

УДК 622.242:534–16

Є.В. Харченко<sup>1</sup>, В.М. Палюх<sup>2</sup>, Б.І. Червоний<sup>3</sup><sup>1</sup>Національний університет «Львівська політехніка», Львів<sup>2</sup>Львівський інститут Сухопутних військ НУ «Львівська політехніка», Львів<sup>3</sup>Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне**ПРОСТОРОВІ КОЛИВАННЯ АГРЕГАТИВ З ЖОРСТКИМИ РОТОРАМИ**

*Розроблено математичну модель просторових коливань статора і ротора машинного агрегату з урахуванням динамічної незрівноваженості ротора та зв'язку електромагнітних і механічних коливальних явищ. На прикладі віброагрегату з приводом від асинхронного електричного двигуна проведено аналіз динамічних процесів, що виникають у роботі цієї системи та визначено раціональні параметри кріпильних вузлів.*

**Ключові слова:** математична модель, вібрації, просторові коливання, електромагнітний стан, аналіз, проектування, оптимальні параметри.

**Вступ**

Ротори або вали є головними елементами більшості енергетичних, електричних, технологічних, транспортних машин, а також багатьох приладів і апаратів. Вони виконують важливі функції (передавання моменту й/або обертового руху, утримування інших елементів конструкцій, позиціонування та ін.) й одночасно є джерелом вібрацій. Характеристики вібраційних процесів залежать від цілої низки чинників, зокрема, від конструкції ротора або роторної системи, властивостей опор, кутової швидкості тощо. Основними причинами вібрацій є, перш за все, недосконалість роторів, пов'язані з їх проектуванням, виготовленням і монтажем, у деяких випадках суттєво проявляється податливість самих роторів, їхніх опор, а також опор корпусу машини. З іншого боку, специфічні неконсервативні сили, зокрема, сили тертя в опорах, а також сили взаємодії ротора зі статором за певних умов призводять до автоколивань явищ. Рівень вібрації машини, обладнаної ротором чи системою роторів, переважно безпосередньо не зв'язаний з її потужністю. Тому дослідження динамічних процесів, що виникають в технічних об'єктах з роторами, а також зниження рівнів вібрацій цих об'єктів є важливим напрямком підвищення їх надійності та ресурсу.

Особливо гостро проблема вібрації роторів стоїть у галузі проектування і виготовлення електричних машин, для яких задачі динаміки роторних систем необхідно розв'язувати у нерозривному взаємозв'язку з електромагнітними перехідними процесами [1, 15]. На основі такого підходу у праці [12] розглянуто сумісні коливання статора і ротора асинхронного двигуна у площині його поперечного перерізу. Детальний аналіз впливу сил взаємодії статора з ротором на вібрації ротора проведено у статті [14]. Докладна математична модель крутильних коливань роторів турбоагрегатів побудована у праці у праці [13]. Широко розглядаються поперечні коливання роторів як пружних тіл з розподіленими

масами у працях [2, 8, 9, 11]. Вивчається вплив пружно-дисипативних властивостей підшипників на роботу роторних систем у роботі [7].

Загальні аспекти взаємодії механічних систем з джерелами збурення обмеженої потужності та їх прикладне значення у застосуванні до привідних механізмів обговорюється у працях [4 – 6].

Прикладна теорія керування віброзахисними системами орієнтована, зокрема, на об'єкти з роторами, детально викладена у книзі [6], детальніше задача віброзахисту нелінійних просторових коливань у загальній постановці розглядається у праці [10].

У даній статті на прикладі асинхронного двигуна розробляється математична модель сумісних просторових коливань статора і ротора агрегату з урахуванням динамічної незрівноваженості ротора та нерозривного взаємозв'язку електромагнітних і механічних коливальних явищ. Вважається, що опори ротора є жорсткими і їх податливість не береться до уваги. Як частковий випадок моделі просторових вібрацій технічного об'єкта, одержуються рівняння коливань ротора і статора у площині, перпендикулярній до осі обертання.

**1. Рівняння просторових коливань асинхронного двигуна**

Розглянемо задачу аналізу просторових коливань агрегатів з жорсткими роторами на прикладі асинхронного двигуна. Розв'язуємо її, припускаючи, що статор і ротор є твердими тілами. При цьому враховуємо взаємовплив механічних і електромагнітних коливальних явищ.

Просторові коливання твердого тіла можна розглядати як результат накладання поступального руху центра маси і обертального (сферичного) руху тіла навколо цього центра. Для складання рівнянь динаміки скористаємося нерухомою  $x, y, z$ , а також декількома рухомими ортогональними координатними системами. Рухомі координати  $x', y', z'$  і  $x_0, y_0, z_0$ , що мають загальний початок  $C$ , за відсутності

деформацій опор двигуна збігаються з відповідними нерухомими. Осі  $Cx_0, Cy_0, Cz_0$ , жорстко зв'язані із статором, причому вісь  $Cz_0$  є віссю обертання ротора щодо статора. Осі  $Cx', Cy', Cz'$  паралельні нерухомим осям. Положення статора в системі координат  $x', y', z'$  визначається кутами Ейлера-Крилова  $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ . Центри мас  $C_S$  і  $C_R$  (тут і далі індекс  $S$  належить параметру статора;  $R$  – ротора) розташовані на відстанях  $l_S$  і  $l_R$  від площини  $Cx_0y_0$  і на відстанях  $\delta_S$  і  $\delta_R$  від осі  $Cz_0$ . Головні центральні осі статора позначені  $C_Sx_S, C_Sy_S, C_Sz_S$ ; ротора –  $C_Rx_R, C_Ry_R, C_Rz_R$ . Припускаємо, що положення цих осей задане в координатних системах  $x_S^*, y_S^*, z_S^*$  і  $x_R^*, y_R^*, z_R^*$  за допомогою кутів Ейлера. Відповідні осі координатних систем  $x_S, y_S, z_S$  і  $x_0, y_0, z_0$ , паралельні між собою. Система осей  $x_R, y_R, z_R$  розташована таким чином, що площина  $C_Rx_Ry_R$  паралельна до площини  $Cx_0y_0$ , поворот даної системи щодо осі  $C_Sz_S$  в координатній системі  $x_0 y_0 z_0$  визначається кутом  $\gamma$ .

