы (5), граф показан на рис. 1, в; г – для системы (6), граф показан на рис. 1, г

Высокая размерность моделей приводит к сложностям в процессах ее построения и решения. Ручное построение таких моделей является нецелесообразным, так как в данном случае значительно повышается вероятность внесения как орфографических, так и логических ошибок, например, введение неверных связей между элементами. Возникает необходимость проведения выбора программного средства (ПС) для построения и последующего решения исследуемой модели, так как каждое ПС лимитировано в доступной области его применения, реализованных в нём методах, удобстве пользователя, возможности проведения дополнительной верификации результатов, возможности портирования построенной модели и/или результатов решения в другие ПС.

Общее множество техник решения систем дифференциальных уравнений высокой размерности может быть разделено на два типа методов: не прямые (уклонение, англ. – avoidance) и прямые (устойчивые, англ. – tolerance) методы. В основе первого

типа лежит идея исследования исходной модели, для определения возможностей ее укрупнения, либо изъятия состояний, несущественных в рамках общей задачи [6, 7]. Для второго типа методов характерно использование специальных алгоритмов, позволяющих распараллелить процесс решения модели, а также введение специальных структур для компактного хранения промежуточных результатов решения [8, 9]. Также в последнее время эффективно используется метод неявного представления матрицы переходов орграфа с помощью произведения Кронекера [10].

Следующей сложностью возникающей в процессе численного решения СДУ является свойство жесткости СДУ (ЖСДУ). В настоящее время не существует единого математического определения жесткости. В литературе вводятся «рабочие» описания жестких задач, основанные на интерпретации проходящих в системе физических процессов [11, 12], а также на указании сложности численного решения систем подобного рода [13, 14].

Один из первых прагматических подходов к определению жесткости был представлен в работе Кертисса и Хиршфельдера в 1952 году [13]: жесткие уравнения – это уравнения, для которых определенные неявные методы дают лучший, чем явные методы, результат.

В работах [11, 14, 15] приведены определения данного свойства, основанные на трудностях численного решения. А именно: невозможность либо неэффективность использования явных методов интегрирования, большие значения постоянной Липшица, большая разница собственных чисел матрицы Якоби, количество переходных фаз и т.д.

В работе [13] Хайрер и Ваннер рекомендуют реализовывать аппарат автоматического априорного определения жесткости в СДУ. Данное действие позволяет избежать напрасных затрат времени и вычислительных возможностей при использовании неэффективных методов для решения СДУ, обладающей свойством жесткости.

Кратко опишем три наиболее известных механизма автоматического обнаружения жесткости в исследуемой СДУ.

а) *определение порядка разницы между собственными числами матрицы Якоби.* Задача Коши  $\frac{du}{dx} = F(x, u)$  называется жесткой на некотором интервале  $[x_0, X]$ , если для каждого  $x$  из данного интервала выполняются условия (12) – (13):

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i=1, 2, \dots, n; \quad (12)$$

$$s(x) = \max_{i=1,n} \operatorname{Re}(-\lambda_i) / \min_{i=1,n} \operatorname{Re}(-\lambda_i) \gg 1, \quad (13)$$

где  $\lambda_i$  – собственные числа матрицы Якоби, рассчитанные на произвольном частном решении. Величину  $s(x)$  называют коэффициентом жесткости [14].

