УДК 514.174.6

С.В. Козлова, Р.Г. Худов

Харьковский физико-математический лицей № 27, Харьков

ЗАМОЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРКЕТА ПЕНРОУЗА

В работе показана возможность замощения произвольной плоскости с использованием непериодического паркета Пенроуза. При этом в качестве фигур, которыми можно замостить плоскость, выбраны «наконечник стрелы» и «воздушный змей». Приводится принцип построения паркета Пенроуза, примеры замощения произвольной плоскости, а также доказаны выражения, определяющие количество остроугольных и тупоугольных треугольников при построении паркета Пенроуза. Установлена связь этого количества с числами Фибоначчи.

Ключевые слова: *замощение плоскости, непериодический паркет, треугольник, число Фибоначчи, паркет Пенроуза.*

Вступление

Постановка проблемы в общем виде. В геометрии паркетом называется замощение плоскости многоугольниками без пробелов и перекрытий, в котором любые два многоугольника имеют либо общую сторону, либо только общую вершину, либо вовсе не имеют общих точек [1]. Среди паркетов выделяется класс периодических паркетов. Паркет периодический, если существуют два неколлинеарных вектора при параллельном переносе, на которые паркет совмещается сам с собой. Среди периодических паркетов самыми известными являются правильные, которые состоят из одного типа правильных многоугольников [1]. Существует три правильных замощения плоскости: треугольный паркет, квадратный паркет, шестиугольный паркет.

Задача непериодического замощения плоскости ставилась математиками давно. Однако решения не удавалось найти. Причиной невозможности получения непериодических паркетов являлось то, что на месте стыка между фигурами возникали пробелы либо наложения друг на друга.

Цель статьи – провести анализ возможности замощения плоскости с использованием непериодического паркета Пенроуза.

Анализ последних достижений и публикаций. Математический паркет (замощение плоскости) имеет много общих точек соприкосновения с математической кристаллографией. Классификация плоских кристаллографических групп впервые была осуществлена русским кристаллографом Е.С. Федоровым [2]. Независимо от Е.С. Федорова, немецкий математик А.М. Шёнфлис при помощи методов теории групп в 1981 году решил задачу о классификации всех кристаллических пространственных решеток [2]. Вопросами математической кристаллографии занимались также Б.Н. Делоне, А.В. Шубников, Г.С. Кокстер [2]. Первые попытки проанализировать кристаллографические мозаики с математической точки зрения были предприняты еще астрономом Иоганном Кеплером [2]. Большой интерес среди ученых был проявлен к пятиугольникам и шестиугольникам, которыми можно замостить плоскость. При этом перечисление всех возможных типов пятиугольников и шестиугольников оказалось непростой задачей [2].

В работах [2 – 4] рассмотрено замощение плоскости треугольниками Робинсона – двумя равнобедренными треугольниками с углами (36°, 72°, 72°) и (108°, 36°, 36°) соответственно и длинами сторон, равными золотому сечению [5].

Одним из первых появился непериодический паркет, собранный Робертом Берджером. Паркет Берджера состоял из 104 домино [1]. Дональд Кнут собрал непериодический паркет из 92 домино [1, 6].

В связи с появлением нового инструмента для построения плоских фигур – компьютера – возникло новое направление в замощении плоскости – моделирование фундаментальной области, заданной естественными параметрами, и нахождение условий выпуклости этих областей [2].

Постановка задачи и изложение материалов исследования

Две различные фигуры, которыми можно замостить плоскость, Пенроуз назвал «наконечник стрелы» и «воздушный змей». На рис. 1 показано построение этих фигур.

Поясним этот принцип.

Рассмотрим ромб ABCD (рис. 1) со стороной, равной золотому сечению $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, с углом 72°. Тогда длина диагонали AC ромба ABCD (рис. 1) равна $(1+\varphi)$.

Пусть E – точка на диагонали AC, такая что AE= φ . Рассмотрим треугольники BAE и EAD.

