

# Математичні моделі та методи

УДК 519.85

Н.И. Гиль, И.А. Суббота

*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*

## КВАЗИ- $\rho$ -ФУНКЦИЯ ДЛЯ СЕГМЕНТОВ ЭЛЛИПСОВ

*В статье рассматриваются конструктивные средства математического моделирования отношения непересечения пары сегментов эллипсов. Строится класс квази- $\rho$ -функций для сегментов эллипсов с учетом их непрерывных трансляций и вращений.*

**Ключевые слова:** сегменты эллипсов, непрерывные вращения, отношение непересечения, математическое моделирование, квази- $\rho$ -функция.

### Введение

Задачи оптимального размещения (в частности, задачи упаковки и раскроя [1]) являются частью теории исследования операций и вычислительной геометрии. Этот класс задач имеет широкий спектр научных и практических применений в современной биологии, минералогии, медицине, материаловедении, нанотехнологии, робототехнике, системах распознавания образов, в химической промышленности, машиностроении, строительстве и т.д.

При решении оптимизационных задач геометрического проектирования (Packing and Cutting [1]) одним из ключевых моментов является описание в аналитическом виде условий взаимного непересечения размещаемых объектов. В этом классе задач наиболее эффективным средством математического моделирования отношений геометрических объектов является метод  $\rho$ -функций Стояна [2, 3]. В данном исследовании используется новый класс функций, квази- $\rho$ -функций [4], который является развитием метода  $\rho$ -функций. Квази- $\rho$ -функции позволяют значительно упростить аналитическое описание ограничений на непересечение геометрических объектов с учетом их непрерывных вращений, а также расширить класс объектов, для которых эти ограничения можно представить в виде систем неравенств.

Математическое моделирование упаковки двух эллипсов исследуется в статье [5]. Эффективный численный алгоритм для определения факта пересечения эллипсов приводится в статье [6], здесь же исследуется влияние размеров эллипсов на плотность упаковки. Авторы статьи [7] рассматривают задачу упаковки кругов в эллипс. Задача упаковки формулируется в виде задачи нелинейного программирования.

В статье [8] излагается метод решения задачи упаковки истинных эллипсов (без аппроксимаций), допускающих вращения, с использованием современных NLP solvers, доступных в GAMS. С целью аналитического описания условия непересечения неориентированных эллипсов авторы используют идею разделяющей прямой, предложенную в работе [9] для моделирования отношений кругов и выпуклых многоугольников. В этом исследовании получено глобальное решение для небольшого числа эллипсов ( $n \leq 4$ ). Однако при  $n > 14$  авторам не удалось получить локально-оптимального решения. В этой связи авторы предлагают эвристический *polyhedral*-алгоритм для размещения большего числа эллипсов ( $14 \leq n \leq 100$ ) в прямоугольной области фиксированной ширины и переменной длины.

Задача оптимальной упаковки истинных эллипсов, допускающих непрерывные вращения, рассмотрена в [10]. Для аналитического описания основных ограничений размещения используются свободные от радикалов квази- $\rho$ -функции и псевдонормализованные квази- $\rho$ -функции [11]. Строится математическая модель в виде задачи нелинейного программирования. Предлагаются эффективные алгоритмы поиска локальных экстремумов. Используя квази-функции, изложенный в статье [10] подход позволяет представить задачу оптимальной упаковки эллипсов с учетом допустимых расстояний в виде задачи нелинейного программирования.

В данном исследовании рассматриваются средства математического моделирования отношения непересечения пары сегментов эллипсов в виде класса квази- $\rho$ -функций. Это позволит описывать в аналитическом виде отношения произвольных  $\rho$ -объектов, границы которых описываются не только дугами окружностей, но и сегментами эллипсов.