б) *оценка доминирующего собственного значения матрицы Якоби.* Данная методика априорного определения свойства жесткости в системе заключается в анализе доминирующего собственного значения матрицы Якоби. Если через  $v$  обозначить вектор, приближенно равный соответствующему собственному вектору с достаточно малым модулем  $\|v\|$ , то по теореме о среднем значении указанная в (14) будет хорошей аппроксимацией ведущего собственного значения  $|\lambda|$  [13]:

$$|\lambda| \approx \frac{\|f(x, y+v) - f(x, y)\|}{\|v\|}. \quad (14)$$

Примем, что  $LSB$  – граница линейной устойчивости используемого численного метода решения СДУ, а именно: пересечение области линейной стабильности метода с отрицательными значениями оси действительных чисел. Результат умножения  $h|\lambda|$  позволяет дать оценку, сравнимую с линейной границей устойчивости численного метода, с целью обнаружения жесткости (15):

$$h|\lambda| \leq s |LSB|, \quad (15)$$

где  $s$  – коэффициент жесткости;

в) оценка на основе временного интервала исследований. Коэффициент жесткости (16) определяется как произведение наибольшего собственного значения матрицы Якоби, при условии (12) на длину интервала решения:

$$s(x) = t \max_i \lambda_i, \quad (16)$$

где  $t$  – максимальное значение интервала исследования СДУ.

Также, как и в случае с проблемой размерности, общее множество техник решения ЖСДУ может быть разделено на два типа: не прямые и прямые методы.

В основе первого класса лежит определение в исходной модели состояний, порождающих жесткость, их укрупнение и модификация, в результате чего дальнейшему решению подлежит не жесткая модель с уменьшенной размерностью пространства состояний [12]. Метод агрегирования/деагрегирования, предложенный К.С. Триведи, А. Рейбманом и А. Боббио [12], является одним из наиболее известных в классе не прямых методов решения ЖСДУ. Необходимо отметить, что этот метод относится к классу приближенных, и на данный момент не было проведено детального анализа его погрешности. Для прямых подходов свойственно использование численных методов, позволяющих решать ЖСДУ, а также введение таких дополнительных модификаций, как адаптивного шага интегрирования, что позволяет повысить получения точных результатов [14, 15].

Результаты ранее проведенных исследований [16] показали, что, базирясь на количественных значениях, коэффициент жесткости может быть разделен на три группы: малый, средний и высокий (17).

$$s(x) = \begin{cases} [0; 10^2] - \text{малый;} \\ (10^2; 10^4] - \text{средний;} \\ (10^4; \infty) - \text{высокий.} \end{cases} \quad (17)$$

В зависимости от данного значения можно выдвигать требования к используемым подходам и методам решения СДУ.

## Результаты исследования

В рамках данной работы была исследована модель цементного камня с протекающими в нём процессами гидратации и процессами накопления продуктов коррозии, показанная на рис. 1, в, и уравнениях (5) и (10). Эта модель выбрана потому, что даёт возможность проанализировать влияние на состояние материала совместного действия соиздавательных и деградиционных процессов без излишней их детализации.

Орграф, состоящий из четырех состояний, может быть классифицирован как малый, с точки зрения размерности, а значит, нет необходимости проведения дополнительного выбора ПС для построения и решения данной модели.

СДУ (10), описывающая модель, представленную на рис. 1, в, была решена с помощью пакета

Mathematica. Данный математический пакет поддерживает возможность автоматического определения жесткости путем использования функции *StiffnessTest*, которая проводит оценку доминирующего собственного значения матрицы Якоби (14) – (15) в процессе решения системы. Результаты исследования показали, что система (10) на временном

отрезке [4; 6], при начальных значениях компонентов  $V_1(0) = 75$ ,  $V_2(0) = 0.22$ ,  $V_3(0) = 0.03$ ,  $V_4(0) = 0$  является нежесткой и проявляет повышенную чувствительность к изменению величины параметра  $\alpha_{24}$ .

