УДК 519.854

И.А. Лещинская

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков*

# АНАЛИЗ БЕЗОБЪЕКТНОЙ КАТЕГОРИИ И КАТЕГОРИИ С ОБЪЕКТАМИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ КАТЕГОРНОЙ АЛГЕБРЫ

*Рассматривается задача анализа классической категории и ее модификации - предикатной категории, которая предоставляет бóльшие возможности для приложений теории категорий в области компьютеризации и информатизации. В частности, предикатная категория является хорошей формальной базой для построения высокопроизводительных мозгоподобных компьютеров параллельного действия. В настоящей, первой части работы, рассмотрены классическая абстрактная категория, безобъектная категория и категория с объектами.*

***Ключевые слова:*** *предикатная категория, безобъектная категория, категория с объектами.*

## Вступление

Понятие категории введено в 1945 году Маклейном и Эйленбергом. Как научная дисциплина теория категорий сформировалась к 60-м годам XX-го столетия. Она разрабатывает перспективные средства представления, анализа и синтеза алгебраических структур произвольного вида. К 80-м годам была осознана важность теории категорий для компьютеризации и информатизации, в частности, – для автоматизации программирования. В статье дано определение понятия модифицированной категории и сформулирована задача разработки теории модифицированных категорий, открывающей путь к построению высокопроизводительных мозгоподобных ЭВМ параллельного действия. [1].

## Классическая категория

Вначале кратко охарактеризуем классическую категорию [2], после чего осуществим ее предикатную интерпретацию. В результате получаем предикатную категорию – один из частных случаев классической категории. Анализируя предикатную категорию, мы выявили в ней некоторую аномальность, что дало повод для корректировки понятия классической категории. Произведя такую корректировку, мы получили модифицированную категорию, которая, как нам представляется, лучше подходит на роль отправного пункта построения теоретической базы создания мозгоподобных ЭВМ, чем классическая категория.

Сначала рассмотрим наиболее общее определение понятия классической категории – классическую безобъектную категорию [2]. Его называют также классической абстрактной категорией. Оно ценно тем, что в нем достаточно удачно схвачена суть интуитивного понимания категории и, вместе с тем, в нем нет ничего сверх этого. Если исключить хотя бы одну из черт, указанных в этом определении, то от понятия категории ничего не остается. После такого исключения категория превращается в одну из известных алгебраических структур, охватывающих понятие категории. Охарактеризуем понятие классической безобъектной категории. Текст определения этого понятия выделен жирным шрифтом. Пусть $M$ – какое-нибудь множество. Его элементы, обозначаемые символами $f, g, h, \ldots,$ называются морфизмами. Пусть, кроме того, задано однозначное частичное соответствие $fg=h$ с областью отправления $M\times M$ и областью прибытия $M$. Оно называется умножением морфизмов $f$ и $g$. Морфизм $h$ называется произведением морфизмов $f$ и $g$. Умножение морфизмов ассоциативно: при любых $f, g, h\in M$, для которых существуют произведения $(fg)h$, $f(gh)\in M$, справедливо равенство $(fg)h=f(gh)$. Пусть $E$ – множество всех единичных морфизмов ($E\subseteq M$). Любой морфизм $e\in M$ называется единичным (или тождественным или просто единицей), если он удовлетворяет следующим двум условиям:

1) для каждой единицы $e\in E$ существует произведение $ee$;

2) при любых морфизмах $f, g\in M$ и любых единицах $e, e'\in E$, для которых существуют произведения $fe$, $e', g\in M$, выполняются равенства $fe=f$ и $e'g=g$.

Множество морфизмов $M$ с единицами, удовлетворяющими перечисленным выше условиям, взятое вместе с умножением морфизмов, удовлетворяющим вышеуказанным условиям, называется классической безобъектной категорией K. Пишут $M=\mathrm{Mor}K$, $f\in M$, $f\in\mathrm{Mor}K$. $\mathrm{Mor}K$ – это множество всех морфизмов категории $K$. Если $f\in\mathrm{Mor}K$, то говорят, что морфизм $f$ является $K$-морфизмом.