По теореме косинусов имеем: для треугольника BAE

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2 \cdot AB \cdot AE \cdot \cos(\angle BAE), \quad (1)$$

где $\cdot$ – знак алгебраического умножения;
$\angle$ – обозначение угла,
а для треугольника EAD:

$$ED^2 = AE^2 + AD^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos(\angle EAD). \quad (2)$$

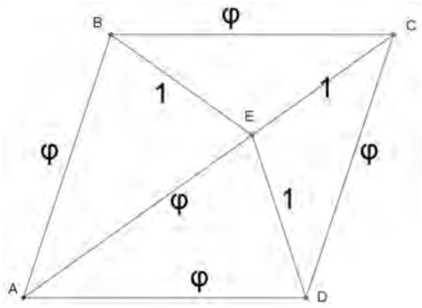


Рис. 1. Принцип построения «наконечника стрелы» и «воздушного змея»

Подставим числовые значения в выражение (1). Имеем

$$BE^2 = \varphi^2 + \varphi^2 - 2\varphi^2 \cos(\angle BAE). \quad (3)$$

Учитывая, что $\angle BAE = 36^\circ$ (диагональ AC параллелограмма ABCD – биссектриса $\angle BAD$), из выражения (3) имеем

$$BE^2 = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 (1 - \cos(36^\circ)) = 1. \quad (4)$$

Проводя аналогичные выражениям (2) – (4) вычисления для треугольника EAD, получим, что

$$DE^2 = 1. \quad (5)$$

Из выражений (4) и (5) имеем, что BE=DE=1.

Из треугольника BEC по теореме косинусов получаем, что CE=1. Промежуточные вычисления, аналогичные рассуждениям, приведенным выше, опущены. Таким образом, получено, что четырехугольник ABED – «воздушный змей», а четырехугольник BEDC – «наконечник стрелы».

Покажем, как с помощью построенных фигур можно замостить плоскость. Предварительно проведем вспомогательные разбиения.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC (рис. 2, а) с основанием AC=(φ +1) и боковыми сторонами AB = BC = 1.

Для дальнейшего изложения материала обозначим треугольник ABC буквой R (рис. 2, а). Найдем величину угла ABC (рис. 2, а). По теореме косинусов получим выражение (6):

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle ABC), \quad (6)$$

откуда

$$\angle ABC = 108^\circ. \quad (7)$$

С учетом (7) получим, что

$$\angle BAC = \angle BCA = 36^\circ.$$

Проведем из вершины B тупоугольного треугольника ABC отрезок BD к основанию AC таким образом, чтобы $\angle ABD = 72^\circ$ (рис. 2, а). Такое деление треугольника ABC назовём «правым» делением, а треугольники, получающиеся при «правом» делении, будем обозначать буквой R (рис. 2, а).