Графики изменения количественных значений компонента  $V_3$  при  $\alpha_{24} = \{8.5 \cdot 10^{-3}; 8.7 \cdot 10^{-3}; 8.8 \cdot 10^{-3}; 8.9 \cdot 10^{-3}; 9.5 \cdot 10^{-3}; 1.05 \cdot 10^{-2}\}$  (рис. 3, а – 3, е):

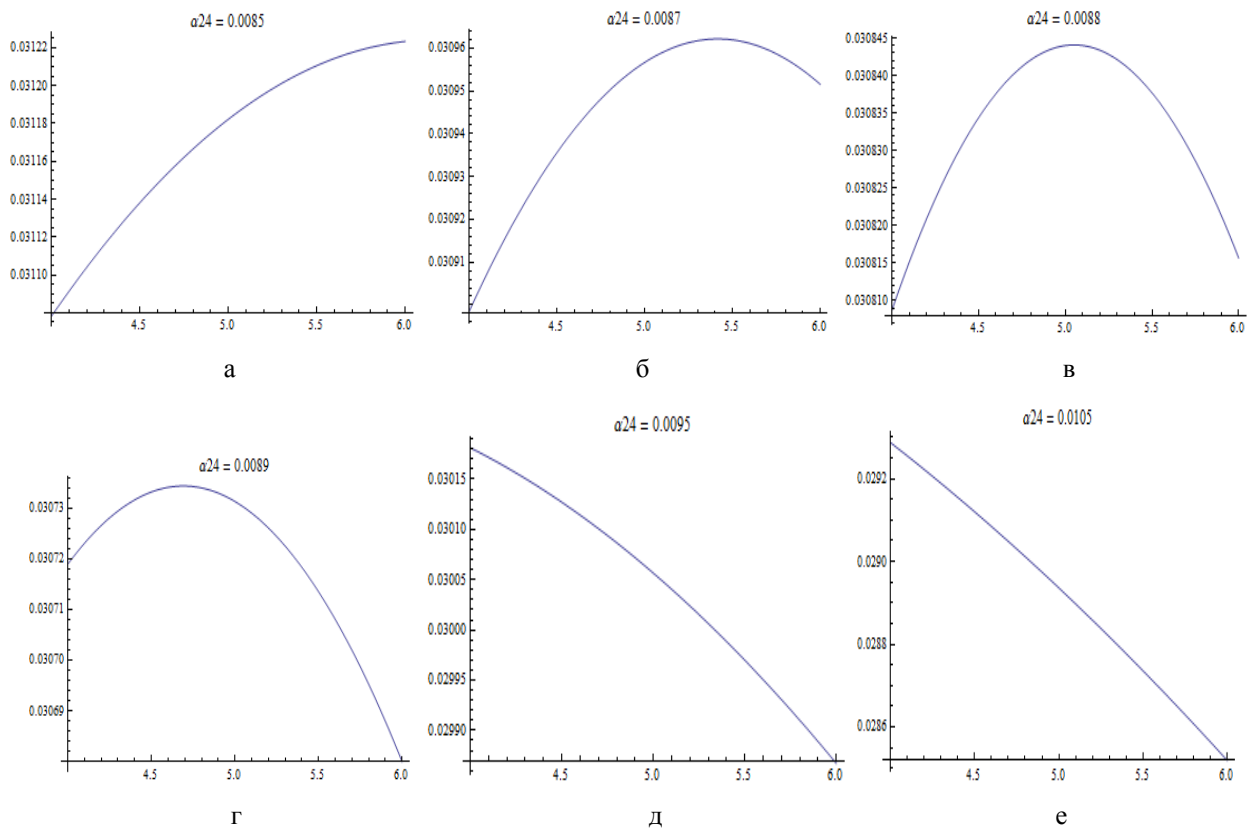


Рис. 3. Графики изменения количественных значений параметра  $V_3$  при:

а –  $\alpha_{24} = 8.5 \cdot 10^{-3}$ ; б –  $\alpha_{24} = 8.7 \cdot 10^{-3}$ ; в –  $\alpha_{24} = 8.8 \cdot 10^{-3}$ ;  
г –  $\alpha_{24} = 8.9 \cdot 10^{-3}$ ; д –  $\alpha_{24} = 9.5 \cdot 10^{-3}$ ; е –  $\alpha_{24} = 1.05 \cdot 10^{-2}$

Таким образом, в результате численного решения системы уравнений вида (10) установлено, что наибольшее влияние (наибольшую чувствительность) на состояние системы «в целом» оказывает изменение интенсивности протекания деградиционных процессов. Это соответствует изменению величины  $\alpha_{24}$ . Меньшее, но также заметное, влияние на поведение системы оказывает изменение интенсивностей переходов  $\alpha_{12}$  и  $\alpha_{32}$ , то есть созидательных процессов.