Этим определением молчаливо допускается существование в категории многих единиц. Именно наличие многих единиц (и только это) отличает категорию (понимаемую в наиболее общем смысле) от других известных алгебраических структур. Существование многих единиц в категории и требование всюду определенности умножения морфизмов находятся относительно друг друга в непримиримом противоречии. Но если ослабить требования к категорному умножению морфизмов и принять его частичным, то уже только за счет этого появляется возможность введения в категории многих единиц. Единицы $e$ и $e'$ называются соответственно правой и левой для морфизма $f \in M$, если $fe=f$ и $e'f=f$. Из определения понятия категории логически следует, что для любого $e \in E$ справедливо равенство $ee=e$, и что для любого морфизма $f \in M$ существуют единственная правая и единственная левая единицы (которые могут отличаться друг от друга). Последнее утверждение называется категорным законом тождества. Таким образом, для каждого морфизма $f \in M$ существуют единственная правая единица $e$ и единственная левая единица $e'$, такие, что $fe=e'f=f$. Вместе с тем, для каждой единицы $e \in E$ найдутся такие морфизмы $f$ и $g$ (не обязательно единственные), что для них выполнятся равенства $fe=f$ и $eg=g$. Для любой единицы $e \in E$ в роли таких морфизмов можно взять $f=g=e$.

## Безобъектная категория

Так определенную категорию можно рассматривать как некую разновидность алгебры. В роли ее носителя выступает множество морфизмов M, роль базисных элементов в этой алгебре выполняют единицы, а в роли единственной базисной операции (точнее – однозначного соответствия) выступает частичное умножение морфизмов. Любую алгебру, удовлетворяющую всем перечисленным выше требованиям, будем рассматривать как безобъектную классическую категорию. Так определенная категория представляет собой неполную алгебру. Не в каждой такой категории, действуя в различной последовательности умножением на единицы, можно получать любые морфизмы, имеющиеся в ее носителе. Неполные алгебры можно по-разному достраивать (доопределять), получая из каждой такой алгебры целое семейство различных полных алгебр. Описываемый здесь вариант определения классической категории – это самый общий (то есть самый бедный свойствами) из всех известных нам. Несколько позже, кроме морфизмов, мы введем в классической категории еще и объекты, но пока они в ней отсутствуют. Именно поэтому только что рассмотренная категория названа безобъектной.

Оговорка о существовании произведений $(fg)h=f(gh)$ в формулировке ассоциативности умножения морфизмов была бы излишней, если б умножение морфизмов было всюду определено. Но в определении понятия категории основателями теории категорий оно принято частичным. Как будет показано в этой статье, частичность умножения в определении категории вовсе не обязательна, умножение в ней может быть взято и всюду определенным. Этого можно достичь за счет некоторого ослабления свойств категорных единиц. В классической категории произведение $fg$ морфизмов $f$ и $g$ существует в том и только том случае, когда правая единица морфизма $f$ совпадает с левой единицей морфизма $g$. Таким образом, необходимым и достаточным условием существования произведения $fg$ морфизмов $f$ и $g$ является наличие такой единицы $e$, для которой $fe=f$ и $eg=g$. Приведенные здесь свойства классической безобъектной категории, которые не были вынесены в ее определение, могут быть из него логически выведены. Объекты категории взаимно однозначно связаны с ее единицами. Поэтому в категории с одной единицей можно ввести лишь один объект. Однако информатизация нуждается в таком варианте теории категорий, в рамках которого можно было бы одновременно рассматривать сразу много объектов. Ввиду этого появляется необходимость введения в алгебре, ориентированной на нужды информатизации, (то есть в теории категорий) многих единиц.

Рассмотрим, какое место занимает безобъектная классическая категория в иерархии алгебр, сложившейся к настоящему времени в математике. На вершине этой иерархии располагается группоид – алгебра на носителе M со всюду определенным умножением $fg=h$ $(f,g,h \in M)$. Под ним располагается полугруппа, которая определяется как группоид с умножением, обладающим для любых $f,g,h \in M$ свойством ассоциативности $(fg)h=f(gh)$. Ниже находится моноид, определяемый как полугруппа с единственным базисным элементом $e \in M$, который называется единицей. Последняя характеризуется свойством: для любого $f \in M$ $ef=fe=f$ (кстати, из него вытекает еще одно важное свойство единицы – $ee=e$, которое получаем, полагая $f=e$). Еще ниже располагается группа, определяемая как моноид с одноместной операцией обращения $f^{-1}=g$, которая характеризуется свойством: $ff^{-1}=f^{-1}f=e$ для любого $f \in M$.