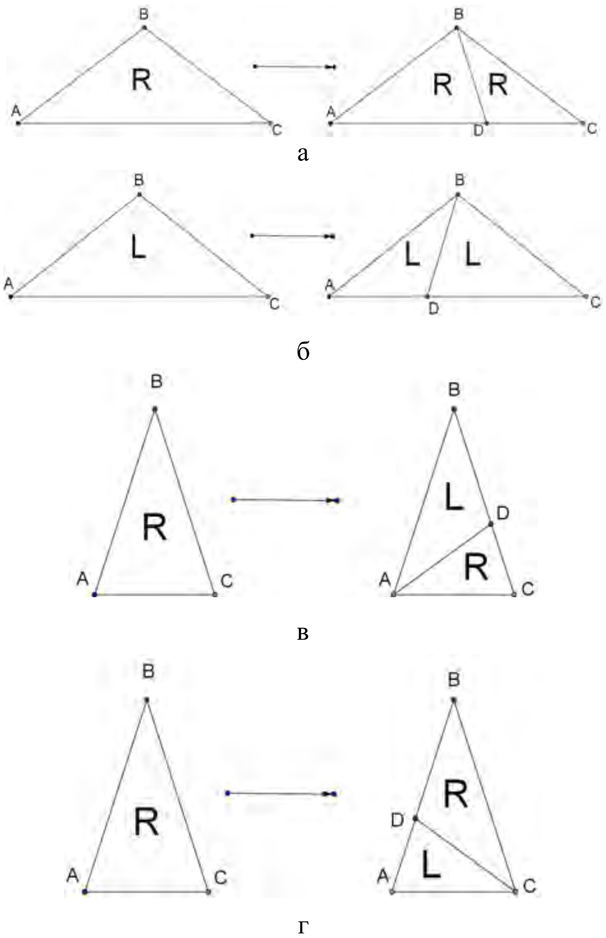


Рис. 2. Вспомогательные разбиения для построения паркета Пенроуза

Аналогично, проведем из вершины B тупоугольного треугольника ABC отрезок BD к основанию AC таким образом, чтобы $\angle ABD = 36^\circ$ (рис. 2, а).

Такое деление треугольника ABC назовём «левым» делением, а треугольники, получающиеся при «левом» делении, будем обозначать буквой L (рис. 2, б).

Рассмотрим правила деления треугольника ABC (рис. 2, а – 2, г). Если треугольник тупоугольный, и на нем стоит буква R, то делим его «правым» образом, на полученных фигурах ставим буквы R (рис. 2, а).

Если треугольник тупоугольный, и на нем стоит буква L, то делим его «левым» образом, а на полученных фигурах ставим букву L (рис. 2, б).

Если треугольник остроугольный, и на нем стоит буква R, то проводим биссектрису левого угла при основании, а на получившемся тупоугольном треугольнике ставим букву L, а на остроугольном треугольнике ставим букву R (рис. 2, в).

Если треугольник остроугольный, и на нем стоит буква L, то проводим биссектрису правого угла при основании, а на получившемся тупоугольном треугольнике ставим букву R, а на остроугольном треугольнике ставим букву L (рис. 2, г).

Учитывая вспомогательные разбиения треугольников на рис. 2, а – 2, г, рассмотрим принцип построения паркета Пенроуза (рис. 3, а – 3, з).

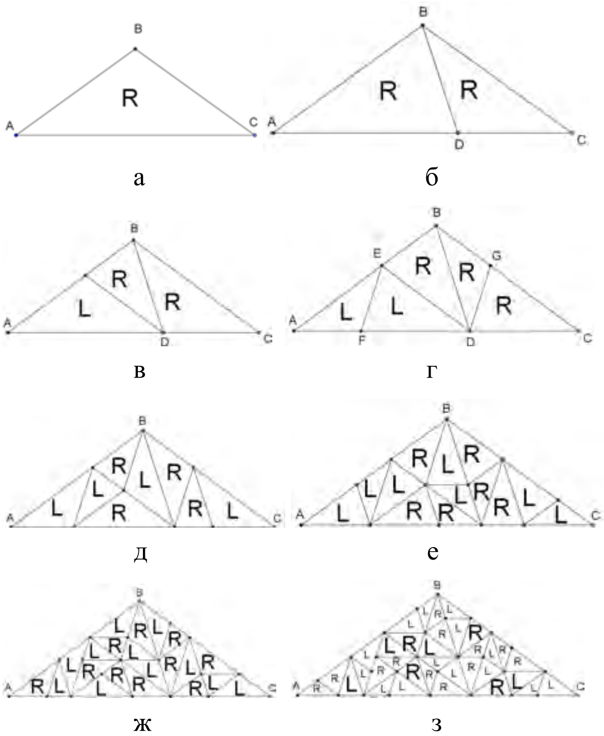


Рис. 3. Принцип построения паркета Пенроуза

Проводя «дробления» треугольников с учетом вспомогательных построений, получим паркет Пенроуза замощения треугольника ABC (рис. 3, з).

