УДК 004.6: 511: 621.394.147

М.Л. Петришин[1], Л.Б. Петришин[1,2]

[1] *Прикарпатський національний університет, Івано-Франківськ*
[2] *AGH University of Science and Technology, Cracov, Poland*

АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ФІБОНАЧЧІ-ПОДІБНИХ МЕТОДІВ КОДУВАННЯ ПОВІДОМЛЕНЬ

Проаналізовано відомі полібоначчі-подібні системи числень. Запропоновано новий метод формування числових Фібоначчі-подібних рядів як основи альтернативних систем числень та способів кодування повідомлень. Для кожної із систем визначено характеристики надлишковості та здійснено їх порівняльний аналіз. Вперше визначено спосіб отримання двійкової системи числення за рядом трансформації полібоначчі-подібних систем.

Ключові слова: *Фібоначчі, полібоначчі, двійковий, код, надлишковість.*

Вступ

Динаміка глобалізації соціуму передбачає впровадження розосереджених інфосистем з розвиненою мережею інфообміну. Реалізація системних функцій формування, перетворення форми та кодування повідомлень в тих чи інших системах кодування виявляються вирішальними щодо обсягів формованих масивів даних, навантаження на канали зв’язку та обчислювального навантаження на засоби цифрової обробки даних. Кожен із методів кодування повідомлень характеризується визначеними техніко-економічними характеристиками, перевагами та недоліками при реалізації тих чи інших системних інформаційних функцій [1]. Обґрунтування та вибір способу кодування повідомлень, який би враховував специфіку джерела інформації, задовольняв вимоги користувача і мінімально навантажував засоби інфообміну та цифрової обробки є *актуальним* завданням на стадії розробки, проектування та впровадження розосереджених інфосистем. В класі позиційних відомі Фібоначчі-подібні системи числень [2], що характеризуються надлишковістю кодування повідомлень, яка, з одного боку дозволяє підвищити завадозахист інфообміну та цифрової обробки, проте, спричиняє до перенавантаження каналів зв’язку та вимагає збільшення обчислювальної потужності апаратного забезпечення інфосистеми. При розробці засобів перетворення форми інформації повстало завдання аналізу властивостей Фібоначчі-подібних систем числень та обґрунтування доцільності їх застосування для реалізації визначених системних функцій.

Метою проведених досліджень була оцінка надлишковості інформаційних потоків Фібоначчі-подібних методів кодування повідомлень, а також їх порівняння із ненадлишковими методами кодування, зокрема, позиційним двійковим. Для досягнення мети проаналізовано повні масиви кодового представлення даних для кожної Фібоначчі-подібної системи числення, визначено надлишковість щодо кількості дубль-кодів для кожного повідомлення та надлишковість розрядів Фібоначчі-кодування по відношенню до розрядності двійкового коду для повідомлень тієї ж розмірності. Виявлено джерела формування надлишковості та запропоновано новий метод формування Фібоначчі-подібних рядів, який дозволяє уникнути дублювання значень вагових позицій та зменшити надлишковість кодування Фібоначчі, що, в свою чергу, дозволило підвищити ефективність кодування. Здійснимо аналіз параметрів та властивостей класичного методу кодування Фібоначчі, його модифікованого варіанту, а також полібоначчі методів із редукованою надлишковістю.

Аналіз властивостей класичної системи Фібоначчі

Система числення Фібоначчі належить до класу позиційних систем, в якій значення ваг F_i розрядних коефіцієнтів визначаються рекурентним співвідношенням

$$F_i=F_{i-1}+F_{i-2}. \quad (1)$$

Довільне число N представляється сумою

$$N=a_nF_n+ a_{n-1}F_{n-1}+...+ a_iF_i+...+ a_1F_1,$$

де $a_i = \{0, 1\}$ – бінарні значення коефіцієнтів ваг розрядних позицій F_i, що формують наступну мережу значень ваг

	F_f	F_e	F_d	F_c	F_b	F_a	F_9	F_8	F_7	F_6	F_5	F_4	F_3	F_2	F_1
...	610	377	233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1

Істотним обмеженням такого представлення чисел є можливість кодування тільки натуральних чисел, оскільки неможливо здійснити рекурентний перехід через значення нуля за допомогою формули (1), не визначено процедури подання чисел в околі нуля та від’ємних чисел. Різні формули подання додатних $F_i=F_{i-1}+F_{i-2}$ та від’ємних $F_{-n}=(-1)^{n+1}F_n$ чисел

[3] значно ускладнюють аналітику формалізації процедур перетворення форми інформації та виконання арифметичних операцій. При цьому формується наступний ряд додатних і від'ємних числових значень розрядних коефіцієнтів

F_8	F_7	F_6	F_5	F_4	F_3	F_2	F_1	F_0	F_{-1}	F_{-2}	F_{-3}	F_{-4}	F_{-5}	F_{-6}	F_{-7}	F_{-8}
21	13	8	5	3	2	1	1	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21

Дублювання додатних значень ваг 1, 2, 5, 13 і т.д. в частині додатних значень зліва, а також в частині від'ємних значень справа спричиняє істотну надлишковість кодів представлення, а особливо ускладнення алгоритмів виконання арифметичних операцій, що ставить під сумнів ефективність і доцільність побудови процесорів Фібоначчі.

З іншого боку, основне джерело надлишковості кодового представлення полягає в самій процедурі формування ряду Фібоначчі (1), яка передбачає наскрізне неодноразове дублювання кожного із значень вагових позицій.

Здійснимо оцінку надлишковості сформованих дубль-кодів для кожного із натуральних чисел представлення. На рис. 1 наведено графічну залежність кількості дубль-кодів для значень чисел натурального ряду діапазону 0÷377.

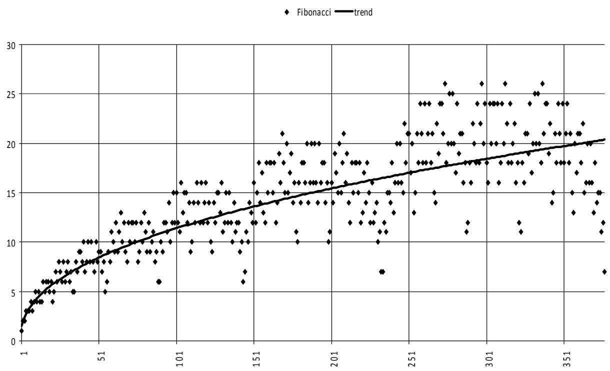

Рис. 1. Кодова надлишковість класичної системи числення Фібоначчі

Наприклад, для довільної вибірки чисел N формується наступна кількість дубль-кодів d (табл. 1).

Таблиця 1

Вибіркові значення кодової надлишковості d класичного кодування Фібоначчі

N	273	168	103	64	24	14	9	6	3
d	26	21	16	13	8	6	5	4	3

Можна підсумувати, що значення кодової надлишковості зростають із збільшенням значення натурального числа в представленні Фібоначчі.