Рівняння поступальних рухів статора і ротора подамо у вигляді

$$m_S \frac{d^2 X_S}{dt^2} = -F - F_C - F_V, \quad m_R \frac{d^2 X_R}{dt^2} = F - F_B, \quad (1)$$

де  $m_S$  і  $m_R$  – маси статора і ротора;  $X_S$  і  $X_R$  – матриці-колонки координат центрів мас у системі  $x, y, z$   $X_h$  ( $h = S, R$ ) =  $\text{col}(x_h, y_h, z_h)$ ;  $F_B, F_C, F_V, F$  – матриці-колонки проекцій головних векторів сил зовнішньої дії на ротор, сил пружності і дисипації енергії опор статора і сил взаємодії статора з ротором на нерухомій осі

$$F_B = \text{col}(F_{Bx}, F_{By}, F_{Bz}), \quad F_C = \text{col}(F_{Cx}, F_{Cy}, F_{Cz}),$$

$$F_V = \text{col}(F_{Vx}, F_{Vy}, F_{Vz}), \quad F = \text{col}(F_x, F_y, F_z).$$

Матриці-колонки визначаються виразами

$$X_h \quad (h = S, R) = X_C + DX_{h0}, \quad (2)$$

де  $X_C$  – матриця-колонка координат точки  $C$  у системі  $x, y, z$ ;  $X_{S0}, X_{R0}$  – матриці-колонки координат центрів мас статора і ротора в системі  $x_0, y_0, z_0$ ;  $D$  – матриця перетворення координат.

Матриці  $X_{S0}, X_{R0}$  і  $D$  визначаються рівностями

$$X_{S0} = \text{col}(0, -\delta_S, l_S);$$

$$X_{R0} = \text{col}(\delta_R \sin \gamma, -\delta_R \cos \gamma, l_R), \quad D = AB^{-1}, \quad (3)$$

причому  $A$  і  $B$  – матриці взаємозв'язку координат  $x', y', z'$  і  $x_0, y_0, z_0$  з координатами  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin \gamma_y \\ 0 & \cos \gamma_x & -\sin \gamma_x \cos \gamma_y \\ 0 & \sin \gamma_x & \cos \gamma_x \cos \gamma_y \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos \gamma_y \cos \gamma_z & \sin \gamma_z & 0 \\ -\sin \gamma_z \cos \gamma_y & \cos \gamma_x & 0 \\ \sin \gamma_y & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Після підстановки залежностей (2) в рівняння (3) і виключення матриці-колонки невідомих  $F$  отримаємо

$$m_S + m_R \frac{d^2 X_C}{dt^2} + m_S \frac{d^2 D}{dt^2} X_{S0} +$$

$$+ m_R \frac{d^2 D}{dt^2} X_{R0} + m_R D \frac{d^2 X_{R0}}{dt^2} +$$

$$+ 2m_R \frac{dD}{dt} \frac{dX_{R0}}{dt} = -F_C - F_V - F_B. \quad (4)$$

Другі похідні матриць  $A$  і  $B^{-1}$  за часом подаємо у вигляді

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = A_1 + A_x \frac{d^2 \gamma_x}{dt^2} + A_y \frac{d^2 \gamma_y}{dt^2},$$

$$\frac{d^2 B^{-1}}{dt^2} = B_1 + B_y \frac{d^2 \gamma_y}{dt^2} + A_y \frac{d^2 \gamma_z}{dt^2}, \quad (5)$$

де  $A_r$  ( $r = 1, x, y$ ) і  $B_r$  ( $r = 1, x, y$ ) – квадратні матриці, елементами яких є функції куткових координат і їх перші похідні. Вираз другої похідної матриці  $D$  з урахуванням позначень (5)

$$\frac{d^2 D}{dt^2} = D_1 + D_x \frac{d^2 \gamma_x}{dt^2} + D_y \frac{d^2 \gamma_y}{dt^2} + D_z \frac{d^2 \gamma_z}{dt^2}, \quad (6)$$

де

$$D_1 = A_1 B^{-1} + A B_1 + 2 \frac{dA}{dt} \frac{dB^{-1}}{dt},$$

$$D_x = A_x B^{-1},$$

$$D_y = A_y B^{-1} + A B_y, \quad D_z = A B_z.$$

Після підстановки виразів (3) і (6) у рівність (4) з врахуванням позначень

$$\frac{dX_C}{dt} = V_C, \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \Omega, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \omega, \quad (7)$$