Классическую безобъектную категорию можно рассматривать как одно из возможных обобщений понятия моноида. В ней вместо операции (то есть всюду определенного и однозначного соответствия) умножения, фигурирующей в определении моноида, использовано соответствие более общего вида – частичное умножение, с него свойство всюду определенности снято. Для некоторых пар $f,g \in M$ произведение $fg$ в классической безобъектной категории может и не существовать. Требование единственности единицы тоже снято. Единиц в категории может быть много. Единицы классической безобъектной категории можно определить следующими двумя свойствами: 1) для любой единицы $e \in E$ $ee = e$; 2) при любых $f,g \in M$ и любых $e,e' \in E$, для которых существуют произведения $fe, e'g \in M$, выполняются равенства $fe = f$ и $e'g = g$. Если дополнительно потребовать, чтобы умножение морфизмов было всюду определено, то категория превратится в моноид. Действительно, предположим, что умножение в категории всюду определено и, вместе с тем, в ней имеются две отличающиеся друг от друга единицы $e$ и $e'$ ($e \neq e'$). Тогда должно существовать произведение $e'e$. Согласно равенству $fe = f$ получаем произведение $e'e = e'$. Согласно же равенству $e'f = f$ приходим к иному результату $e'e = e$. Но это невозможно, поскольку принято, что умножение обладает свойством однозначности для своих значений. Мы пришли к противоречию. Это значит, что при наличии, по крайней мере, двух единиц в категории последняя не может иметь всюду определенного умножения.

Категория беднее свойствами, чем моноид, поэтому она представляет собой обобщение понятия моноида. Ее естественно называть еще и квазимоноидом. Если б мы сняли требование всюду определенности умножения также и с группоида, полугруппы и группы, то получили бы обобщения и этих алгебр (назовем их соответственно квазигруппоидом, квазиполугруппой и квазигруппой). Алгебры с частичным базисным умножением в современной математике широко не используются, так что введение понятия классической категории с частичным умножением морфизмов представляет собой уход в сторону с магистрального пути развития математики. Рис. 1 иллюстрирует сказанное.

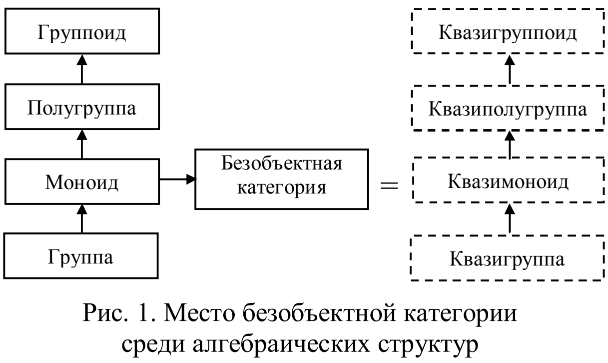


Рис. 1. Место безобъектной категории среди алгебраических структур

Итак, если мы хотим обобщить понятие моноида до понятия категории так, чтобы в нем вместо одной единицы могло появиться большее их число, и, вместе с тем, сохранить все свойства единицы, указанные в определении категории, то, переходя от моноида к категории, будем вынуждены ослабить требования к умножению морфизмов и сделать его частичным. Но, может быть, переходя от понятия моноида к понятию категории, следовало бы отказаться от многих единиц? Нет, так делать не следует. Это не имеет смысла, ибо тогда мы "с водой выплеснем и ребенка": пришлось бы возвратиться к понятию моноида. Это значит, что понятие категории не состоялось бы: ведь в нем в таком случае не появилось бы ничего нового по сравнению с уже имеющимся понятием моноида. Волей-неволей приходится отказаться от требования всюду определенности умножения. Мы видим, что отказ от всюду определенности умножения в определении понятия категории – мера вынужденная. Введение частичности умножения не красит понятие категории. Оно выглядит менее удачным, поскольку добавляет к числу свойств, определяющих понятие категории, свойство, непопулярное в общей алгебре. Если б создателям теории категорий был известен способ избежать частичности умножения при сохранении многих единиц, вряд ли они им бы не воспользовались. А между тем такой способ существует: надо лишь несколько ослабить свойства единиц.

Правда, после этого единицы перестают быть настоящими единицами в классическом понимании этого слова, они превращаются в нечто более общее, но зато таких "квазиединиц" теперь может быть много. Повторимся: выполненная нами в этой работе предикатная интерпретация классической категории выявила ее некоторую аномальность. Это послужило для нас поводом модифицировать понятие классической категории, после чего категорию стало возможным поместить в класс всюду определенных алгебр, избавив ее умножение от частичности. В такой модифицированной категории сохранены, наряду со всюду определенным умножением, также и многие единицы. Точнее, сохраняются не единицы, а "квазиединицы", поскольку свойства единиц приходится несколько ослабить. Именно благодаря такому ослаблению понятия единицы, сфера действия понятия категории расширяется, в результате чего прикладное значение теории категорий для компьютеризации и информатизации, после замены классической категории на модифицированную, возрастает.

