УДК 621.6.02 : 519.876.5

И.Г. Гусарова, Ю.В. Ягупова

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

Одной из важных задач, возникающих при эксплуатации многониточных линейных участков, является возможность численного моделирования аварийных ситуаций. В работе предлагается численный метод расчета нестационарных неизотермических режимов течения газа по участку трубопровода. Данный метод отличается от существующих способом решения системы нелинейных уравнений, полученной после применения метода характеристик к исходной системе уравнений математической модели. Метод позволяет с более высокой точностью рассчитывать реальные процессы течения природного газа как в штатных, так и в аварийных ситуациях.

Ключевые слова: *многониточный линейный участок, участок трубопровода, магистральный трубопровод, моделирование, нестационарный неизотермический режим, метод характеристик.*

Введение

В последние десятилетия мировое сообщество наиболее остро столкнулось с проблемами техногенных катастроф и последствиями дефицита энергетических ресурсов. Эти обстоятельства заставили по-новому оценить важность решения задач повышения промышленной, экологической и пожарной безопасности, эффективности предприятий энергетики и газовой промышленности.

Одним из основных компонентов данных предприятий являются системы газопроводов высокого давления. В настоящее время в мире отмечается снижение надежности работы трубопроводного транспорта и трубопроводов энергетических предприятий. Одной из главных причин аварий промышленных трубопроводов является их старение [2].

Поэтому современные технологии проектирования, строительства, эксплуатации и реконструкции сетей магистральных трубопроводов необходимо дополнять высокоточными методами численного моделирования полного жизненного цикла конкретной трубопроводной системы, в том числе методами моделирования режимов течения газа в аварийных или нештатных ситуациях. Такое дополнение указанных технологий гарантировано обеспечивает выработку научно обоснованных рекомендаций по повышению безопасности и эффективности работы трубопроводной системы. Оно также позволяет провести детальную верификацию и аргументированную корректировку принимаемых технических решений [2].

Будем рассматривать аварийные или нештатные ситуации, связанные с отключением или подключением крупных потребителей, несанкционированным отбором или утечкой в конце участка трубопровода (УТ). В этом случае режимы транспорта газа (РТГ) являются нестационарными неизотермическими.

Таким образом, актуальность необходимости научного обоснования и разработки качественно новых численных методов, позволяющих проводить моделирование нестационарных процессов течения газа и на их основе управление в нештатных ситуациях, происходящих в газотранспортной системе, которые бы позволяли вести расчет параметров газового потока с необходимой точностью и необходимым быстродействием, не вызывает сомнения.

Цель статьи: выбор математической модели нестационарных неизотермических режимов транспорта газа (ННРТГ) по УТ, применение метода характеристик для решения уравнений математической модели, разработка методов и алгоритмов решения полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, анализ результатов численных экспериментов. При этом математическая модель ННРТГ по участку трубопровода включает систему дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, заданное начальное распределение параметров газового потока и заданные граничные условия.

Формальная постановка задачи

Многониточный линейный участок, с точки зрения описания режимов транспорта газа, состоит участков трубопровода. В работе исследуется участок трубопровода длины L (рис. 1).

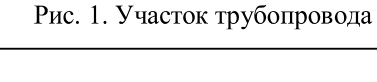

Рис. 1. Участок трубопровода

Так как в случае аварийной или нештатной ситуации, хотя бы на одной из границ, происходит резкое изменение граничных условий, то считаем, что режимы транспорта газа по УТ, являются нестационарными и неизотермическими.

Будем описывать ННРТГ с помощью функций массового расхода G(x,t), давления P(x,t), температуры T(x,t), заданных в области $G' = \{(x,t): 0 \le x \le L, 0 \le t \le T_к\}$, где $T_к$ – время окончания процесса.

Считаем, что в граничных узлах 1 и 2 заданы граничные условия 1-го и 2-го типа, т.е. заданы давление или расход газа соответственно, как функция времени, кроме того задана температура поступающего в 1-й узел газа:

$$\begin{cases} P(0,t) = P^0(t), \\ T(0,t) = T^0(t), \end{cases} \quad G(L,t) = G^0(t), \qquad (1)$$

где $P^0(t), T^0(t), G^0(t)$ – заданные функции.