де  $X_C$  і  $\Gamma$  – компоненти яких разом з параметром  $\gamma$  утворюють повну систему незалежних координат руху  $X_C = \text{col}(x_c, y_c, z_c)$ ;  $\Gamma = \text{col}(\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z)$ ;  $V_C$  і  $\Omega$  – матриці-колонки лінійних і куткових швидкостей  $V_C = \text{col}(v_x, v_y, v_z)$ ,  $\Omega = \text{col}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ , отримуємо

$$(m_S + m_R) \frac{dV_C}{dt} + \Phi_1 \frac{d\Omega}{dt} +$$

$$+ \Phi_2 \frac{d\omega}{dt} + \Phi_3 = -F_C - F_V - F_B. \quad (8)$$

Тут

$$\Phi_1 = m_S D_S + m_R D_R, \quad \Phi_2 = m_R \delta_R D X_2,$$

$$\Phi_3 = D_1 (m_S X_{S0} + m_R X_{R0}) + 2m_R \frac{dD}{dt} \frac{dX_{R0}}{dt} m_R \delta_R \omega^2 D X_1,$$

причому

$$D_h \quad (h = S, R) = (D_x X_{h0} \quad D_y X_{h0} \quad D_z X_{h0}),$$

$$X_1 = \text{col}(-\sin \gamma, \cos \gamma, 0), \quad (9)$$

$$X_2 = \text{col}(\cos \gamma, \sin \gamma, 0).$$

Для опису сферичних рухів статора і ротора скористаємося динамічним рівнянням Ейлера. У застосовуванні до механічної системи, що розглядається, згадане рівняння подамо у такому вигляді:

$$I_S \frac{d\omega_S}{dt} + K_S \vartheta_S \omega_S = L_S; \quad I_R \frac{d\omega_R}{dt} + K_R \vartheta_R \omega_R = L_R \quad (10)$$

де  $I_S$  і  $I_R$  – діагональні матриці головних центральних моментів інерції мас статора і ротора

$$I_h (h = S, R) = \text{diag}(J_{hx}, J_{hy}, J_{hz});$$

$\omega_S$ ,  $\omega_R$  і  $L_S$ ,  $L_R$  – матриці-колонки проекцій кутових швидкостей статора і ротора та моментів сил прикладених до цих тіл, на відповідні центральні осі

$$\omega_h (h = S, R) = \text{col}(\omega_{hx}, \omega_{hy}, \omega_{hz}),$$

$L_h (h = S, R) = \text{col}(L_{hx}, L_{hy}, L_{hz})$ ,  $K_S$ ,  $K_R$  і  $\vartheta_S$ ,  $\vartheta_R$  – квадратні матриці

$$K_h (h = S, R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_{hz} - J_{hy} \\ 0 & J_{hx} - J_{hz} & 0 \\ J_{hy} - J_{hx} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vartheta_h (h = S, R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_{hy} \\ \omega_{hz} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{hx} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здійснюючи поступовий перехід від координатної системи  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  до систем  $x_S, y_S, z_S$  та  $x_R, y_R, z_R$  й враховуючи, що проекції кутової швидкості статора на осі  $Cx_0, Cy_0$  дорівнюють проекціям на ті ж осі кутової швидкості ротора, а різниця проекцій цих швидкостей на вісь  $Cz_0$  дорівнює значенню  $\omega$ , матриці-колонки  $\omega_S$  і  $\omega_R$  подаємо у вигляді

$$\omega_S = G_S B \Omega, \quad \omega_R = G_R U B \Omega + G_R \Psi. \quad (11)$$

Тут  $G_S$  і  $G_R$  – матриці перетворення координат  $x_S^*, y_S^*, z_S^*$  і  $x_R^*, y_R^*, z_R^*$  у координати відповідно  $x_S, y_S, z_S$  та  $x_R, y_R, z_R$

$$G_h (h = S, R) = P_h Q_h^{-1}, \quad (12)$$

де  $P_h = \begin{pmatrix} \sin \Theta_h \sin \phi_h & \cos \phi_h & 0 \\ \sin \Theta_h \cos \phi_h & -\sin \phi_h & 0 \\ \cos \Theta_h & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (13)$

$$Q_h = \begin{pmatrix} 0 & \cos \psi_h & \sin \Theta_h \sin \psi_h \\ 0 & \sin \psi_h & -\sin \Theta_h \cos \psi_h \\ 1 & 0 & \cos \Theta_h \end{pmatrix},$$

причому  $\Theta_h, \psi_h, \phi_h$  – кути нутації, прецесії та власного обертання, що визначають положення головних центральних осей інерції;  $U$  – матриця переходу від проекцій вектора в координатах  $x_0, y_0, z_0$  до проекцій в системі координат  $x_R^*, y_R^*, z_R^*$

$$U = \begin{pmatrix} \cos \phi_R & \sin \phi_R & 0 \\ -\sin \phi_R & \cos \phi_R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\Psi$  – матриця-колонка,

$$\Psi = \text{col}(0, 0, \omega).$$

Квадратні матриці  $v_S$ , і  $v_R$  з врахуванням залежностей (10) і позначень,

$$H_S = G_S B, \quad H_R = G_R U B \quad (14)$$

перетворимо до вигляду

$$\begin{aligned} \vartheta_S &= H_{S1} \frac{d\omega_x}{dt} + H_{S2} \frac{d\omega_y}{dt} + H_{S3} \frac{d\omega_z}{dt}, \\ \vartheta_R &= H_{R1} \frac{d\omega_x}{dt} + H_{R2} \frac{d\omega_y}{dt} + H_{R3} \frac{d\omega_z}{dt}, \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$H_{hi} (h = S, R; i = 1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & H_{hi2} \\ H_{hi3} & 0 & 0 \\ 0 & H_{hi1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_{R4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \Theta_R \cos \phi_R \\ \cos \Theta_R & 0 & 0 \\ 0 & \sin \Theta_R \sin \phi_R & 0 \end{pmatrix}.$$

Тут  $H_{hij}$  ( $h = S, R; i, j = 1, 2, 3$ ) – елементи матриць  $H_S$  і  $H_R$  (індекси  $i$  і  $j$  вказують на приналежність елемента відповідним рядку та колонці квадратної матриці).