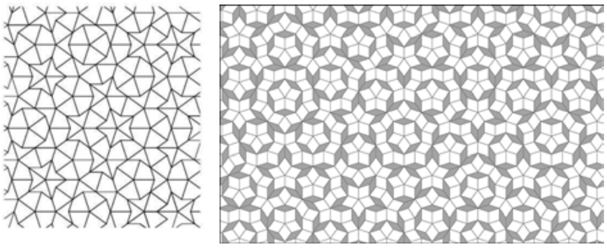
При этом «дробления», проведенные на рис. 3 а, 3, в, 3, д, 3, ж, назовем нечетными шагами деления (соответственно, 1-м, 3-м, и т.д.), а «дробления», проведенные на рис. 3, б, 3, г, 3, е, 3, з, назовем четными шагами деления (соответственно, 2-м, 4-м, и т.д.).

Замощения любой конечной области плоскости паркетом Пенроуза получается из четных шагов дробления треугольника ABC.

А именно, для замощения некоторой конечной области «наконечниками стрел» и «воздушными змеями» в масштабе рис. 1, необходимо сделать достаточное число четных шагов так, чтобы после раздутия (гомотетии) измельченных треугольников до размеров рис. 1, раздутый треугольник ABC покрыл нужную область [7].

Примеры замощения произвольной плоскости паркетом Пенроуза приведены на рис. 4, а – 4, б [8].

При построении паркета Пенроуза на четных шагах делятся только тупоугольные треугольники, а при нечетных шагах делятся только остроугольные треугольники.



а б

Рис. 4. Примеры замощения произвольной плоскости паркетом Пенроуза

Введем следующие обозначения:

O_{2n} – количество остроугольных треугольников на 2n шаге деления треугольника ABC;

T_{2n} – количество тупоугольных треугольников на 2n шаге деления треугольника ABC.

Используя введенные обозначения, докажем, что количество остроугольных треугольников при делении можно вычислить в соответствии с выражением (8):

$$O_{2n+2} = 2O_{2n} + T_{2n}, \tag{8}$$

а количество тупоугольных треугольников при делении можно вычислить в соответствии с выражением (9):

$$T_{2n+2} = T_{2n} + O_{2n}. \tag{9}$$

Очевидно, что $T_0 = O_0 = 1$. Рассмотрим шаг 2n. На этом шаге количество остроугольных треугольников будет равно O_{2n}, а количество тупоугольных треугольников будет равно T_{2n}. На шаге (2n+1) количество тупоугольных треугольников будет равно $(T_{2n} + O_{2n})$ (в силу того, что каждый тупоугольный треугольник разбивается на один остроугольный и один тупоугольный треугольник), а количество остроугольных треугольников останется прежним, то есть будет равно O_{2n}, так как на нечетных шагах, как было показано выше, остроугольные треугольники не делятся. Аналогично, на шаге (2n+2) количество тупоугольных треугольников будет определяться выражением (9), так как на четных шагах тупоугольные треугольники не делятся, а количество остроугольных треугольников будет определяться выражением (8).

В заключение покажем интересный факт связи чисел Фибоначчи с выражениями (8) и (9). Возьмем выражение для количества тупоугольных треугольников на 2n-м шаге «дробления». Оказывается, что это количество может быть выражено через числа Фибоначчи [9]:

$$T_{2n} = f_{2n+1}, \tag{10}$$

где f_{2n+1} – (2n+1)-е число Фибоначчи.

Аналогично, с количеством остроугольных треугольников

$$O_{2n} = f_{2n+2}. \tag{11}$$

Докажем выражения (10) и (11). Будем доказывать методом индукции. База, очевидно, верна. Сделаем индукционный переход. Подставим выражения (10) и (11) в (8) и (9). Имеем:

$$T_{2n+2} = f_{2n+1} + f_{2n+2} = f_{2n+3}, \tag{12}$$

$$O_{2n+2} = 2f_{2n+2} + f_{2n+1} = f_{2n+3} + f_{2n+2} = f_{2n+4}, \tag{13}$$

что и доказывает справедливость выражений (10) и (11).