### Постановка задачи

Рассматриваются сегменты  $\sigma_i, i=1,2$ , эллипса  $E_i$ , представляющие собой пересечение эллипса  $E_i$  и полуплоскости. Будем считать, что сегмент  $\sigma_i$  определяется полуосями  $a_i$  и  $b_i$  эллипса ( $a_i > b_i$ ), а также двумя его точками  $A_{i1}$  и  $A_{i2}$ , т.е. граница сегмента состоит из части границы эллипса и хорды, соединяющей точки  $A_{i1}$  и  $A_{i2}$ . Пусть  $A_{i3}$  – точка пересечения касательных к эллипсу в точках  $A_{i1}$  и  $A_{i2}$  (в предположении, что центр эллипса не принадлежит сегменту  $\sigma_i$ , а хорда не проходит через центр эллипса). Полусом сегмента  $\sigma_i$  будем считать начало его собственной системы координат, совпадающее с центром эллипса. Тогда в общей системе координат сегмент  $\sigma_i$  можно представить кортежем  $(x_i^*, y_i^*, a_i, b_i, A_{i1}, A_{i2}, \theta_i)$ , где  $(x_i^*, y_i^*)$  – вектор трансляции,  $\theta_i$  – угол поворота собственной системы координат относительно общей системы. Обозначим  $u_i = (x_i^*, y_i^*, \theta_i)$ .

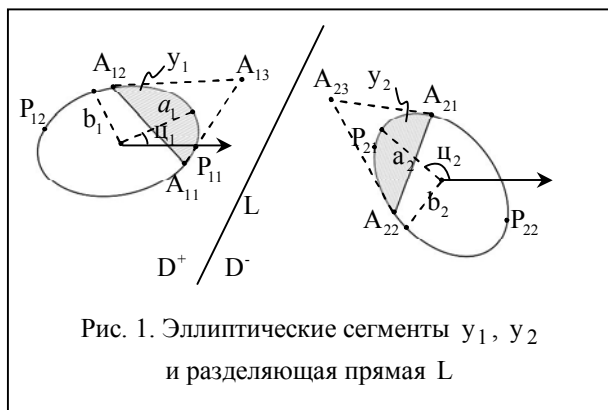


Рис. 1. Эллиптические сегменты  $u_1, u_2$  и разделяющая прямая  $L$

Рассматриваются следующие отношения между эллиптическими сегментами  $\sigma_1(u_1)$  и  $\sigma_2(u_2)$ :

- пересечение:  $\text{int } \sigma_1(u_1) \cap \text{int } \sigma_2(u_2) \neq \emptyset, (1)$
  - касание:  $\text{int } \sigma_1(u_1) \cap \text{int } \sigma_2(u_2) = \emptyset$  и  $\text{fr } \sigma_1(u_1) \cap \text{fr } \sigma_2(u_2) \neq \emptyset, (2)$
  - непересечение:  $\sigma_1(u_1) \cap \sigma_2(u_2) = \emptyset, (3)$
- где  $\text{int}(\bullet)$  – топологическая внутренность,  $\text{fr}(\bullet)$  – граница множества  $(\bullet)$ .

В качестве конструктивных средств математического моделирования отношений пары сегментов эллипсов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  предлагаются квази-phi-функции.

Квази-phi-функцией для  $\sigma_1(u_1)$  и  $\sigma_2(u_2)$  называется функция  $\Phi^{u_1, u_2}$ , для которой  $\max_{u \in U} \Phi(u_1, u_2, u')$  является phi-функцией. Здесь  $u'$  – вектор дополнительных переменных.

Из определения следует, что квази-phi-функция  $\Phi^{u_1, u_2}$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\max_{u \in U} \Phi(u_1, u_2, u') > 0,$$

если выполняется условие (3),

$$\max_{u \in U} \Phi(u_1, u_2, u') = 0,$$

если выполняется условие (2),

$$\max_{u \in U} \Phi(u_1, u_2, u') < 0$$

в случае (1).

Одним из самых важных свойств квази-phi-функции является следующее:  $\Phi(u_1, u_2, u') \geq 0$ , если  $\text{int } \sigma_1(u_1) \cap \text{int } \sigma_2(u_2) = \emptyset$ .

### Построение квази-phi-функции

Пусть  $f(x,y) = cx + dy + r = 0, (c^2 + d^2 = 1)$  – уравнение некоторой прямой  $L$ , являющейся границей двух полуплоскостей  $D^+$  и  $D^-$  (рис. 1). Для описания условия взаимного непересечения сегмента  $\sigma_1$  и полуплоскости  $D^+$  построим phi-функцию вида:

$$\Phi_1(u_1, u') = \min \{ f(A_{11}), f(A_{12}), \max \{ f(A_{13}), \min \{ f(P_{11}), f(P_{12}) \} \} \}, (4)$$

$$f(A_{ij}) = c(x_i^* + x_j \cos \theta_i + y_j \sin \theta_i) + d(y_i^* - x_j \sin \theta_i + y_j \cos \theta_i) + r,$$