Кроме того задано начальное распределение параметров газового потока:

$$\begin{aligned} &W(x,0) = W_0(x),\ P(x,0) = P_0(x), \\ &T(x,0) = T_0(x),\ x \in L, \end{aligned} \qquad (2)$$

где $W(x,t)$ – удельный массовый расход газа, $G(x,t) = W(x,t)S$; S – площадь поперечного сечения трубы; $W_0(x),\ P_0(x),\ T_0(x)$ – известные функции.

Решение рассматриваемой задачи моделирования может быть получено с помощью применения метода характеристик, т.е. путем сведения данной задачи к решению соответствующей краевой задачи [3].

Математическая модель ННРТГ по участку трубопровода

Для общего случая нестационарный неизотермический режим транспорта газа по участку трубопровода, представляющему собой цилиндрическую трубу постоянного диаметра, описывается квазилинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных, полученной из общих уравнений Навье-Стокса газовой динамики для одномерного случая [1]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + B(x,t,\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Phi(x,t,\varphi), \qquad (3)$$

где $B = \begin{pmatrix} 2\alpha TS\dfrac{W}{p} & 1-\alpha TS\dfrac{W^2}{p^2} & 0 \\ \alpha TS & 0 & 0 \\ \alpha S\dfrac{T^2}{p}(\gamma-1) & 0 & \alpha TS\dfrac{W}{p}\gamma \end{pmatrix}$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\beta TS\dfrac{W|W|}{p} - \dfrac{gp}{\alpha TS}\dfrac{dh}{dx} \\ 0 \\ -\dfrac{4K}{D}(\gamma-1)\dfrac{T}{p}(T-T_{гр}) - g(\gamma-1)\dfrac{TW}{p}\dfrac{dh}{dx} \end{pmatrix} -$$

матрицы, элементы которых заданные непрерывные и непрерывно дифференцируемые в некоторой области изменения своих аргументов функции переменных x, t, W, P, T ;

$\varphi = (W(x,t),\ P(x,t),\ T(x,t))$ – некоторое непрерывно дифференцируемое в области G' решение уравнения (3).

Метод и алгоритм решения

Применяя метод характеристик к системе (3) дополненной начальными (2) и граничными (1) условиями, найдем ее решение.

Уравнения направлений характеристик имеют вид: $dt = \bar{\lambda}_i(x,t,\varphi)dx$, $i = 1,2,3$, где $\bar{\lambda}_i$ – корни уравнения $\left|E - \bar{\lambda}B\right| = 0$, где E – единичная матрица. Отсюда, обозначая $a^2 = \alpha ST$, получим

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{p}{a^2 W\gamma},\ \bar{\lambda}_{1,3} = \frac{1}{\mp a + a^2\dfrac{W}{p}}.$$

При данном в области G решении системы (3) мы имеем три семейства характеристик и на каждом из этих семейств имеем свое дифференциальное соотношение:

$$-\frac{a^2T(-1+\gamma)}{P}dW + \frac{aT(-P+aW)(-1+\gamma)}{P^2}dP - \frac{aST^2W\beta(-1+\gamma)|W|}{P(P+aW)}dx = 0.$$

$$-\frac{a^2T(-1+\gamma)}{P}dW + \left(-\frac{T(P^2-a^2W^2)(-1+\gamma)}{P^2W\gamma}\right)dP + \frac{(P^2-a^2W^2(-1+\gamma)^2)}{PW\gamma}dT + \frac{a^2TW(-1+\gamma)\gamma\Phi_1 + (-P^2+a^2W^2(-1+\gamma)^2)\Phi_2}{a^2W^2\gamma^2}dx = 0,$$

$$-\frac{a^2T(-1+\gamma)}{P}dW + \frac{aT(P+aW)(-1+\gamma)}{P^2}dP + \frac{aST^2W\beta(-1+\gamma)|W|}{P(P-aW)}dx = 0.$$

Для численного решения полученных дифференциальных уравнений характеристик применим метод Массо, в основе которого лежит замена дифференциальных уравнений характеристик соответствующими конечноразностными уравнениями [3].

Идея метода следующая. Для расчета параметров газового потока при нестационарном режиме течения газа переходим к построению сетки: делим отрезок $[0,L]$ на N частей, получаем точки x_i, $i = 1,\dots,N+1$.