Утворимо матриці-колонки проекцій головних моментів сил зовнішніх впливів ротора, сил пружності і дисипації енергії опор на нерухомі осі з урахуванням приведення систем сил, що розглядаються, до точки  $O$

$$M_B = \text{col}(M_{Bx}, M_{By}, M_{Bz}),$$

$$M_C = \text{col}(M_{Cx}, M_{Cy}, M_{Cz}),$$

$$M_V = \text{col}(M_{Vx}, M_{Vy}, M_{Vz}).$$

Головний момент сил взаємодії статора і ротора з урахуванням зведення до центра  $O$  подаємо у вигляді матриці-колонки проекцій на осі рухомої системи координат  $x_0, y_0, z_0$

$$M = \text{col}(M_x, M_y, M_E - M_0),$$

де  $M_E, M_0$  – електромагнітний момент і момент сил тертя в опорах ротора.

Після обрахунків моментів сил, що діють на статор, відносно точки  $C_S$  і моментів сил, що діють на ротор відносно точки  $C_R$  і перетворення координат отримаємо

$$L_S = -G_S (M + D^{-1} (M_C + M_V + T_S (F + F_C + F_V))); \quad (16)$$

$$L_R = G_R U (M + D^{-1} (-M_B + T_R (F - F_B))),$$

$$L_R = G_R U (M + D^{-1} (-M_B + T_R (F - F_B))),$$

де

$$T_h (h = S, R) = \begin{pmatrix} 0 & z_h & -y_h \\ -z_h & 0 & x_h \\ y_h & -x_h & 0 \end{pmatrix} D^{-1} = B A^{-1}.$$

Матриці-колонки проєкцій сил знаходимо з рівнянь (1) з врахуванням залежностей (2), (3), (7), (9):

$$\begin{aligned} -F - F_c - F_v &= m_s \frac{dV_c}{dt} + m_s D_s \frac{d\Omega}{dt}, \\ F - F_B &= m_R \frac{dV_R}{dt} + m_R D_R \frac{d\Omega}{dt} + \\ &+ m_R \delta_R DX_2 \frac{d\omega}{dt} + 2m_R \frac{dD}{dt} \frac{dX_R}{dt}. \end{aligned} \quad (17)$$

Рівняння (10) з урахуванням співвідношень (11) – (17) перетворимо до вигляду

$$\begin{aligned} S_1 \frac{dV_c}{dt} + S_2 \frac{d\Omega}{dt} + S_3 &= M; \\ R_1 \frac{dV_c}{dt} + R_2 \frac{d\Omega}{dt} + R_3 \frac{d\omega}{dt} + R_4 &= M - D^{-1}M_B, \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} S_1 &= m_s D^{-1}T_s; \\ S_2 &= G_s^{-1}(I_s G_s B + KY_s) + m_s D^{-1}T_s D_s; \\ S_3 &= G_s^{-1}I_s G_s \frac{dB}{dt} \Omega + D^{-1}(M_s + M_v); \\ R_1 &= -m_R D^{-1}T_R; \\ R_2 &= U^{-1}G_R^{-1}(I_R G_R UB + K_R Y_R - m_R UD^{-1}T_R D_R); \\ R_3 &= U^{-1}G_R^{-1}I_R G_R^* - m_R \delta_R D^{-1}T_R DX_2; \\ R_4 &= U^{-1}G_R^{-1}I_R G_R \left( \frac{dU}{dt} B + U \frac{dB}{dt} \right) \Omega + \\ &+ U^{-1}G_R^{-1}K_R H_{R4} \left( H_R \Omega + G_R^* \omega \right) - 2m_R D^{-1}T_R \frac{dD}{dt} \frac{dX_{R0}}{dt}. \end{aligned}$$

Диференціальні рівняння (18) описують сферичні рухи статора і ротора. Крім лінійних і кутових швидкостей невідомими є проєкції моментів сил взаємодії елементів двигуна  $M_x$  і  $M_y$ . Вказані силові чинники є компонентами матриці-колонки  $M$ . Для їх виключення із рівнянь руху спочатку надамо співвідношенням (18) блочної структури. Відтак, виконуючи алгебраїчні перетворення з субматрицями, отримаємо диференціальні рівняння обертання статора і ротора навколо початку системи координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  у вигляді

$$\begin{aligned} (S_{11} + R_{11}) \frac{dV_c}{dt} + (S_{21} + R_{21}) \frac{d\Omega}{dt} + \\ + R_{31} \frac{d\omega}{dt} + S_{31} + R_{41} &= -d_1 M_B; \end{aligned} \quad (19)$$

$$S_{12} \frac{dV_c}{dt} + S_{22} \frac{d\Omega}{dt} + S_{32} = -M_E + M_0; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} R_{12} \frac{dV_c}{dt} + R_{22} \frac{d\Omega}{dt} + R_{32} \frac{d\omega}{dt} + R_{42} = \\ = M_E - M_0 - d_2 M_B, \end{aligned} \quad (21)$$

де  $S_{ji}$  ( $i = 1, 2, 3, j = 1, 2$ ),  $R_{kl}$  ( $k = 1, 2, 3, l = 1, 2$ ),  $d_1, d_2$  – елементи, що розглядаються у вигляді блочних матриць  $S_i, P_k, D^{-1}$

$$S_i = \begin{pmatrix} S_{i1} \\ S_{i2} \end{pmatrix}, P_k = \begin{pmatrix} P_{k1} \\ P_{k2} \end{pmatrix}, D^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