Именно это обстоятельство служит косвенным подтверждением проявления адапционных свойств цементного бетона в процессе его бытия.

## Выводы

1. Для моделирования изменения свойств цементного бетона при его взаимодействии с внешней средой составлена и решена система линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ).

2. Рассмотрены базовые подходы к решению моделей, обладающих высокой размерностью и/или жесткостью. Так как модель, описывающая протекание процессов гидратации и накопления продуктов коррозии, определена на малом пространстве состояний, основное внимание в рамках данной работы сконцентрировано на определении жесткости в исследуемой СЛДУ.

3. В целях повышения точности численного решения модели, анализ система линейных дифференциальных уравнений на присутствие свойства жесткости проведен с помощью встроенных средств математического пакета Mathematica. Установлено, что система является не жесткой, то есть для исследуемой модели отсутствует необходимость проведения уточненного решения.

4. Отсутствие данного свойства свидетельствует также о том, что точность полученных экспериментальных результатов можно считать удовлетво-

ряючої вимогам наступного чисельного аналізу.

5. Установлено, що найбільше вплив (найбільшу чутливість) на стан системи «в цілому» викликає зміна інтенсивності протікання деградаційних процесів. Це відповідає зміні величини  $\alpha_{24}$ . Менше, але помітне, вплив на поведінку системи викликає зміна інтенсивностей переходів  $\alpha_{12}$  і  $\alpha_{32}$ , тобто зміна інтенсивностей створювальних процесів.

### Список літератури

1. Мчедлов-Петросян О.П. О формулюванні моделі структури цементного бетону по відношенню до «старіння» / О.П. Мчедлов-Петросян, В.Ю. Дубницький, В.Л. Чернявський, Л.Б. Фридман // *Вісник ВУЗів, сер. «Строїтельство и архитектура»*. – 1970. – №12. – С. 78-83.
2. Чернявський В.Л. Адаптація бетону / В.Л. Чернявський. – Днепропетровск: Изд. «Нова Ідеологія», 2002. – 116 с.
3. Чернявський В.Л. Адаптація абіотических систем: бетон і залізобетон / В.Л. Чернявський. – Днепропетровск: Изд. Днепропетровського нац. ун-та залізничного транспорту, 2008. – 412 с.
4. Венцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология / Е.С. Венцель. – М.: Наука, 1972. – 552 с.
5. Trivedi K.S. Dependability and security models / K.S. Trivedi, Dong Seong Kim, A. Roy, D. Medhi // *Proc. Of 7<sup>th</sup> Int. Workshop on the Design of Reliable Communication Networks*. – 2009. – P. 10.
6. Buchholz P. Exact and ordinary lumpability in finite Markov chains / P. Buchholz // *Jour. of Applied Probability*. – 1994. – № 31. – P. 59-74.
7. Chiola G. Stochastic well-formed colored nets and symmetric modeling applications / G. Chiola, C. Dutheillet,

G. Franceschinis, S. Haddad // *IEEE Trans. and Computers*. – 1993. – № 42(11). – P. 1343-1360.

8. Bryant R.E. Graph-based algorithms for Boolean function manipulation / R.E. Bryant // *IEEE Trans. And Computers*. – 1986. – № 35(8). – P. 677-691.

9. Ciadro G. Efficient reachability set generation and storage using decision diagrams / G. Ciadro, A.S. Miner // *Proc. 20<sup>th</sup> Int. Conf. Application and Theory of Petri Nets, LNCS, Springer*. – 1999. – LNCS, Vol. 1639. – P. 6-25.