Выводы и направления дальнейших исследований

Таким образом, в работе показана возможность замощения произвольной плоскости с использованием непериодического паркета Пенроуза. При этом в качестве фигур, которыми можно замостить плоскость, выбраны «наконечник стрелы» и «воздушный змей». Приводится принцип построения паркета Пенроуза, примеры замощения произвольной плоскости, а также доказаны выражения, определяющие количество остроугольных и тупоугольных треугольников. Установлена связь этого количества с числами Фибоначчи.

В дальнейших исследованиях необходимо математически доказать непериодичность паркета Пенроуза, а также рассмотреть возможность сборки паркета Пенроуза другими фигурами.

Список литературы

1. Гильберт Д. Наглядная геометрия: пер. с нем / Д Гильберт, С. Кон-Фоссен. – М.: Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1936. – 305 с.

2. Электронный аналог печатного издания: Моделирование в интегративном проекте по математике и информатике. Элективный курс: учебное пособие / П.И. Совертков, А.Г. Назин. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 296 с.

3. Мякишев Г. Элементы геометрии треугольника / Г. Мякишев. – М.: Изд-во Моск. Центра непрерывного математ. образования, 2002. – 33 с.

4. Сергиенко П.Я. Сакральные треугольники, окружность, многоугольники их построение и отношения между их параметрами // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. №77-6567, публ.12746, 23.12.2005. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001b/00160236.htm.

5. Щетников А.И. Золотое сечение в античной математике // Математика, 2006. – №18 (608). – [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: http://www.nsu.ru/classics/pythagoras/Golden_section.pdf.

6. Кнут Д. Конкретная математика. Основание информатики / Д.Кнут, Р.Грэхем, О.Паташник. – М.: Мир; Бином. Лаборатория знаний, 2006. – 703 с.

7. Murdie C. The Non-Commutative Geometry of Penrose Tilings. / C.Murdie. – L.: SPR, 2004. – 23 p.

8. Гарднер М. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам: пер. с англ. / М. Гарднер. – М.: Мир, 1993. – 416 с.

9. Воробьев Н. Числа Фибоначчи / Н. Воробьев. – М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 144 с.

Поступила в редколлегию 12.01.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.А. Кучук, Харьковский университет Воздушных Сил имени Ивана Кожедуба, Харьков.

ЗАМОЩЕННЯ ПЛОЩИНИ З ВИКОРИСТАННЯМ ПАРКЕТУ ПЕНРОУЗА

С.В. Козлова, Р.Г. Худов

В роботі показана можливість замощення довільної площини з використанням неперіодичного паркету Пенроуза. При цьому у якості фігур, якими можна заміщати площину, обрані «кінець стріли» та «повітряний змій». Наводиться принцип побудови паркету Пенроуза, приклади замощення довільної площини, а також отримані вирази, що визначають кількість гострокутних та тупокутних трикутників при побудові паркету Пенроуза. Встановлено зв'язок такої кількості з числами Фібоначчі.

Ключові слова: *замощення площини, неперіоличний паркет, трикутник, число Фібоначчі, паркет Пенроуза.*

FILLING PLANES WITH USE OF PENROUZ'S PARQUET

S.V. Kozlova, R.G. Khudov

In work possibility of filling is shown any plane with use of an acyclic of a Penrouz's parquet. Thus as figures with which it is possible of filling a plane, «the arrow tip» and "kite" are chosen. The principle of construction of a Penrouz's parquet, examples of filling any plane is resulted, and also the expressions defining quantity of acute-angled and obtusangular triangles at construction of a Penrouz's parquet. Connection of this quantity with numbers of Fibonachchi is established.

Keywords: *filling of planes, an acyclic parquet, a triangle, number of Fibonachchi, a Penrouz's parquet.*