$$f(P_{11}) = cx_i^* + dy_i^* + r + \frac{a_i b_i (d + cF)}{H},$$

$$f(P_{12}) = cx_i^* + dy_i^* + r - \frac{a_i b_i (d + cF)}{H},$$

$$F = \frac{c(b_i^2 \sin^2 \theta_i + a_i^2 \cos^2 \theta_i) + d(a_i^2 - b_i^2) \sin \theta_i \cos \theta_i}{d(b_i^2 \cos^2 \theta_i + a_i^2 \sin^2 \theta_i) + c(a_i^2 - b_i^2) \sin \theta_i \cos \theta_i},$$

$$H = \sqrt{b_i^2 (\sin \theta_i + F \cos \theta_i)^2 + a_i^2 (\cos \theta_i - F \sin \theta_i)^2},$$

где  $u'=(c,d,r)$ ,  $P_{11}, P_{12}$  – точки эллипса, в которых касательные параллельны прямой  $L$ . Здесь принято обозначение  $f(\bullet)$  – уклонение точки  $(\bullet)$  от  $L$ . Функция (4) является квази-функцией при условии

$$\Phi_2(u_2, u') = \min\{-f(A_{21}), -f(A_{22}), \max\{-f(A_{23}), \min\{-f(P_{21}), -f(P_{22})\}\}\}. \quad (5)$$

Тогда условие взаимного непересечения сегментов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  можно представить в виде

$$\Phi'(u_1, u_2, u') \geq 0,$$

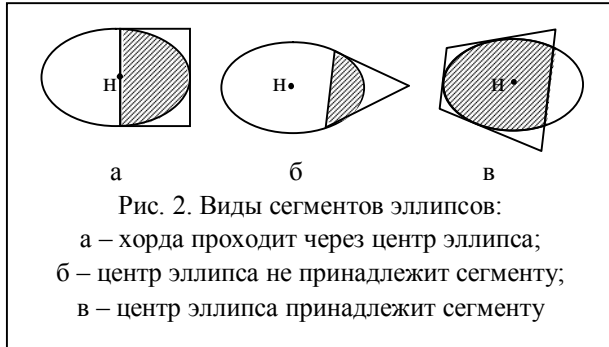
где функция

$$\Phi'(u_1, u_2, u') = \max_{c,d,r} \min\{\Phi_1(u_1, u'), \Phi_2(u_2, u')\} \quad (6)$$

является phi-функцией для пары сегментов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Рассмотрим случаи, когда хорда, соединяющая точки  $A_{i1}$  и  $A_{i2}$ , проходит через центр эллипса (или близко к нему). А также когда центр эллипса принадлежит сегменту.

Пусть  $\sigma_i = E_i \cap T_i$ ,  $i=1,2$ , где  $T_i$  является: треугольником, если центр эллипса не принадлежит  $\text{int}\sigma_i$ ; прямоугольником, если хорда проходит через центр эллипса  $\sigma_i$ ; трапецией, если центр эллипса принадлежит  $\text{int}\sigma_i$ . При этом две стороны многоугольника являются касательными к эллипсу в концевых точках хорды.



Тогда, в общем случае, отношение непересечения сегментов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  можно описать так:

$$\Phi^{\sigma_1\sigma_2}(u_1, u_2, u') \geq 0,$$

где

$$\Phi^{\sigma_1\sigma_2}(u_1, u_2, u') = \max\{\Phi^{E_1E_2}(u_1, u_2, u'), \Phi^{T_1T_2}(u_1, u_2, u'), \Phi^{T_1E_2}(u_1, u_2, u'), \Phi^{E_1T_2}(u_1, u_2, u')\},$$

где  $\Phi^{\sigma_1\sigma_2}(u_1, u_2, u')$  – квази-phi-функция для сегментов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ,  $\Phi^{E_1E_2}(u_1, u_2, u')$ ,  $\Phi^{T_1T_2}(u_1, u_2, u')$ ,  $\Phi^{T_1E_2}(u_1, u_2, u')$ ,  $\Phi^{E_1T_2}(u_1, u_2, u')$  – квази-phi-функции для объектов:  $E_1$  и  $E_2$ ,  $T_1$  и  $T_2$ ,  $T_1$  и  $E_2$ ,  $E_1$  и  $T_2$ , приведенные в работе [12].

В частности, квази-phi-функция для выпуклых многоугольников строится следующим образом.

$d \neq 0$ .