причому верхні елементи є двомірними, а нижні – одномірними за вертикаллю.

$$\text{Рівняння (20) і (21) об'єднаємо однією рівністю} \\ \Lambda_1 \frac{dV_c}{dt} + \Lambda_2 \frac{d\Omega}{dt} + \Lambda_3 \frac{d\omega}{dt} + \Lambda_4 = \Lambda_M, \quad (22)$$

де

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \begin{pmatrix} S_{12} \\ R_{12} \end{pmatrix}, \Lambda_2 = \begin{pmatrix} S_{22} \\ R_{22} \end{pmatrix}, \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda_{32} \end{pmatrix}, \\ \Lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ R_{42} \end{pmatrix}, \Lambda_M = \begin{pmatrix} M_0 - M_E \\ M_0 - M_E - d_2 M_B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тоді сукупність рівнянь (8), (9) і (22) можна подати у вигляді

$$\begin{pmatrix} m_s + m_R & \Phi_1 & \Phi_2 \\ S_{11} + R_{11} & S_{21} + R_{21} & R_{31} \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dV_c}{dt} \\ \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_c + F_v \\ S_{31} + R_{41} \\ \Lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_B \\ d_1 M_B \\ \Lambda_M \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Диференціальні рівняння (7) і (23) описують рух об'єкта, що розглядається. Разом з рівняннями електромагнітного стану двигуна вони утворюють математичну модель динамічних процесів.

## 2. Рівняння електромагнітного стану асинхронного двигуна

Диференціальні рівняння електромагнітного стану двигуна приймають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{di_s}{dt} &= A_S (u + \Omega_S \Psi_S - R_S i_s) + B_S (\Omega_R \Psi_R - R_R i_R); \\ \frac{di_R}{dt} &= A_R (u + \Omega_R \Psi_R - R_R i_R) + \\ &+ B_R (u_s - \Omega_S \Psi_S - R_S i_s). \end{aligned} \quad (24)$$

де  $i_s, i_R, u_s$  – матриці-колонки струмів і напруг;  $A_S, A_R, B_S, B_R$  – матриці зв'язку;  $\Omega_S, \Omega_R$  – матриці частот обертання;  $\Psi_S, \Psi_R$  – матриці-колонки потокозчеплень.

Матриці-колонки  $i_s, i_R, u_s$  визначаються рівностями

$$i_j \ (j = S, R) = \text{col}(i_{jx}, i_{jy}); \quad u_s = \text{col}(U_m, 0),$$

де  $i_{jx}, i_{jy}$  – проєкції струмів на координатні осі  $x, y$ ;  $U_m$  – амплітуда напруг мережі живлення.

Квадратні матриці  $A_S, A_R, B_S, B_R$  визначаються залежностями

$$\begin{aligned} A_S &= \alpha_S (1 - \alpha_S G); \quad B_S = -\alpha_S \alpha_R G; \\ A_R &= \alpha_R (1 - \alpha_R G); \quad B_R = B_S, \end{aligned}$$

де

$$G = \frac{1}{i_m^2} \begin{pmatrix} Ri_x^2 + Ti_y^2 & (R-T)i_x i_y \\ (R-T)i_x i_y & Ti_x^2 + Ri_y^2 \end{pmatrix},$$

причому

$$R = \frac{1}{\rho + \alpha_S + \alpha_R}; \quad T = \frac{1}{\tau + \alpha_S + \alpha_R}.$$

Тут  $i_m, i_x, i_y$  – струм намагнічування і його складові за осями  $x, y, \tau, \rho$  – величини, що визначаються за кривою намагнічування, яка є функціонально залежною робочого потокозчеплення  $\Psi_m$  від струму намагнічування;  $\alpha_S, \alpha_R$  – величини обернені індуктивностям розсіювання обмоток статора і ротора.

Матриця частот обертання

$$\Omega_S = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_R = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 - \omega_R \\ \omega_R - \omega_0 & 0 \end{pmatrix},$$

де  $\omega_0, \omega_R$  – синхронна кутова швидкість двигуна і кутова швидкість ротора, виражені в електрорадіанах в секунду.

Матриці-колонки повних потокозчеплень обмоток статора і ротора мають вигляд

$$\Psi_S = \frac{1}{\alpha_S} i_S + \frac{1}{\tau} i, \quad \Psi_R = \frac{1}{\alpha_R} i_R + \frac{1}{\tau} i,$$

де  $i = \text{col}(i_x, i_y)$ .

$$\text{Величини } i_x = i_{Sx} + i_{Rx}, \quad i_y = i_{Sy} + i_{Ry}; \quad i_m = \sqrt{i_x^2 + i_y^2}.$$

Значення  $\tau$  і  $\rho$  визначаються виразами

$$\tau = \frac{i_m}{\Psi_m}; \quad \rho = \frac{di_m}{d\Psi_m} \quad (25)$$

Електромагнітний момент знаходимо за формулою

$$M_E = \frac{3}{2} p_0 \frac{1}{\tau} (i_{Rx} i_{Sy} - i_{Ry} i_{Sx}), \quad (26)$$

де  $p_0$  – число пар магнітних полюсів.