10. Stewart W.J. Introduction to the numerical solution of Markov chains / W.J. Stewart. – Princeton University Press. – 1994. – P. 539.

11. Каханер Д. Численные методы и программное обеспечение / Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш; пер. с англ. Х.Д. Икрамова. – М.: Мир, 1998. – 575 с.

12. Bobbio A. A aggregation technique for transient analysis of stiff Markov chains / A. Bobbio, K. S. Trivedi // *Computers, IEEE Transactions*. – 1986. – Vol. C-35. – P. 803-814.

13. Hairer E. Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential-algebraic problems / E. Hairer, G. Wanner. – Berlin: Springer, 1993. – P. 640.

14. Арушанян О.Б. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на FORTRAN / О. Б. Арушанян, С.Ф. Залеткин. – М.: МГУ, 1990. – С. 336.

15. Malhotra M. Stiffness-tolerant methods for transient analysis of stiff Markov chains / M. Malhotra, J. K. Muppala, K.S. Trivedi // *Microelectronic Reliability*. – 1994. – Vol. 34(11). – P. 1825-1841.

16. Kharchenko V. Availability assessment of computer systems described by stiff Markov chains: case study / V. Kharchenko, O. Odarushchenko, V. Odarushchenko, P. Popov // *Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, CCIS*. – 2013. – Vol. 412. – P. 112-135.

Поступила в редколлегию 28.07.2014

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. М.В. Новожилова, Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков.

### ОЦІНКА ЧУТЛИВОСТІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЩО МОДЕЛЮЄ ВЗАЄМОДІЮ ЦЕМЕНТНОГО БЕТОНУ ІЗ ЗОВНІШНІМ СЕРЕДОВИЩЕМ

В.Ю. Дубницький, В.О. Бутенко, В.Л. Чернявський

Запропоновано структурно-функціональні моделі взаємодії цементного каменя із зовнішнім середовищем. Моделі представлено у вигляді зважених орграфів. Для опису функціонування моделі у часі складено системи лінійних диференціальних рівнянь. При їх складанні використано метод динаміки середніх, визначено жорсткість отриманої системи. Встановлено, що система є нежорсткою. Показано, що найбільший вплив на стан системи «в цілому» має зміна інтенсивності протікання деградаційних процесів. Менше, але також помітний, вплив на поведінку системи надає зміна інтенсивностей творчих процесів в середній стадії розвитку процесу, що служить непрямим підтвердженням прояву адаптаційних властивостей цементного бетону в процесі його буття.

**Ключові слова:** цементний бетон, адаптація бетону, корозія бетону, графі, орієнтовані графі, системи лінійних диференціальних рівнянь, жорсткі системи лінійних диференціальних рівнянь, чисельні методи розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь.

### SENSITIVITY EVALUATION OF A SYSTEM OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS THAT IMITATES CEMENT CONCRETE INTERACTION WITH EXTERNAL ENVIRONMENT

V.Yu. Dubnitskiy, V.O. Butenko, V.L. Cherniavskiy

Structural functional models proposed for cement rock interaction with external environment. Models are presented in the form of weighted orggraphs. Some systems of linear differential equations were written to describe the model functioning in time. In preparation of equations we used the method of average values dynamics, determined the rigidity of obtained system. The system is found to be non-rigid. System condition in total is shown to be effected primarily by alterations in intensity of degradation processes. Not so decisive, but also important effect on system behavior is felt from alterations in intensity of creative processes at medium stage of process development, which is an indirect confirmation of cement concrete adaptation properties in the course of its existence.

**Keywords:** cement concrete, concrete adaptation, concrete corrosion, concrete corrosion models, graphs, oriented graphs, systems of linear differential equations, rigid systems of linear differential equations, numerical methods of solution for systems of linear differential equations.