Здійснимо оцінку абсолютної розрядної надлишковості класичного кодування Фібоначчі n_F / n_2, яку визначимо відношенням кількості розрядів n_F, необхідних для представлення чисел в коді Фібоначчі F, до кількості розрядів n_2 ненадлишкового двійкового коду в функції значень натурального числового ряду (рис. 2). Максимальне значення числа, яке можна записати i-розрядним кодом Фібоначчі, визначається декрементованим значенням позиції F_{i+1} -1.

Наприклад, для довільної вибірки чисел N формуються наступні значення розрядної надлишковості n_F / n_2 (табл. 2).

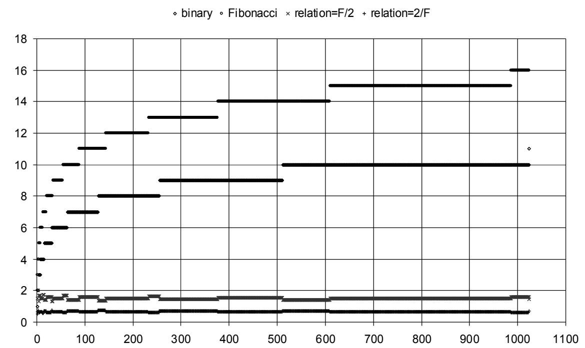

Рис. 2. Розрядна надлишковість класичної системи числення Фібоначчі

Таблиця 2

Вибіркові значення розрядної надлишковості класичного кодування Фібоначчі

N	n_F	n_2	n_F / n_2	n_2 / n_F
21	8	5	1,6	0,63
987	16	10	1,6	0,63
$2{,}2\ 10^6$	32	22	1,(45)	0,69
$1{,}1\ 10^{13}$	64	44	1,(45)	0,69
$2{,}5\ 10^{26}$	128	88	1,(45)	0,69

Із отриманих результатів обчислень можна зробити висновок, що абсолютна розрядна надлишковість кодування Фібоначчі порівняно із двійковим знаходиться в межах 1,45÷1,6 і усереднено для розрядності сучасних комп'ютеризованих систем (32÷128) може бути оцінена порядком 45%.

З іншого боку, абсолютну розрядну надлишковість можна оцінити відношенням максимальних значень чисел у двійковому кодовому представленні до представлення чисел в коді Фібоначчі для тієї самої кількості розрядів обох кодів. Графічна залежність абсолютної розрядної надлишковості $2^n / F$ від значення розрядності n і значень натуральних чисел класичного кодового представлення Фібоначчі F та двійкового 2^n наведена на рис. 3. Наприклад, для розрядності кодів n можна закодувати кількість чисел у коді Фібоначчі F та двійковому 2^n, для яких абсолютна розрядна надлишковість визначається відношенням $2^n / F$ і наведена в табл. 3.

За отриманими результатами можна пісумувати надзвичайно високу розрядну надлишковість, яка для 64-розрядних систем досягає значення $2^n / F=1738584$.

Аналіз систем полібоначчі

В кінці минулого та на початку поточного століття опубліковано цілий ряд результатів щодо побудови функціонально розширених рядів Фібоначчі і на їх основі систем числень, що можна узагальнити як полібоначчі [4 - 6], в яких кожне наступне число числового ряду формується як сума не двох, а кількох попередніх числових значень.

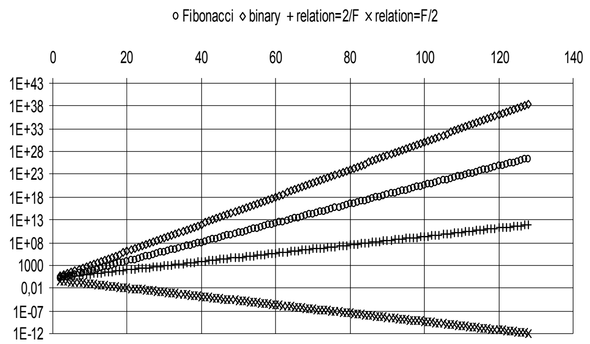

Рис. 3. Розрядна надлишковість класичної системи числення Фібоначчі

Таблиця 3

Вибіркові значення абсолютної розрядної надлишковості класичного кодування Фібоначчі

n	F	2^n	2^n / F	F / 2^n
8	21	256	12,2	0,08
16	987	6,55 10^4	66,4	0,015
32	2,2 10^6	4,3 10^9	1971,7	0,0005
64	1,1 10^{13}	1,84 10^{19}	1,7 10^6	5,8 10^{-7}
128	2,5 10^{26}	3,4 10^{38}	1,4 10^{12}	7,4 10^{13}

Найпростішою із класу полібоначчі є система трибоначчі [7 – 12], розрядні коефіцієнти якої визначаються числовим рядом, кожне поточне значення числа якого визначається не двома, а трьома молодшими суміжними значеннями згідно наступного аналітичного виразу [13]:

$$F_i=F_{i-1}+F_{i-2}+F_{i-3}. \qquad (3)$$

$$F_1=1;\ F_0=0;\ F_{-1}=0.$$

Оцінку надлишковості сформованих дубль-кодів для кожного із натуральних чисел представлення зображено на рис. 4 для значень чисел натурального ряду діапазону 0÷927.

Рис. 4. Кодова надлишковість системи числення трибоначчі

Наприклад, для довільної вибірки чисел N формується наступна кількість дубль-кодів d (табл. 4).

Таблиця 4

Вибіркові значення кодової надлишковості системи трибоначчі

N	941	518	512	163	82	45	14	7	1
d_3	12	10	9	8	6	5	4	3	2

Можна підсумувати, що значення кодової надлишковості зростає із збільшенням значення натурального числа в представленні трибоначчі.

Здійснимо оцінку абсолютної розрядної надлишковості кодування трибоначчі n_{F3}/n_2, яку визначимо відношенням кількості розрядів n_F, необхідних для представлення чисел в коді трибоначчі F_3, до кількості розрядів n_2 ненадлишкового двійкового коду в функції значень натурального числового ряду (рис. 5).

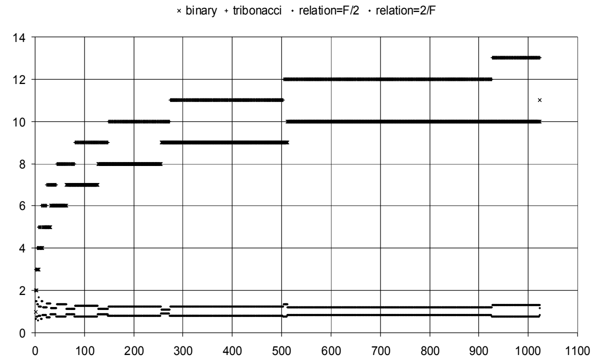

Рис. 5. Розрядна надлишковість системи числення трибоначчі

Наприклад, для довільної вибірки чисел N, формуються наступні значення розрядної надлишковості n_{F3} / n_2 (табл. 5).