Криву намагнічування подаємо у вигляді

$$\Psi_m = a_1 i_m + a_2 i_m^3 + a_3 i_m^5, \quad \text{якщо } i_m > i_{mk}; \quad (27)$$

$$\Psi_m = a_m^{-1} i_m, \quad \text{якщо } i_m \leq i_{mk},$$

де  $i_{mk}$  – критичне значення струму намагнічування, за границею якого залежність  $\Psi_m(i_m)$  є нелінійною. Тоді  $\tau$  і  $\rho$  у відповідності до виразів (25) визначаються залежностями

$$\tau = (a_1 + a_2 i_m^2 + a_3 i_m^4)^{-1}, \quad \text{якщо } i_m > i_{mk}; \quad (28)$$

$$\tau = a_m, \quad \text{якщо } i_m \leq i_{mk},$$

$$\rho = (a_1 + 3a_2 i_m^2 + 5a_3 i_m^4)^{-1}, \quad \text{якщо } i_m > i_{mk}; \quad (29)$$

$$\rho = a_m, \quad \text{якщо } i_m \leq i_{mk},$$

Для здійснення числового інтегрування диференціальних рівнянь (24) необхідність наявності інформації про криву намагнічування (27) відпадає, оскільки у розрахунках використовуються безпосе-

редньо вираз (28) і (29). Проекції струмів на координатні осі на початку пуску двигуна дорівнюють нулю.

Запишемо вказані умови в загальному вигляді:

$$i_S(t_0) = \text{col}(i_{Sx0}, i_{Sy0}); \quad (30)$$

$$i_R(t_0) = \text{col}(i_{Rx0}, i_{Ry0}).$$

### 3. Застосування розробленої математичної моделі для аналізу вібрації двигуна у поперечній площині

У випадку, коли досліджувана механічна система є симетричною відносно площини, перпендикулярної до осі обертання ротора, одержуємо частковий випадок математичної моделі.

Рух статора і ротора у вказаній площині (рис. 1) опишемо матричним рівнянням

$$pV = M^{-1}(F - CX - NV); \quad pX = V, \quad (32)$$

де  $M, N, C$  – матриці,

$$M = \begin{pmatrix} m_S + m_R & 0 & m_S \delta \cos \gamma_S & m_R \varepsilon \cos \gamma_R \\ 0 & m_S + m_R & m_S \delta \sin \gamma_S & m_R \varepsilon \sin \gamma_R \\ m_S \delta \cos \gamma_S & m_S \delta \sin \gamma_S & I_S + m_S \delta^2 & 0 \\ m_R \varepsilon \cos \gamma_R & m_R \varepsilon \sin \gamma_R & 0 & I_R + m_R \varepsilon^2 \end{pmatrix};$$

$$N = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & 0 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & 0 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причому

$$v_{11} = \sum_{i=1}^n v_{xi}; \quad v_{22} = \sum_{i=1}^n v_{yi}; \quad v_{12} = v_{21} = \sum_{i=1}^n v_{xyi};$$

$$v_{13} = v_{31} = -\sum_{i=1}^n \xi_{li}; \quad v_{33} = \sum_{i=1}^n (y_i \xi_{li} + x_i \xi_{2i} + \zeta_{3i});$$

$$v_{23} = v_{32} = \sum_{i=1}^n \xi_{2i}; \quad c_{11} = \sum_{i=1}^n c_{xi}; \quad c_{22} = \sum_{i=1}^n c_{\phi i};$$

$$c_{33} = \sum_{i=1}^n (y_i \zeta_{li} + x_i \zeta_{2i} + \zeta_{3i}); \quad c_{12} = c_{21} = \sum_{i=1}^n c_{xyi};$$

$$c_{13} = c_{31} = -\sum_{i=1}^n \zeta_{li}; \quad c_{23} = c_{32} = \sum_{i=1}^n \zeta_{2i};$$

$$\xi_{li} = y_i v_{xi} - x_i v_{xyi} - v_{xyi}; \quad \xi_{2i} = x_i v_{yi} - y_i v_{xyi} + v_{xyi};$$

$$\xi_{3i} = v_{yi} - y_i v_{xyi} + x_i v_{yyi}; \quad \zeta_{li} = y_i c_{xi} - x_i c_{xyi} - c_{xyi};$$

$$\zeta_{2i} = x_i c_{yi} - y_i c_{xyi} + c_{yyi}; \quad \zeta_{3i} = c_{yi} - y_i c_{xyi} + x_i c_{yyi};$$

$X, V, F$  – матриці-колонки

$$X = \text{col}(x, y, \gamma_S, \gamma_R); \quad Y = \text{col}(v_x, v_y, \omega_S, \omega_R);$$

$$F = \begin{pmatrix} m_S \delta \omega_S^2 \sin \gamma_S + m_R \varepsilon \omega_R^2 \sin \gamma_R \\ -m_S \delta \omega_S^2 \cos \gamma_S - m_R \varepsilon \omega_R^2 \cos \gamma_R \\ -M_E \\ M_E - M_C \end{pmatrix}.$$

Тут  $v_x, v_y$  – швидкості руху осі  $O$  вздовж координат  $x$  і  $y$ ;  $\omega_s, \omega_r$  – кутові швидкості обертання статора і ротора;  $M_E$  – електромагнітний момент двигуна;  $M_C$  – момент опору рухові.