Таким образом, для каждой точки $i\ (i = 1,\dots,N+1)$ на k-м временном слое известны следующие параметры

$$(x_i, t_i, W_i(x_i, t_i), P_i(x_i, t_i), T_i(x_i, t_i)).$$

Для того чтобы найти параметры в каждой точке сетки на следующем k+1-м временном слое, берем параметры для двух точек т.1 и т.2 с данного k-го временного слоя и находим параметры третьей точки т.3 на следующем k+1-м временном слое (рис. 2). В качестве т.1 берем точку i, а в качестве т.2 берем точку $i+1$ с данного временного слоя, где $i = 1, ..., N+1$.

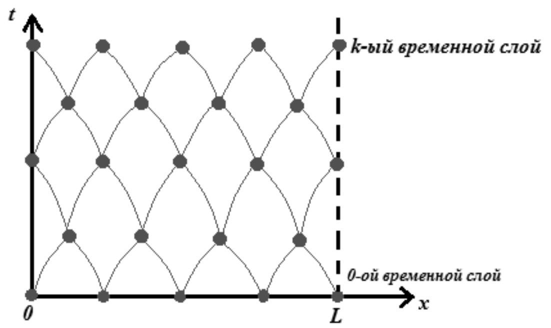

Рис. 2. Сетка дискретизации

Опишем алгоритм расчета параметров газового потока на участке трубопровода для k-го временного слоя.

1) В плоскости x и t рассмотрим две близкие точки 1 и 2, в которых известны все величины x_i, t_i, W_i, P_i, T_i, (i=1,2). Будем обозначать через $\overline{\lambda_{1i}}, \overline{\lambda_{2i}}, \overline{\lambda_{3i}}$ корни уравнения направлений характеристик, вычисленные для i-й точки.

2) Обозначим через O середину отрезка, соединяющего точки 1 и 2 (рис. 3).

3) Из точки 1 проведем прямую в направлении характеристики, соответствующей $\overline{\lambda_{11}}$, из точки 2 проведем прямую в направлении характеристики, соответствующей $\overline{\lambda_{32}}$.

Точку их пересечения обозначим номером 3. Координаты этой точки найдутся из решения системы

$$\begin{cases} t_3^{(1)} - t_1 = \overline{\lambda_{11}}(x_3^{(1)} - x_1), \\ t_3^{(1)} - t_2 = \overline{\lambda_{32}}(x_3^{(1)} - x_2). \end{cases}$$

4) Из уравнений

$$\begin{cases} t_3^{(1)} - t_0^{(1)} = \overline{\lambda_{20}}(x_3^{(1)} - x_0^{(1)}), \\ t_1 - t_0^{(1)} = \dfrac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1}(x_1 - x_0^{(1)}) \end{cases}$$

найдем новые координаты точки $O_1 = (x_0^{(1)}, t_0^{(1)})$ (рис. 3). Вводя обозначение

$$\nu^{(1)} = \frac{x_0^{(1)} - x_1}{x_2 - x_0^{(1)}} = \frac{t_1 - t_0^{(1)}}{t_0^{(1)} - t_2},$$

линейной интерполяцией определяем значения $W(x,t), P(x,t), T(x,t)$ в точке O_1:

$$\begin{cases} W_0^{(1)} = \dfrac{W_1 + \nu^{(1)} W_2}{1 + \nu^{(1)}}; \\ P_0^{(1)} = \dfrac{P_1 + \nu^{(1)} P_2}{1 + \nu^{(1)}}; \\ T_0^{(1)} = \dfrac{T_1 + \nu^{(1)} T_2}{1 + \nu^{(1)}}. \end{cases}$$

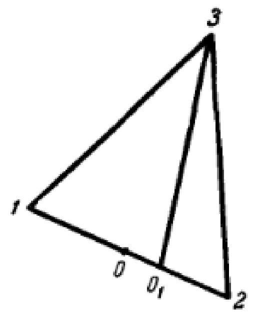

Рис. 3. Схема поиска координат точки 3

5) Далее, принимая отрезки 13,23 и $0_1 3$ за характеристики и используя дифференциальные соотношения вдоль характеристик, пишем систему уравнений для определения первых приближений $W(x,t), P(x,t), T(x,t)$ в точке 3:

$$\begin{cases} -\dfrac{a^2 T_1(-1+\gamma)}{P_1}(W_3^{(1)} - W_1) + \dfrac{aT_1(-P_1 + aW_1)(-1+\gamma)}{P_1^2}(P_3^{(1)} - P_1) - \\ -\dfrac{aST_1^2 W_1 \beta(-1+\gamma)|W_1|}{P_1(P_1 + aW_1)}(x_3^{(1)} - x_1) = 0, \\ -\dfrac{a^2 T_2(-1+\gamma)}{P_2}(W_3^{(1)} - W_2) + \dfrac{aT_2(P_2 + aW_2)(-1+\gamma)}{P_2^2}(P_3^{(1)} - P_2) + \\ +\dfrac{aST_2^2 W_2 \beta(-1+\gamma)|W_2|}{P_2(P_2 - aW_2)}(x_3^{(1)} - x_2) = 0, \\ -\dfrac{a^2 T_0^{(1)}(-1+\gamma)}{P_0^{(1)}}(W_3^{(1)} - W_0^{(1)}) + \left(-\dfrac{T_0^{(1)}(P_0^{(1)2} - a^2 W_0^{(1)2})(-1+\gamma)}{P_0^{(1)2} W_0^{(1)} \gamma}\right) \cdot \\ \cdot(P_3^{(1)} - P_0^{(1)}) + \dfrac{(P_0^{(1)2} - a^2 W_0^{(1)2}(-1+\gamma)^2)}{P_0^{(1)} W_0^{(1)} \gamma}(T_3^{(1)} - T_0^{(1)}) + \\ +\dfrac{a^2 T_0^{(1)} W_0^{(1)}(-1+\gamma)\gamma \Phi_1 + (-P_0^{(1)2} + a^2 W_0^{(1)2}(-1+\gamma)^2)\Phi_2}{a^2 W_0^{(1)2} \gamma^2} \times \\ \times(x_3^{(1)} - x_0^{(1)}) = 0. \end{cases}$$

6) Найдя точку 3: $(x_3^{(1)}, t_3^{(1)}, W_3^{(1)}, P_3^{(1)}, T_3^{(1)})$ $(l = 1, 2, ...)$, произведем ее уточнение следующим способом. Вычисляем значения $\overline{\lambda_{13}^{(1)}}, \overline{\lambda_{23}^{(1)}}, \overline{\lambda_{33}^{(1)}}$, используя новое приближение точки 3.

7) Находим величины:

$$\overline{\lambda_{11}^{(1+1)}} = \frac{1}{2}(\overline{\lambda_{11}} + \overline{\lambda_{13}^{(1)}}),\ \overline{\lambda_{32}^{(1+1)}} = \frac{1}{2}(\overline{\lambda_{32}} + \overline{\lambda_{33}^{(1)}}),$$

$$\overline{\lambda_{20}^{(1+1)}} = \frac{1}{2}(\overline{\lambda_{20}^{(1)}} + \overline{\lambda_{23}^{(1)}}).$$

8) Найдем координаты уточненных точек 0 и 3:

$$\begin{cases} t_3^{(l+1)} - t_1 = \overline{\lambda_{11}^{(l+1)}}(x_3^{(l+1)} - x_1), \\ t_3^{(l+1)} - t_2 = \overline{\lambda_{32}^{(l+1)}}(x_3^{(l+1)} - x_2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_3^{(l+1)} - t_0^{(l+1)} = \overline{\lambda_{20}^{(l+1)}}(x_3^{(l+1)} - x_0^{(l+1)}), \\ t_1 - t_0^{(l+1)} = \dfrac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1}(x_1 - x_0^{(l+1)}). \end{cases}$$

9) Вычислим значения $\nu^{(l+1)}, W_0^{(l+1)}, P_0^{(l+1)}, T_0^{(l+1)}$.

10) Используя эти формулы, находим значения $W_3^{(l+1)}, P_3^{(l+1)}, T_3^{(l+1)}$.