Таблиця 5

Вибіркові значення розрядної надлишковості кодування трибоначчі

N	n_{F3}	n_2	n_{F3} / n_2	n_2 / n_{F3}
44	8	6	1,(3)	0,75
5,8 10^3	16	13	1,23	0,81
9,8 10^7	32	27	1,19	0,84
2,9 10^{16}	64	55	1,16	0,86
2,5 10^{33}	128	111	1,15	0,87

За отриманими результатами обчислень можна зробити висновок, що абсолютна розрядна надлишковість кодування трибоначчі порівняно із двійковим знаходиться в межах 1,15÷1,(3) і усереднено для розрядності сучасних комп'ютеризованих систем може бути оцінена порядком 15÷33%.

Здійснимо оцінку абсолютної розрядної надлишковості відношенням максимальних значень чисел у двійковому кодовому представленні до представлення чисел в коді трибоначчі для тієї самої кількості розрядів обох кодів. Графічна залежність абсолютної розрядної надлишковості 2^n / F_3 від значення розрядності n і значень натуральних чисел кодового представлення трибоначчі F_3 та двійкового 2^n наведена на рис. 6.

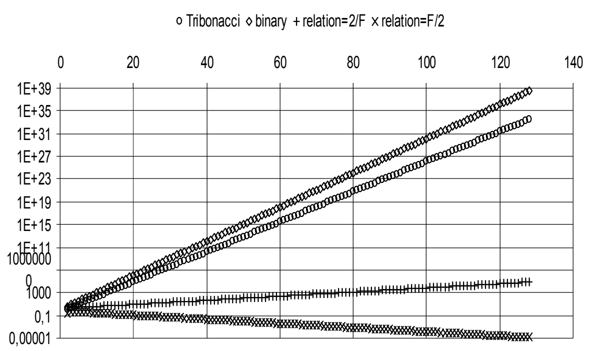

Рис. 6. Розрядна надлишковість
системи числення трибоначчі

Наприклад, для розрядності кодів n можна закодувати кількість чисел у коді трибоначчі F_3 та двійковому 2^n, для яких абсолютна розрядна надлишковість визначається відношенням $2^n / F_3$ і наведена в табл. 6.

Таблиця 6

Вибіркові значення абсолютної розрядної надлишковості кодування трибоначчі

n	F_3	2^n	$2^n / F_3$	$F_3 / 2^n$
8	44	256	5,8	0,17
16	$5{,}8\ 10^3$	$6{,}55\ 10^4$	11,36	0,09
32	$9{,}9\ 10^7$	$4{,}3\ 10^9$	43,4	0,023
64	$2{,}9\ 10^{16}$	$1{,}84\ 10^{19}$	633,5	$1{,}6\ 10^{-3}$
128	$2{,}5\ 10^{33}$	$3{,}4\ 10^{38}$	$1{,}3\ 10^5$	$7{,}4\ 10^{-6}$

За отриманими результатами можна пісумувати високу розрядну надлишковість, яка для 64-розрядних систем досягає значення $2^n / F_3$=344.

Аналогічно визначаються системи з більш глибоким зв'язком поточного розряду F_i з молодшими розрядами, наприклад, тетрабоначчі [14]:

$$F_i=F_{i-1}+F_{i-2}+F_{i-3}+F_{i-4},$$
$$F_1=1;\ F_0=0;\ F_{-1}=0;\ F_{-2}=0.$$

пентабоначчі [15]:

$$F_i=F_{i-1}+F_{i-2}+F_{i-3}+F_{i-4}+F_{i-5},$$
$$F_1=1;\ F_0=0;\ F_{-1}=0;\ F_{-2}=0;\ F_{-3}=0.$$

гексабоначчі [16]

$$F_i=F_{i-1}+F_{i-2}+F_{i-3}+F_{i-4}+F_{i-5}+F_{i-6},$$
$$F_1=1;\ F_0=0;\ F_{-1}=0;\ F_{-2}=0;\ F_{-3}=0;\ F_{-4}=0.$$

гептабоначчі [17]:

$$F_i=F_{i-1}+F_{i-2}+F_{i-3}+F_{i-4}+F_{i-5}+F_{i-6}+F_{i-7},$$
$$F_1=1;\ F_0=0;\ F_{-1}=0;\ F_{-2}=0;\ F_{-3}=0;\ F_{-4}=0;\ F_{-5}=0.$$

октабоначчі [18]:

$$F_i=F_{i-1}+F_{i-2}+F_{i-3}+F_{i-4}+F_{i-5}+F_{i-6}+F_{i-7}+F_{i-8},$$
$$F_1=1;\ F_0=0;\ F_{-1}=0;\ F_{-2}=0;\ F_{-3}=0;\ F_{-4}=0;\ F_{-5}=0;\ F_{-6}=0.$$

і т.д. до повнорозрядного вектора суми – полібоначчі

$$F_i=F_{i-1}+F_{i-2}+\ldots+F_{i-n+1}+F_{i-n}, \qquad (4)$$
$$F_1=1;\ F_0=0;\ F_{-1}=0;\ \ldots\ F_{-n+3}=0;\ F_{-n+2}=0.$$

Існують Фібоначчі-подібні системи, в яких вектор рекурентної суми будується не для суміжних позицій, а віддалених між собою наступного типу [6]:

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-m} \quad \text{для } i > m+1;$$
$$F_i = i-1 \quad \text{для } 1 < i \le m+1,\ m \ge 2.$$

Оскільки такі системи генерують ще вищу надлишковість, ніж полібоначчі [6], в матеріалі даної статті вони виключені з аналізу.

Для цілої множини Фібоначчі-подібних систем від класичної (1) до повнорозрядної (4) здійснено аналіз характеристик кодової та двох типів розрядної надлишковості. Оскільки класична система Фібоначчі є частковим випадком систем полібоначчі, віднесемо її до загального класу полібоначчі. На рис. 7 зображено суміщені графіки залежностей кодової надлишковості полібоначчі систем числення, а також розрядності кодових слів n в функції від довжини масиву даних N, який вони дозволяють кодувати.

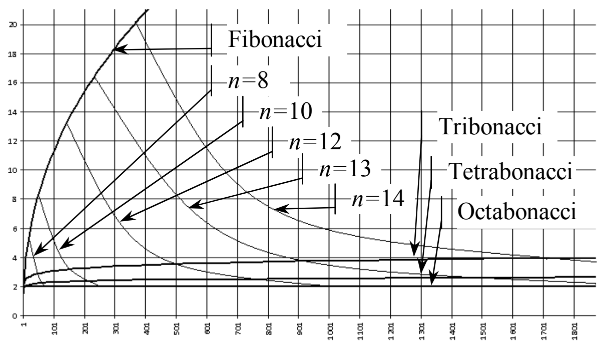

Рис. 7. Залежності кодової надлишковості
систем числення полібоначчі

Оскільки графічна залежність Фібоначчі значно перевищує показники надлишковості для полібоначчі, на рис. 8 наведено ті самі залежності без функції Фібоначчі у відповідному масштабі.