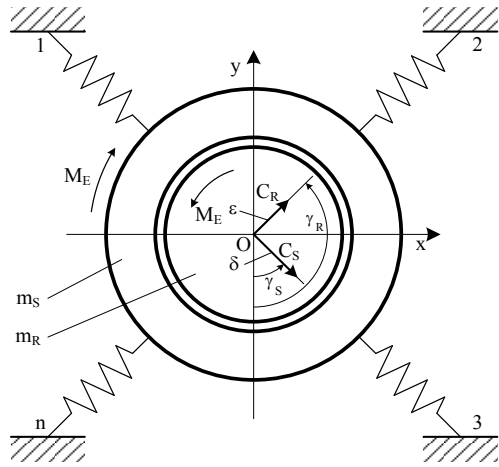


Рис. 1. Розрахункова схема асинхронного двигуна

Результати розрахунків зусиль в кріпильних вузлах віброагрегату (рис. 2), в усталеному режимі його роботи, в залежності від часу і геометричних параметрів вузлів подані на рис. 3 – 5 у вигляді графіків.

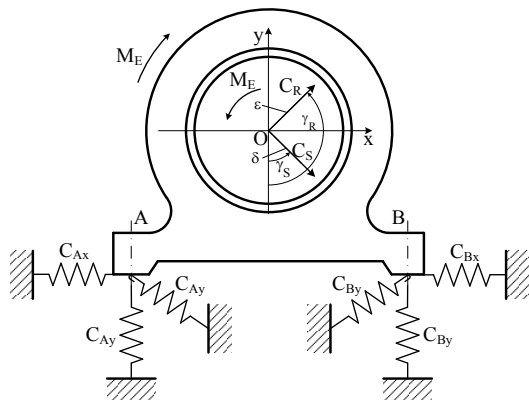


Рис. 2. Розрахункова схема віброагрегату

Графіки зміни вертикальних  $F_y$  і горизонтальних  $F_x$  зусиль в кріпильних вузлах для зведених коефіцієнтів жорсткості  $c=8,0$  МН/м і коефіцієнту лінійного опору  $\nu=10$  Нс/м в залежності від часу показані на рис. 3. Із графіків видно, що характер зміни амплітуд вертикальних зусиль відповідає характеру зміни амплітуд горизонтальних зусиль, однак, вертикальні зусилля мають більші значення.

На рис. 4 показані графіки зміни зусиль  $F_{Ax}$  (криві 1, 2) і  $F_{Ay}$  (криві 3, 4) в кріпильних вузлах в залежності від зведеної жорсткості кріпильних вузлів: при  $\nu=10$  Нс/м – криві 1 і 3; при  $\nu=500$  Нс/м – криві 2 і 4. Із графіків видно, що збільшення зведених коефіцієнтів лінійного опору зменшує, хоч і не значно, зусилля в кріпильних вузлах.

Значно більший вплив на зміну зусиль мають зведені коефіцієнти жорсткості. Стабілізація роботи кріпильних вузлів настає при  $C \geq 8,0$  МН/м.

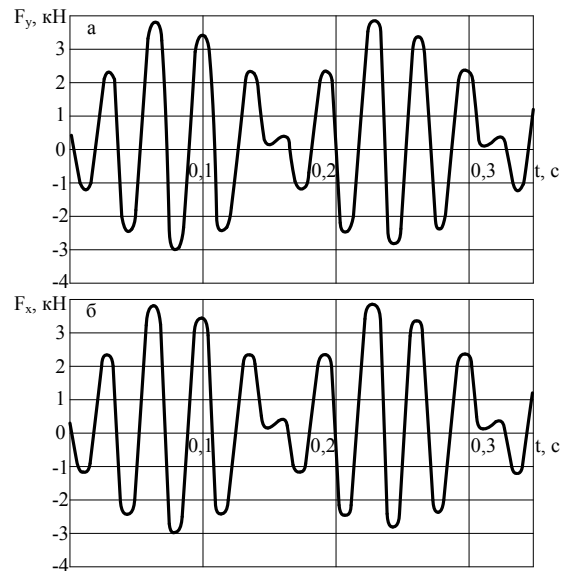


Рис. 3. Залежність зусиль у кріпильних вузлах від часу: а – у вертикальній площині  $OY$ ; б – у горизонтальній площині  $OX$

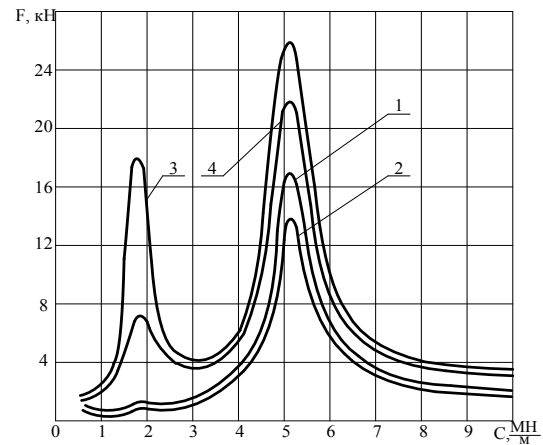


Рис. 4. Зміна зусиль у кріпильних вузлах в залежності від жорсткості

Зміна зусиль  $F_{Ax}$  (крива 1) і  $F_{Ay}$  (крива 2) в кріпильних вузлах при  $c=8$  МН/м і  $\nu=10$  Нс/м в залежності від відстані  $A$  між вузлами кріплення, показана на рис. 5, а, а від осі обертання ротора до кріплення статора – на рис. 5, б.

## Висновки

Виконані розрахунки показують, що за допомогою побудованої математичної моделі на стадії проектування технічного об'єкту, задаючись геометричними розмірами його основи і кріпильних вузлів, можна визначити амплітуди коливань, віброшвидкості, порівняти їх з технічними вимогами і вибрати раціональні параметри кріпильних вузлів.