Аналогично строится phi-функция для сегмента  $\sigma_2$  и полуплоскости  $D^+$ :

Пусть  $T_1$  и  $T_2$  выпуклые многоугольники, заданные вершинами  $p_i^1$ ,  $i = 1, \dots, m_1$ , и  $p_i^2$ ,  $i = 1, \dots, m_2$ , соответственно, с параметрами размещения  $u_1$  и  $u_2$ .

Полагаем, что  $\Phi^{T_1D^+}(u_1, u') = \min_{1 \leq i \leq m_1} f(p_i^1)$  – phi-функция для объектов  $T_1$  и  $D^+$ ,

$\Phi^{T_2D^-}(u_2, u') = \min_{1 \leq i \leq m_2} (-f(p_i^2))$  – phi-функция для объектов  $T_2$  и  $D^-$ . Тогда функция

является квази-phi-функцией для  $T_1$  и  $T_2$ .

$$\Phi^{T_1T_2}(u_1, u_2, u') =$$

$$= \min\{\Phi^{T_1D^+}(u_1, u'), \Phi^{T_2D^-}(u_2, u')\}$$

является квази-phi-функцией для  $T_1$  и  $T_2$ .

Пусть  $E_1(u_1)$  и  $E_2(u_2)$  – эллипсы с полуосями  $a_i$  и  $b_i$ ,  $a_i > b_i$ ,  $i = 1, 2$ . Переменные параметры эллипса  $E_i(u_i)$  имеют вид:  $u_i = (v_i, \theta_i)$ , где  $v_i = (x_{E_i}, y_{E_i})$  – вектор трансляции,  $\theta_i$  – угол поворота. Параметр  $t_i$  определяет точку  $(x_i, y_i) = (\lambda_i a_i \cos t_i, \lambda_i b_i \sin t_i)$  на границе эллипса  $E_i$ ,  $0 \leq t_i \leq 2\pi$ ,  $i = 1, 2$ . После поворота эллипса  $E_i$  на угол  $\theta_i$  и трансляции на вектор  $v_i = (x_{E_i}, y_{E_i})$  каждая точка  $(x_i, y_i)$  преобразуются следующим образом:

$$(x'_i, y'_i) = v_i + M(\theta_i) \cdot (x_i, y_i),$$

где  $M(\theta_i)$  – матрица поворота, т.е.

$$x'_i = x_{E_i} + x_i \cos \theta_i + y_i \sin \theta_i,$$

$$y'_i = y_{E_i} - x_i \sin \theta_i + y_i \cos \theta_i.$$

Полагая  $u' = (t_1, t_2)$ , квази-phi-функция для  $E_1(u_1)$  и  $E_2(u_2)$  имеет вид

$$\Phi^{E_1E_2}(u_1, u_2, u') = \min\{\Phi^{E_1D^+}(u_1, u_p, u'_1), \Phi^{E_2D^-}(u_2, u_p, u'_2)\}. \quad (7)$$

Здесь квази-phi-функция для эллипса  $E(u_E)$  и полуплоскости  $D(\theta)$  определяется так

$$\Phi^{ED}(u_E, \theta, t) = \min\{\chi(\theta_E, \theta, t), f(x_E^+, y_E^+), f(x_E^-, y_E^-)\}, \quad (8)$$

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y - 1,$$

$$\chi = -\langle N_P, N'_E \rangle,$$

где  $\alpha = \cos \theta$ ,  $\beta = \sin \theta$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $N_P = (\alpha_P, \beta_P)$  – внешний вектор нормали полуплоскости  $D$ ,  $N'_E = (\alpha'_E, \beta'_E)$ ,

$$\alpha'_E = \alpha_E \cos \theta_E + \beta_E \sin \theta_E,$$

$$\beta'_E = -\alpha_E \sin \theta_E + \beta_E \cos \theta_E,$$

$$\alpha_E = \frac{\cos t}{a}, \beta_E = \frac{\sin t}{b},$$

$$(x'_E, y'_E) = (x_E, y_E) + \eta(-\beta'_E, \alpha'_E),$$

$$(x''_E, y''_E) = (x'_E, y'_E) - \eta(-\beta'_E, \alpha'_E), \eta = (a)^2.$$

## Выводы

Предложенный в работе подход к формализации условий взаимного непересечения сегментов эллипса позволяет описывать в аналитическом виде отношения объектов, границы которых описываются эллиптическими сегментами. Таким образом, в задачах упаковки и раскроя в качестве объектов размещения могут рассматриваться произвольные объекты, границы которых задаются объединением отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов, т.е.

$$\text{frT} = \bigcup_i I_i, I_i \in \{I_L, I_C, I_E\},$$

где  $I_L$  – прямая,  $I_C$  – дуга окружности,  $I_E$  – дуга эллипса. Для решения данного класса задач могут быть использованы алгоритмы, предложенные в работах [3, 4].