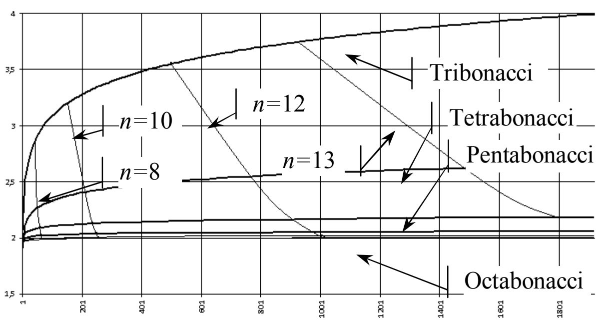

Рис. 8. Залежності кодової надлишковості
систем числення полібоначчі (рис. 7)

За отриманими результатами можна підсумувати, що показники надлишковості для систем полібоначчі значно нижчі від системи Фібоначчі та завжди перевищують параметри оптимального пакування ненадлишкових систем числення, наприклад, двійкової. Ефективність систем полібоначчі досить близько наближається до оптимальної залежності, проте, ніколи їй не порівняється. Це можна також підтвердити значеннями коефіцієнтів *ratio* відношення двох суміжних розрядних позицій, що наведені в табл. 7.

Таблиця 7

Значення відношення двох суміжних розрядних позицій для систем полібоначчі

-acci	∑	*ratio*
Fibon	2	1,618033989
Tribon	3	1,839286755
Tetrabon	4	1,927561975
Pentabon	5	1,965948237
Hexabon	6	1,983582843
Heptabon	7	1,991964197
Octabon	8	1,99603118
Polibon	n	1,(9)

Отримані позитивні результати зменшення надлишковості кодування повідомлень на основі розрядних мереж полібоначчі визначають перспективу подальшого дослідження можливостей їх прикладного застосування в техніці перетворення форми та цифрової обробки інформації.

Слід відмітити, що для кодування полібоначчі притаманні наведені вище недоліки класичного кодування Фібоначчі як цілому класу, зокрема, вже проаналізовані параметри розрядної надлишковості та згадані обмеження кодування від'ємних чисел за допомогою єдиної твірної (генераторної) формули, а також можливість здійснення ітераційного переходу через значення нуля. Це зумовило необхідність пошуку та розробки нових методів, які б дозволили уникнути вказаних недоліків класичного кодування полібоначчі.

Модифікований метод формування Фібоначчі-подібних числових рядів та побудови систем числень

Вперше запропоновано застосувати нову процедуру рекурентного генерування фібоначчі-подібного числового ряду в якості розрядних коефіцієнтів. Проаналізуємо модифікований Фібоначчі метод як найпростіший щодо пояснення рекурентного формування послідовностей та визначення їх властивостей.

Суть запропонованого методу полягає в тому, що при рекурентному додаванні двох значень суміжних попередніх розрядів F_{i-1} та F_{i-2} до значення суми наступної старшої позиції F_i додається одиниця згідно співвідношення:

$$F_i=F_{i-1}+F_{i-2}+1;$$
$$F_1=1;\ F_0=0;\ (F_{-1}=0).$$

Отримана система числення також класифікується як позиційна система, в якій довільне число N представляється сумою

$$N=a_nF_n+ a_{n-1}F_{n-1}+...+ a_iF_i+...+ a_1F_1,$$

де $a_i = \{0, 1\}$ – бінарні значення коефіцієнтів розрядних позицій F_i, що формують наступну мережу значень ваг

F_f	F_e	F_d	F_c	F_b	F_a	F_9	F_8	F_7	F_6	F_5	F_4	F_3	F_2	F_1
1596	986	609	376	232	143	88	54	33	20	12	7	4	2	1

Основною властивістю такого ряду є відсутність повторення кожного старшого значення ваги розряду та повторення його значення як суми двох попередніх, що і було основною причиною значної надлишковості класичного кодування Фібоначчі [19 – 23]. При цьому зберігається те ж саме значення «золотої пропорції» відношення старших до молодших суміжних значень розрядних позицій, що із збільшенням значень числового ряду набуває значень *ratio*= 1,618033989.

Іншою досягнутою перевагою запропонованого методу, яка стояла як одне із основних завдань, є наявність єдиної формули (5) рекурентного генерування числового ряду як для додатних, так і для від'ємних значень, що дозволяє здійснити також плинний рекурентний перехід через значення нуля. Та ж сама формула для від'ємних значень, дещо в зміненому вигляді, адаптованому до формування індексів i від'ємних значень: $-1 + F_{-i+2} + F_{-i+1} += F_{-i}$. Наступна перевага – відсутня надлишковість дублювання розрядів додатних позицій в області від'ємних та додатних чисел, розрядна мережа яких є регулярною симетричною, що дозволяє застосовувати визначену кількість розрядів вагової мережі.

F_7	F_6	F_5	F_4	F_3	F_2	F_1	F_0	F_0	F_{-1}	F_{-2}	F_{-3}	F_{-4}	F_{-5}	F_{-6}	F_{-7}
33	20	12	7	4	2	1	+0	-0	-1	-2	-4	-7	-12	-20	-33

Новою властивістю, яка потребує наступних досліджень, є наявність двох значень нуля, при чому для довільної системи полібоначчі кількість нулів відповідає кількості аргументів в сумі полібоначчі, наприклад, для трибоначчі – три, для пентабоначчі – п'ять, для октабоначчі – вісім нулів і т.д.

Запропонований метод повністю не ліквідує кодову надлишковість, оскільки в своїй основі він є Фібоначчі-подібним. Результати досліджень показали, що для кодів, в яких присутня одиниця в розряді F_1 і двох довільних суміжних інших F_i та F_{i-1} розрядах для відповідного їм числа існують дубль-коди, в яких замість трьох вказаних одиниць формується тільки одна одиниця в F_{i+1} розряді,

	...	F_{i+1}	F_i	F_{i-1}	...	...	F_1	F_0
20	0	0	1	1	0	0	1	0
20	0	1	0	0	0	0	0	0

Наприклад для чисел 12 та 19:

	F_9	F_8	F_7	F_6	F_5	F_4	F_3	F_2	F_1	F_0
12	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
12	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

де $F_1 = 1$, $F_i = F_4$, $F_{i-1} = F_3$ і $F_{i+1} = F_5$, або ж

	F_9	F_8	F_7	F_6	F_5	F_4	F_3	F_2	F_1	F_0
19	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
19	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0

де $F_1 = 1$, $F_i = F_3$, $F_{i-1} = F_2$ і $F_{i+1} = F_4$.