## Категория с объектами

В приведенном выше определении классической безобъектной категории морфизмы были представлены пока очень схематично – лишь как бесструктурные элементы некоторого множества. Немного можно извлечь из такого, очень бедного, понятия категории. Такое общее понятие категории полезно разве что только при уяснении места понятия категории в иерархии существующих алгебр. Теперь понятия категории и морфизма мы конкретизируем. В процессе конкретизации ранее введенное понятие безобъектной категории обрастает дополнительными деталями и свойствами и в результате превращается в категорию с объектами [2]. К морфизмам безобъектной категории $K$ присоединяем объекты. Множество всех объектов категории $K$ записываем в виде $Ob$ в $K$ или в виде $ObK$. Объекты обозначаем буквами $A, B, C, \ldots$. Если $A \in ObK$, то говорят, что $A$ является $K$-объектом. Говорят, что $f$ есть морфизм из объекта $A$ в объект $B$, и пишут $f : A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$. Объект $A$ называется началом морфизма $f$, а объект $B$ – его концом. Вместо термина «морфизм» также используется слово стрелка.

Как конкретно понимать термин «объект»? Объекты выражают какие-то бесструктурные элементы множества $ObK$. Но все же всегда имеется невысказанная мотивировка введения понятия «объект». Ее можно обнаружить, если обратиться к какой-нибудь естественной интерпретации понятия объекта. Строго говоря, при принятом нами изложении теории категорий так делать нежелательно, ввиду того что при этом теряется весьма ценное качество предельной абстрактности термина «объект». Но без какой бы то ни было интерпретации трудно понять мотивировку введения понятия «объект». А это понимание очень важно для приложений теории категорий в области компьютеризации и информатизации.

Приведем одну из наиболее употребительных интерпретаций понятия «объект». Такая интерпретация вовсе не обязательна, возможны и иные варианты. Прелесть абстрактной теории как раз в том и состоит, что она допускает множество разных способов практического использования, но сама до них не снисходит. Но если мы не выявим мотивировку введения абстрактной теории, то такая теория будет восприниматься просто как бессодержательная словесная эквилибристика, как «абстрактная чепуха», и стремление к ее практическому применению пропадет.

Каждый морфизм $f \in MorK$ будем конкретно представлять в виде некоторой функции $f : A \to B$, отображающей множество $A$ в множество $B$. Подчеркнем еще раз, что такой способ интерпретации понятия морфизма вовсе не обязателен, можно понимать его и иначе.

Множество А понимаем как область определения морфизма $f$, множество В – как область значений морфизма $f$. Однако, в другой интерпретации понятия категории объекты $A, B, C, \ldots$ не обязательно понимать как множества.

## Выводы

В статье проанализировано понятие классической абстрактной категории и возможности ее модификации для построения семейства предикатных категорий, которые, в свою очередь, являются эффективной теоретической базой для моделирования информационных объектов и процессов.

## Список литературы

*1. О мозгоподобных ЭВМ / М.Ф. Бондаренко, З.В. Дударь, И.А. Ефимова, В.А. Лещинский, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 2. – С. 89-105.*

*2. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики / Р.Голдблатт. – М.: Мир, 1983. – 486 с.*

*Поступила в редколлегию 28.01.2015*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. С.Ф. Чалый, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

**АНАЛІЗ БЕЗОБ'ЄКТНОЇ КАТЕГОРІЇ ТА КАТЕГОРІЇ З ОБ'ЄКТАМИ ДЛЯ ПОБУДОВИ КАТЕГОРНОЇ АЛГЕБРИ**

І.А. Лещінська

*Розглядається задача аналізу класичної категорії та її модифікації - предикатної категорії, яка надає більші можливості для додатків теорії категорій в області комп'ютеризації та інформатизації. Зокрема, предикатна категорія є гарною формальної базою для побудови високопродуктивних мозкоподібних комп'ютерів паралельної дії. У даній, першій частині роботи, розглянуті класична абстрактна категорія, безоб'єктна категорія та категорія з об'єктами.*

***Ключові слова:*** *предикатна категорія, безоб'єктно категорія, категорія з об'єктами.*

**ANALYSIS OBJECTLESS CATEGORY AND THE CATEGORY WITH OBJECTS TO BUILD CATEGORICAL ALGEBRA**

I.A. Leschynskaya

*The problem of analyzing the classical category and its modification - the category of predicate, which offers more opportunities for applications of category theory in computer and information science. In particular, the predicate category is a good formal basis for building high-performance brain-like computers parallel action. In this, the first part of this paper, we consider the classical abstract category, objectless category and the category with objects.*

***Keywords:*** *predicate category objectless category, the category with objects.*