## Список литературы

1. Wascher G. An improved typology of cutting and packing problems / G. Wascher, H. Hauner, H. Schumann // *European Journal of Operational Research*. – 2007. – Volume 183, Issue 3, 16. – P. 1109-1130.
2. Stoyan Yu.  $\Phi$ -function and its basic properties / Yu. Stoyan // *Доп. НАН України*. – 2001. – № 8. – С. 112-117.

3. Chernov N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem / N. Chernov, Yu. Stoyan, T. Romanova // *Computational Geometry: Theory and Applications*. – 2010. – 43(5): 535-553.

4. Панкратов А. Информационная система решения оптимизационной задачи размещения произвольных неориентированных 2D-объектов / А. Панкратов // *Системи обробки інформації*. – X: XV ІС, 2013. – Вип. 1(108). – С. 82-186.

5. Vickers G.T. Nested Ellipses / G.T. Vickers // *Applied Probability Trust*. – 2009. – Vol. 41(3). – P. 131-137.

6. Xu W.X. An overlapping detection algorithm for random sequential packing of elliptical particles / W.X. Xu, H.S. Chen, Z. Lv // *Physica*. – 2011. – Vol. 390. – P. 2452-2467. doi:10.1016/j.physa.2011.02.048.

7. Birgin E.G. Packing circles within ellipses / E.G. Birgin, L.H. Bustamante, H.F. Callisaya, J.M. Martinez // *International transactions in operational research*. – 2013. – Vol. 20(3). – P. 365-389. doi:10.1111/itor.12006.

8. Kallrath J. Cutting Ellipses from Area-Minimizing Rectangles / J. Kallrath // *Journal of Global Optimization*. – 2013. – Vol. 59 (2-3). – P. 405-437. doi:10.1007/s10898-013-0125-3.

9. Kallrath J. Cutting Circles and Polygons from Area-Minimizing Rectangles / J. Kallrath // *Journal of Global Optimization*. – 2008. – Vol. 43 (2-3). – P. 299-328. doi:10.1007/s10898-007-9274-6.

10. Панкратов А.В. Оптимальная упаковка эллипсов с учетом допустимых расстояний / А.В. Панкратов, Т.Е. Романова, И.А. Суббота // *Журнал Обчислювальної Математики*. – 2014. – Т. 1. – С. 27-42.

11. Стоян Ю.Г. Квази- $\phi$ -функции для математического моделирования отношений геометрических объектов / Ю.Г. Стоян, А.В. Панкратов, Т.Е. Романова, Н.И. Чернов // *Доповіді Національної академії наук України*. – 2014. – Т. 9. – С. 49-54.

12. Гиль Н.И. Задача упаковки неориентированных эллипсов / Н.И. Гиль, А.В. Панкратов, Т.Е. Романова, И.А. Суббота // *Збірник наукових праць ХВПС*. – X: XV ІС, 2013. – Вип. – 4 (37). – С. 152-156.

Поступила в редколлегию 7.10.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, доц. В.В. Шляхов, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

## КВАЗИ- $\Phi$ -ФУНКЦІЯ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ СЕГМЕНТІВ

М.І. Гіль, І.О. Суббота

В статті розглядаються конструктивні засоби математичного моделювання відношень неперетину пари сегментів еліпсів. Будується клас квазі- $\phi$ -функцій для сегментів еліпсів з урахуванням їх неперервних трансляцій та поворотів.

**Ключові слова:** сегменти еліпсів, неперервні повороти, відношення неперетину, математичне моделювання, квазі- $\phi$ -функція.

## QUASI-PHI-FUNCTION FOR ELLIPSE SEGMENTS

N.I. Gil', I.A. Subbota

The constructive tools of mathematical modeling of nonoverlapping relationship of a pair of ellipse segments are considered in this paper. The class of quasi- $\phi$ -functions for ellipse segments are constructed taking into account their continuous translations and rotations.

**Ключевые слова:** ellipse segments, continuous rotations, nonoverlapping, mathematical modeling, quasi- $\phi$ -function.