Рекомендовано застосовувати так звані згорнуті коди із зменшеною кількістю одиниць. Для вище наведених прикладів

	F_9	F_8	F_7	F_6	F_5	F_4	F_3	F_2	F_1	F_0
12	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0,
19	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0.

За результатами порівняння вагових коефіцієнтів класичного коду Фібоначчі та запропонованого методу можна підсумувати (табл. 8), що запропонований ряд чисел дозволяє побудувати еквівалентну до класичної Фібоначчі за можливістю кодування кількості повідомлень систему числення, яка володіє розрядністю, на дві позиції меншою. Або ж, за умови кодування даних визначеною кількістю розрядів, кількість кодованих повідомлень зростає до 2,6 разів.

Таблиця 8

Порівняння значень
ваг розрядів позицій запропонованої
та класичної систем числення Фібоначчі

позиції	F_c	F_b	F_a	F_9	F_8	F_7	F_6	F_5	F_4	F_3	F_2	F_1	F_0
класичний	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	0
пропонов.	376	232	143	88	54	33	20	12	7	4	2	1	0
відношення	2,6	2,7	2,6	2,6	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2	2	2	

Здійснимо оцінку надлишковості сформованих дубль-кодів для кожного із натуральних чисел представлення в запропонованій Фібоначчі-подібній системі числення. На рис. 9 наведено графічну залежність кількості дубль-кодів для значень чисел натурального ряду діапазону 0÷609.

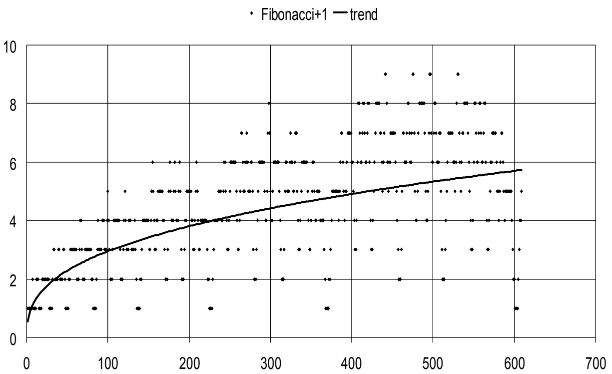

Рис. 9. Кодова надлишковість запропонованої Фібоначчі-подібної системи числення

Для довільної вибірки чисел N формується наступна кількість дубль-кодів d (табл. 9).

Таблиця 9

Вибіркові значення кодової надлишковості
запропонованого Фібоначчі-подібного
методу кодування

N	441	298	264	155	100	66	33	7
d	9	8	7	6	5	4	3	2

Можна підсумувати, що значення кодової надлишковості зростає із збільшенням значення натурального числа в представленні запропонованого Фібоначчі-подібного методу в значно меншій мірі, ніж для класичного Фібоначчі (рис. 1) (табл. 1).

Здійснимо оцінку абсолютної розрядної надлишковості запропонованого Фібоначчі-подібного кодування n_{Fp} / n_2, яку визначимо відношенням кількості розрядів n_{Fp}, необхідних для представлення чисел згідно запропонованого методу F_p, до кількості розрядів n_2 ненадлишкового двійкового коду в функції значень натурального числового ряду (рис. 10).

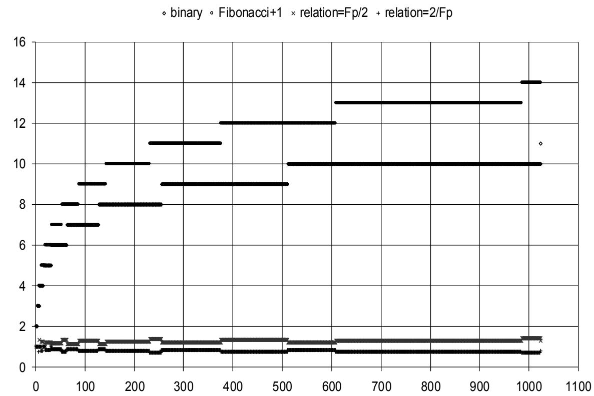

Рис. 10. Розрядна надлишковість запропонованої Фібоначчі-подібної системи числення

Наприклад, для довільної вибірки чисел N формуються наступні значення розрядної надлишковості n_{Fp} / n_2 (табл. 10).

Таблиця 10

Вибіркові значення
розрядної надлишковості запропонованого
Фібоначчі-подібного методу кодування.

N	n_{Fp}	n_2	n_{Fp} / n_2	
54	8	6	1,(3)	0,75
$2{,}6\ 10^3$	16	12	1,(3)	0,75
$5{,}7\ 10^6$	32	23	1,4	0,72
$2{,}8\ 10^{13}$	64	45	1,42	0,70
$6{,}6\ 10^{26}$	128	90	1,42	0,70

Із отриманих результатів обчислень можна зробити висновок, що абсолютна розрядна надлишковість запропонованого Фібоначчі-подібного методу кодування порівняно із двійковим знаходиться в межах 1,3÷1,42 і усереднено для розрядності (64-128) сучасних комп'ютеризованих систем може бути оцінена порядком 42%.

Здійснимо оцінку абсолютної розрядної надлишковості відношенням максимальних значень чисел у двійковому кодовому представленні до представлення чисел в запропонованому коді Фібоначчі для тієї самої кількості розрядів обох кодів. Графічна залежність абсолютної розрядної надлишковості $2^n / F_p$ від значення розрядності n і значень натуральних чисел запропонованого Фібоначчі-подібного кодового представлення F_p та двійкового 2^n наведена на рис. 11.

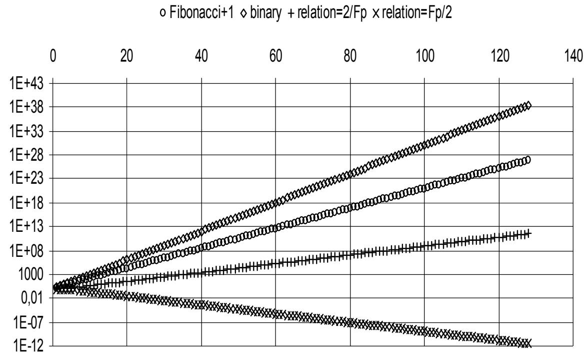

Рис. 11. Розрядна надлишковість запропонованої Фібоначчі-подібної системи числення

Наприклад, для розрядності кодів n можна закодувати кількість чисел у пропонованому Фібоначчі-подібному коді F_p та двійковому 2^n, для яких абсолютна розрядна надлишковість визначається відношенням $2^n / F_p$ і наведена в табл. 11.