Крім цього, на стадії проектування можна визначити зусилля, які будуть виникати в кріпильних вузлах, підібрати раціональні геометричні розміри корпусу. Це дозволить зменшити металомісткість основи віброагрегату в цілому, не порушуючи технічних вимог до його роботи, що дасть певний економічний ефект.

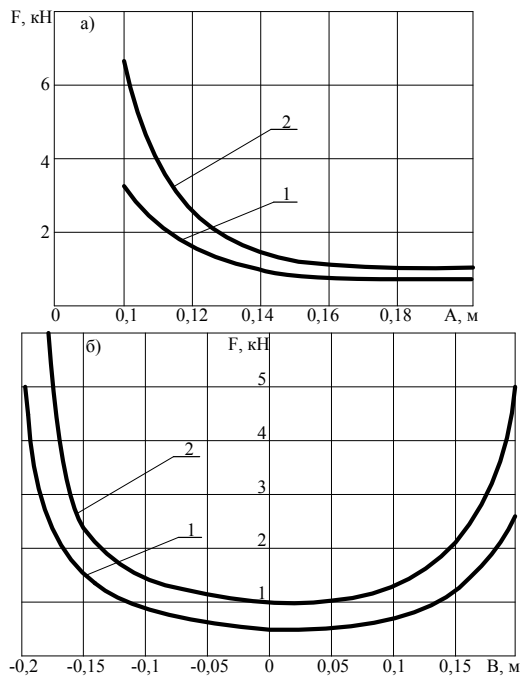


Рис. 5. Зміна зусиль у кріпильних вузлах в залежності від відстані: а – між опорами; б – між віссю ротора і кріпленням статора

Окрім того, розрахувавши значення осьових і поперечних сил від зовнішнього навантаження, які виникають в кріпильних вузлах, можна визначити потрібні моменти для загвинчування гайок і підібрати раціональні параметри різьбових з'єднань.

### Список літератури

1. Вейц В.Л., Вербовой П.Ф., Кочура А.Е. и др. Динамика управляемого электромеханического привода с асинхронными двигателями. – К.: Наук. думка, 1988. – 272 с.
2. Вибрация в технике: Справочник. В 6-ти томах / Ред. В.Н. Челомей. – М.: Машиностроение, 1980. – Т. 3. Колебания машин, конструкций и их элементов / Под ред. Ф.Д. Диметберга и К.С. Коменикова. – 1980. – 544 с.

3. Вибрации энергетических машин. Справочное пособие / Под ред. Н.В. Григорьева. – Л.: Машиностроение, 1974. – 464 с.

4. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1990. – 309 с.

5. Глухарев К.К., Фролов К.В. К теории колебаний механических систем ограниченного возбуждения // ДАН СССР. – 1971. – № 2, т. 199. – С. 285-288.

6. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. – М.: Наука, 1976. – 319 с.

7. Позняк Э.А., Цырлин А.Л. Вынужденные колебания и устойчивость произвольных роторных систем на подшипниках скольжения // МТТ. – 1967. – № 2. – С. 25-37.

8. Позняк Э.А. Автоколебания роторов со многими системами свободы // МТТ. – 1977. – №2. – С. 40-49.

9. Рагульскис К.М., Ионушас Рем. А., Бакишис А.К. Вибрации роторных систем. – Вильнюс: Моклас, 1976. – 231 с.

10. Синев А.В., Фролов К.В. Нелинейные пространственные колебания твердого тела с активной системой виброзащиты // Прикладная механика. Т. XIII. – 1977. – №2. – С. 80-90.

11. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. – Л.: Энергия, 1974. – 387 с.

12. Чабан В.И., Харченко Е.В. К расчету виброактивности элементов конструкции асинхронных двигателей // Электричество. – 1984. – №8. – С. 52-54.

13. Чабан В.И., Харченко Е.В. Математическая модель крутильных колебаний турбоагрегатов // Техническая электродинамика. – 1990. – №4. – С. 71-75.

14. Чабан В.И., Харченко Е.В., Козубаш В.М. Алгоритм расчета виброактивности ротора асинхронного двигателя // Электричество. – 1990. – №1. – С. 71-75.

15. Шубов И.Г. Шум и вибрация электрических машин. – Л.: Энергия, 1974. – 197 с.

Надійшла до редколегії 4.03.2008

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Х.В. Раковський, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ АГРЕГАТОВ С ЖЕСТКИМИ РОТОРАМИ

Е.В. Харченко, В.М. Палюх, Б.И. Червоний

Разработана математическая модель пространственных колебаний статора и ротора машинного агрегата с учетом динамической неустойчивости ротора и связи электромагнитных и механических колебательных явлений. На примере виброагрегата с приводом от асинхронного электрического двигателя проведен анализ динамических процессов, которые возникают в работе этой системы и определены рациональные параметры крепежных узлов.

**Ключевые слова:** математическая модель, вибрации, пространственные колебания, электромагнитное состояние, анализ, проектирование, оптимальные параметры.

## SPATIAL VIBRATIONS OF AGGREGATES WITH HARD ROTORS

Ye. V. Kharchenko, V. M. Palyukh, B. I. Chervoniy

The mathematical model of spatial vibrations of stator and rotor of machine aggregate is developed taking into account dynamic instability of rotor and connection of the electromagnetic and mechanical swaying phenomena. On the example of vibroaggregate with a drive from an asynchronous electric engine the analysis of dynamic processes which arise up in work of this system and the rational parameters of timber knots are certain is conducted.

**Keywords:** mathematical model, vibrations, spatial vibrations, electromagnetic state, analysis, planning, optimum parameters.