11) Если $\left|W_3^{(l+1)} - W_3^{(l)}\right| < \varepsilon$, $\left|P_3^{(l+1)} - P_3^{(l)}\right| < \varepsilon$, $\left|T_3^{(l+1)} - T_3^{(l)}\right| < \varepsilon$, $\left|x_3^{(l+1)} - x_3^{(l)}\right| < \varepsilon$, $\left|t_3^{(l+1)} - t_3^{(l)}\right| < \varepsilon$, то параметры $W_3^{(l+1)}, P_3^{(l+1)}, T_3^{(l+1)}, x_3^{(l+1)}, t_3^{(l+1)}$ найдены, (если k+1 – нечетное, то это $i+1$ точка на следующем k+1-м временном слое, если k+1 – четное, то это i точка на следующем k+1-м временном слое) переходим к п.12, в противном случае $l = l+1$ переходим к п.6.

12) Если $i \le N-1$, то $i = i+1$ и переход к п.1, в противном случае все внутренние точки на данном временном слое найдены и переход к п.13.

13) Если k+1 – нечетное, то расчет временного слоя закончен и переход к п.15, в противном случае переход к п.14.

14) Находим параметры т.1 на k+1-м временном слое по одному алгоритму (с учетом граничных условий в начале участка) и параметры точки $N+1$ на k+1-м временном слое по другому алгоритму (с учетом граничных условий в конце участка) и расчет временного слоя закончен.

15) Если $k \le k_{max} - 1$, то $k = k+1$ и переход к п.1, иначе расчет закончен.

Для решения поставленной задачи расчета ННРТГ для УТ был создан программный продукт, написанный в математическом пакете Mathematica 8.0., позволяющий рассчитывать параметры газового потока по УТ на каждом временном слое, которые зависят от начального распределения и граничных условий.

Выводы

Выбрана математическая модель ННРТГ по УТ, для решения уравнений математической модели применен метод характеристик, разработан метод и алгоритм решения полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В результате ряда проведенных численных экспериментов было показано, что хорошие результаты по точности найденных параметров газового потока и по времени расчета этих параметров получаются при выборе линейного участка небольшой длины и при выборе дискреты по пространственной переменной $\Delta x = 1$км и меньше.

Список литературы

1. Гусарова И.Г. Классы задач моделирования и численного анализа нестационарных режимов работы газотранспортной системы / И.Г. Гусарова, Ю.В. Боярская // Восточно-Европейский журнал. – 2010. – 3/6(45). – С. 26-32.

2. Селезнев В.Е. Основы численного моделирования магистральных трубопроводов. Изд. 2-е, перераб. и доп. / В.Е. Селезнев, В.В. Алешин, С.Н. Прялов; под ред. В.Е. Селезнева. – М.: МАКС Пресс, 2009. – 436 с.

3. Березин И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – Т. 2. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 620 с.

Поступила в редколлегию 26.01.2015

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. В.М. Задачин, Харьковский национальный экономический университет, Харьков.

ЧИСЕЛЬНЕ МОДУЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМІВ ТЕЧІЇ ГАЗУ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

І.Г. Гусарова, Ю.В. Ягупова

Одним з важливих завдань, що виникають при експлуатації багатониткових лінійних ділянок, є можливість чисельного моделювання аварійних ситуацій. У роботі пропонується чисельний метод розрахунку нестаціонарних неізотермічних режимів течії газу по ділянці трубопроводу. Даний метод відрізняється від існуючих способом вирішення системи нелінійних рівнянь, отриманої після застосування методу характеристик до вихідної системи рівнянь математичної моделі. Метод дозволяє з більш високою точністю розраховувати реальні процеси течії природного газу як в штатних, так і в аварійних ситуаціях.

Ключові слова: *багатониткова лінійна ділянка, ділянка трубопроводу, магістральний трубопровід, моделювання, нестаціонарний неізотермічній режим, метод характеристик.*

THE NUMERICAL SIMULATION OF NONSTATIONARY MODES OF GAS FLOW WITH THE CHARACTERISTICS METHOD

I.G. Gusarova, Y.V. Yagupova

One of the important tasks arising from maintenance of multi-line segments is the ability to numerically simulate emergency situations. The objective of this paper is to describe the method of calculating nonstationary nonisothermal modes of gas flow in pipeline section.This method differs from existing methods in the way of solving systems of nonlinear equations obtained after the application of the method of characteristics to the original system of equations of mathematical model. The method allows to simulate real processes of natural gas flow more precisely in both standard and emergency situations.

Keywords: *multiline linear segment, pipeline segment, main pipeline, modeling, nonstationary nonisothermal mode, the characteristics method.*