Таблиця 11

Вибіркові значення
абсолютної розрядної надлишковості
пропонованого Фібоначчі-подібного кодування

n	F_p	2^n	$2^n / F_p$	$F_p / 2^n$
8	54	256	2,94	0,34
16	$2{,}6\ 10^3$	$6{,}55\ 10^4$	15,7	0,06
32	$5{,}7\ 10^6$	$4{,}3\ 10^9$	465,5	$2{,}1\ 10^{-3}$
64	$2{,}78\ 10^{13}$	$1{,}84\ 10^{16}$	$4{,}1\ 10^5$	$2{,}4\ 10^{-6}$
128	$6{,}6\ 10^{+26}$	$3{,}4\ 10^{+38}$	$3{,}2\ 10^{+11}$	$3{,}1\ 10^{-12}$

За отриманими результатами можна пісумувати, що розрядна надлишковість 64- та 128-розрядних систем набуває відповідно значень $2^n / F_p$=410424 та $2^n / F_p$=3,2 10^{+11}.

Модифікований трибоначчі-подібний метод кодування

Застосуємо запропонований метод для побудови трибоначчі-подібного числового ряду згідно наступної залежності:

$$F_i=F_{i-1}+F_{i-2}+F_{i-3}+1,$$

$$F_1=1;\ F_0=0;\ F_{-1}=0;\ (F_{-2}=0),$$

за якою отримуємо мережу ваг позицій, що зображена у порівняльному віднесенні до звичайного трібоначчі в табл. 12.

Можна підсумувати, що кількість повідомлень, які можна закодувати в системі згідно запропоновано трибоначчі+1 методу у порівнянні до звичайного трибоначчі є більшою в понад два рази.

Результати оцінки надлишковості сформованих дубль-кодів для кожного із натуральних чисел представлення в пропонованій трибоначчі-подібній системі числення наведено на рис. 12 у вигляді графічної залежності кількості дубль-кодів для значень чисел натурального ряду діапазону 0÷2031.

Наприклад, для довільної вибірки чисел N, формується наступна кількість дубль-кодів d (табл. 13).

Таблиця 12

Порівняння значень ваг розрядів позицій запропонованої
трибоначчі-подібної та класичної системи числення трибоначчі

Позиції	F_c	F_b	F_a	F_9	F_8	F_7	F_6	F_5	F_4	F_3	F_2	F_1	F_0
Трибон.	504	274	149	81	44	24	13	7	4	2	1	1	0
Трибон+1	1104	600	326	177	96	52	28	15	8	4	2	1	0
Віднош.	2,2	2,19	2,19	2,19	2,18	2,17	2,15	2,14	2	2	2	1	

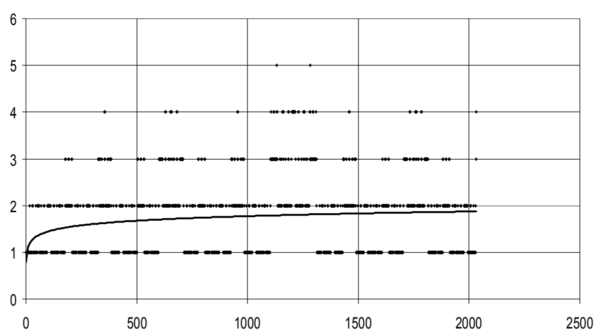

Рис. 12. Кодова надлишковість запропонованої трибоначчі-подібної системи числення

Можна підсумувати, що значення кодової надлишковості зростають із збільшенням значення натурального числа в представленні запропонованого трибоначчі-подібного методу в значно меншій мірі, ніж для класичного трибоначчі (рис. 4) і (табл. 4).

Таблиця 13

Вибіркові значення
кодової надлишковості запропонованого
трибоначчі-подібного методу кодування

N	1132	354	177	15
d	5	4	3	2

Здійснимо оцінку абсолютної розрядної надлишковості запропонованого трибоначчі-подібного кодування n_{Fp} / n_2, яку визначимо відношенням кількості розрядів n_{Fp}, необхідних для представлення чисел згідно запропонованого методу F_p, до кількості розрядів n_2 ненадлишкового двійкового коду в функції значень натурального числового ряду (рис. 13). Наприклад, для довільної вибірки чисел N формуються наступні значення розрядної надлишковості n_{Fp} / n_2 (табл. 14).

Із отриманих результатів обчислень можна зробити висновок, що абсолютна розрядна надлишковість запропонованого трибоначчі-подібного методу кодування порівняно із двійковим знаходиться в межах 1,14 і усереднено для розрядності (64-128) сучасних комп'ютеризованих систем може бути оцінена порядком 14%.

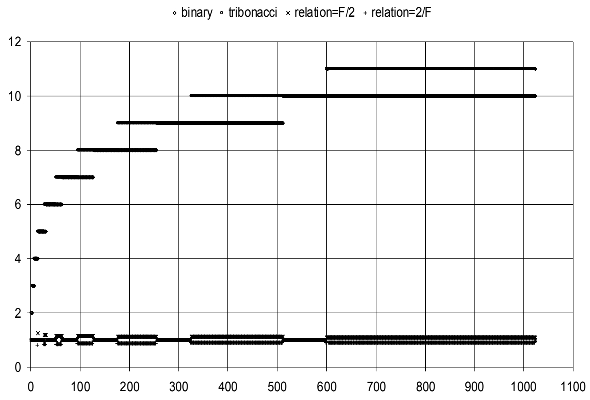

Рис. 13. Розрядна надлишковість запропонованої трибоначчі-подібної системи числення

Таблиця 14

Вибіркові значення розрядної надлишковості запропонованого трибоначчі-подібного методу кодування

N	n_{Fp}	n_2	n_{Fp} / n_2	n_2 / n_{Fp}
96	8	7	1,14	0,875
$1{,}2\ 10^4$	16	14	1,14	0,875
$2{,}2\ 10^8$	32	28	1,14	0,875
$6{,}4\ 10^{16}$	64	56	1,14	0,875
$5{,}5\ 10^{33}$	128	113	1,13	0,88

Здійснимо оцінку абсолютної розрядної надлишковості відношенням максимальних значень чисел у представленні двійковим кодом до представлення чисел в запропонованому коді трибоначчі для тієї самої кількості розрядів обох кодів. Графічна залежність абсолютної розрядної надлишковості $2^n / F_p$ від значення розрядності n і значень натуральних чисел запропонованого трибоначчі-подібного кодового представлення F_p та двійкового 2^n наведена на рис. 14.

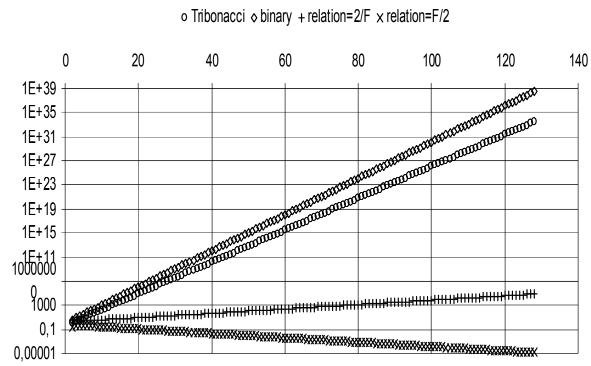

Рис. 14. Кодова надлишковість запропонованої трибоначчі-подібної системи числення

Наприклад, для розрядності кодів n можна закодувати кількість чисел у пропонованому трибоначчі-подібному коді F_p та двійковому 2^n, для яких абсолютна розрядна надлишковість визначається відношенням $2^n / F_p$ і наведена в табл. 15.

За отриманими результатами можна підсумувати розрядну надлишковість, яка для 64- та 128-розрядних систем набуває відповідно значень $2^n / F_p$=289 та $2^n / F_p$=61565,5.

Таблиця 15

Вибіркові значення абсолютної розрядної надлишковості пропонованого трибоначчі-подібного кодування.

n	F_p	2^n	$2^n / F_p$	$F_p / 2^n$
8	96	256	2,7	0,375
16	$1{,}3\ 10^4$	$6{,}55\ 10^4$	5,2	0,19
32	$2{,}2\ 10^8$	$4{,}3\ 10^9$	19,8	0,05
64	$6{,}4\ 10^{16}$	$1{,}84\ 10^{16}$	289	0,004
128	$5{,}5\ 10^{+33}$	$3{,}4\ 10^{+38}$	61565,5	$1{,}6\ 10^{-5}$

Модифіковані полібоначчі методи кодування даних

Для множини Фібоначчі-подібних систем від класичної (1) до повнорозрядної (4), що сформовані згідно запропонованого методу із додаванням одиниці, здійснено аналіз характеристик кодової та розрядної надлишковості.

На рис. 15 зображено суміщені графіки залежностей кодової надлишковості модифікованих полібоначчі (трибоначчі, теттрабоначчі, гексабоначчі та октабоначчі, в той час для модифікованого Фібоначчі+1 зображено на рис. 8) систем числення в функції розрядності кодового слова n та довжини масиву даних, який вони дозволяють кодувати.

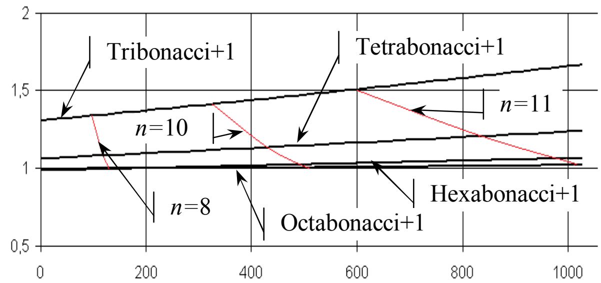

Рис. 15. Залежності кодової надлишковості систем числення модифікованих полібоначчі

З отриманих результатів можна підсумувати, що показники надлишковості для систем модифікованих полібоначчі перевищують параметри не надлишкових систем числення, наприклад, двійкової, особливо полібоначчі нижчих порядків (1,2÷1,6 рази), зокрема модифіковані трибоначчі (1,3÷1,7 рази) та Фібоначчі (понад 6 разів). Досить близько наближаються до оптимальної залежності, проте, тільки одна із них, із повним набором аргументів

$$F_i=F_{i-1}+F_{i-2}+\ldots+F_{i-n+1}+F_{i-n}+1, \quad (5)$$
$$F_1=1;\ F_0=0;\ F_{-1}=0;\ \ldots\ F_{-n+3}=0;\ F_{-n+2}=0$$

суміщається із двійковою і стає їй еквівалентною.

Із набору запропонованих методів полібоначчі-подібних методів формування числових рядів необхідно акцентувати увагу на випадок модифікованої формули (4), за якою для повнорозрядного вектора суми – полібоначчі (5) $F_i=F_{i-1}+F_{i-2}+\ldots+F_{i-n+1}+F_{i-n}+1$, отримуємо наступний ряд чисел – степенів 2^i.

…	F_9	F_8	F_7	F_6	F_5	F_4	F_3	F_2	F_1	F_0
…	256	128	64	32	16	8	4	2	1	0

в якому відсутні повторювання кодових комбінацій, тому надлишковість такої системи числення рівна нулю, значення формують двійкову вагову мережу позицій, що свідчить про те, що на підставі вище наведених трансформацій ми здійснили перехід від класичного кодування Фібоначчі, через полібоначчі та запропоновані авторами методи доповнення одиницею, в граничному випадку модифікованого полібоначчі отримали двійкову розрядну мережу та безнадлишковий метод кодування повідомлень. Графічна залежність кодової та розрядної надлишковості системи типу (5) наведена на рис. 16.

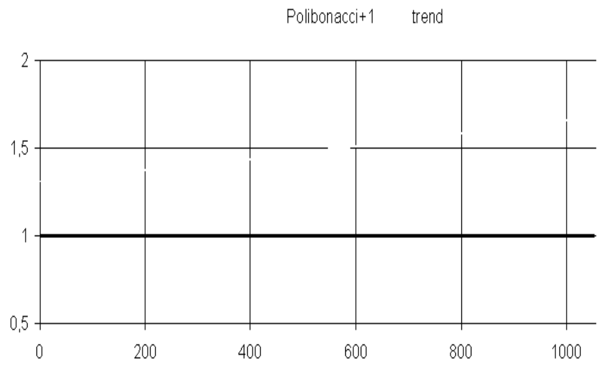

Рис. 16. Залежність відсутності кодової надлишковості систем числення модифікованого полібоначчі+1 типу (5)

Із результатів, узагальнених на рис. 15, можна підсумувати, що рекурентна залежність, сформована згідно виразу (5), генерує ряд чисел, який в якості системи розрядних ваг позиційної системи числення генерує в якості суми тільки один раз кожне із числових значень натурального ряду, внаслідок чого усувається ефект дублювання значень кодів та надлишковість системи числення. Показник розрядної надлишковості суміщений із значенням 1 графічної залежності рис. 15, оскільки обчислено надлишковість системи полібоначчі типу (5), яка є еквівалентною без надлишковій двійковій системі числення.

За результатами наведених в статті обчислень розробники комп’ютеризованих інфосистем в стані здійснити аналіз та обґрунтувати вибір в класі Фібоначчі-подібних систем числень такого методу перетворення форми інформації, який би відповідав характеру джерела інформації та вимогам замовника.

Висновки

Згідно сформульованої мети досліджень ефективності застосування Фібоначчі-подібних систем числень в перетворенні форми інформації проаналізовано класичну систему числення Фібоначчі та повний ряд систем полібоначчі. Визначено характеристики кодової та розрядної надлишковості кожної із систем полібоначчі та здійснено їх порівняльний аналіз.

Максимальною кодовою та розрядною надлишковістю володіє класична система числення Фібоначчі. Із збільшенням кількості елементів генераторного вектора показники надлишковості зменшуються, тобто ефективність кодування підвищується. Вказано на джерела формування надлишковості Фібоначчі-подібними системами числень та визначено їх недоліки щодо можливості рекурентного переходу через значення нуля та кодування від’ємних чисел. Запропоновано метод формування Фібоначчі-подібних систем числень, кожен наступний елемент в розрядній мережі яких є результатом інкрементованої суми визначених генераторним вектором молодших розрядів, що дозволило зменшити надлишковість полібоначчі-подібних систем числень, отримати єдину формулу формування додатних та від’ємних значень числового ряду. Визначено характеристики кодової та розрядної надлишковості кожної із модифікованих систем полібоначчі згідно запропонованого методу інкрементування суми наступного елементу та здійснено їх порівняльний аналіз. В класі модифікованих полібоначчі систем, аналогічно, як в класі неінкрементованих полібоначчі систем максимальною кодовою та розрядною надлишковістю володіє інкрементно модифікована система числення Фібоначчі. Із збільшенням кількості елементів генераторного вектора показники надлишковості зменшуються, тобто ефективність кодування підвищується.

Отримані результати досліджень дозволили також підсумувати, що інкрементно модифіковані полібоначчі-подібні системи числення володіють значно меншою кодовою та розрядною надлишковістю в порівнянні до інкрементно не модифікованих полібоначчі-подібних систем числень. Вперше сформульовано процедури трансформації та отримано аналітичну залежність переходу від надлишкових полібоначчі-подібних систем через інкрементно модифіковані полібоначчі-подібні системи і отримання двійкової ненадлишкової системи числення.

Для всіх без виключення полібоначчі-подібних систем обчислено показники кодової та розрядної надлишковості, що є основою для обґрунтування ефективності їх прикладного застосування.

Список літератури

1. Roth R. Introduction to Coding Theory / R. Roth // Cambridge University Press, 2006.

2. Butler J.T. Redundant multiple-valued number systems / J.T. Butler, T. Sasao // Proc. of the Japan Research Group on Multiple-Valued Logic. – 1997. – Vol. 20. – P. 14.1-14.8.

3. Bunder M.W. Zeckendorf representation using negative Fibonacci numbers / M.W. Bunder // The Fibonacci Quarterly. – May 1992. – P. 111-115.

4. Kocabova P. Ambiguity in the m-Bonacci numeration system / P. Kocabova, Z. Masakova, E. Pelantova // Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science. – 2007. – Vol. 9, no. 2. – P. 109-124.

5. Butler J.T. Redundant multiple-valued number systems / J.T. Butler, T. Sasao // The Proc. of the Japan Research Group on Multiple-Valued Logic. – July 1997. – Vol. 20. – P. 14-1 - 14-8.

6. Klein S.T. Combinatorial representations of generalized Fibonacci numbers / S.T. Klein // The Fibonacci Quarterly. – 1991. – Vol. 29.2. – P. 124-131.

7. Feinberg M. Fibonacci-Tribonacci / M. Feinberg // The Fib. Quart. 1, 71–74 (1963).

8. Catalani M. Identities for Tribonacci-Related Sequences / M. Catalani // arXiv:math.CO/0209179. – V.1, 15 Sep (2002).

9. Develin M.A. Complete Categorization of When Generalized Tribonacci Sequences Can be Avoided by Additive Partitions / M.A Develin // Electronic Journ. Combinatorics 7(1) R53, 1–7 (2000).

10. Butler J.T. Redundant multiple-valued number systems / J.T. Butler, T. Sasao // The Proc. of the Japan Research Group on Multiple-Valued Logic. – July 1997. – Vol. 20. – P. 14-1 - 14-8.

11. Capocelli R.M. Fibonacci facts and formulas and Sequences / R.M. Capocelli, G. Gerbone, P. Cull, J. Hollaway // Int. Conf. on Combinatorics, Compression, Security, and Transmission, Ed. R.M. Capocelli. – New York: Springer-Verlag, 1990. – P. 133-137.

12. Fraenkel A.S. Systems of numeration / A.S. Fraenkel // Amer. Math. Monthly, Vol. 92, 1985, pp. 105-114.

13. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®) Wiki [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://oeis.org/A000073.

14. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®) Wiki [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://oeis.org/A000078.

15. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®) Wiki [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://oeis.org/A001591.

16. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®) Wiki [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://oeis.org/A001592.

17. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®) Wiki [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://oeis.org/A122189.

18. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®) Wiki [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://oeis.org/A079262.

19. Петришин Л.Б. Новий числовий ряд для визначення вагової мережі позиційної системи числення, альтернативної та алгоритмічно подібної системі Фібоначчі / Л.Б. Петришин // Матеріали 19-ї міжнар. конф. «Автоматика / Automatics – 2012». – К.: Видавництво НУХТ, 2012. – С. 433-434.

20. Петришин Л.Б. Позиційна система числення, альтернативна системі Фібоначчі / Л.Б. Петришин, А.Б. Костюк // Методи та засоби кодування, захисту й ущільнення інформації: четверта міжнар. науково-практична конференція, 23-25 квіт. 2013 р. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2013. – С. 35-39.

21. Kostiuk A. A new recurrence data encode method in information systems of management / A. Kostiuk, L. Petryshyn // W: Zarządzanie przedsiębiorstwem – teoria i praktyka / Akademia Górniczo-Hutnicza im. St. Staszica – Kraków:, cop. 2012. – P. [1–5].

22. Петришин Л. Моделювання субтрактивно-адитивного способу перетворення форми інформації / Л. Петришин //Математичний вісник НТШ. – 2012, т. 9. – С. 246-268.

23. Петришин Л.Б. Фибоначчи-подобный метод кодирования сообщений и полибоначчи способ перехода к двоичному исчислению / Л.Б. Петришин //Вісник СУНУ ім. В.Даля. – Луганськ, 2013. – № 15 (204), ч.1. – С. 158-165.

Надійшла до редколегії 11.02.2015

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф., Р.А. Заторський, Прикарпатський національний університет, Івано-Франківськ.

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ФИБОНАЧЧИ-ПОДОБНЫХ МЕТОДОВ КОДИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ

М.Л. Петришин, Л.Б. Петришин

Проанализированы известные полибоначчи-подобные системы исчислений. Предложен новый метод формирования числовых Фибоначчи-подобных рядов в качестве основы альтернативных систем исчислений и способов кодирования сообщений. Для каждой из систем определены характеристики избыточности и осуществлен их сравнительный анализ. Впервые определен способ получения двоичной системы счисления по ряду трансформации полибоначчи-подобных систем.

Ключевые слова: *Фибоначчи, полибоначчи, двоичный, код, избыточность.*

EFFICACY ANALYSIS OF THE FIBONACCI-SIMILAR INFORMATION ENCODING METHODS

M.L. Petryshyn, L.B. Petryshyn

The known polibonacci-similar number systems are analyzed. A new method for the formation of Fibonacci-similar number series as the basis of alternative numeral systems and data encoding methods is proposed. For each of the systems are identified characteristics of redundancy and done a comparative analysis. For the first time is defined a method for binary system formation in a some of polibonacci-similar systems transformation.

Keywords: *Fibonacci, polibonacci, binary, code, redundancy.*