

УДК 535.36

Н.Т. Процай

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В статье рассматривается неоднородное параболическое дифференциальное уравнение, которое относится к классу уравнений Хилла с потенциальным членом квадратичного вида. Потенциал аппроксимируется кусочно-постоянной функцией, после чего исходное уравнение представляется в виде эквивалентной системы уравнений, для которой получено аналитическое решение. Найдена функция $f_N(t, x)$ при $t = t_N = T$ и рассмотрена эволюция функции на оси $x = 0$. Получено приближенное аналитическое выражение для функции $f(t, x)$ для начального условия $f(t = 0, x) = 1$. Очерчены перспективы дальнейших исследований в данном направлении.

Ключевые слова: параболическое дифференциальное уравнение, потенциал, класс уравнений Хилла, функция когерентности, начальные условия, потенциал, уравнение Риккати, аппроксимация.

Введение

Во многих сложных технических системах, связанных с обработкой информации различной природы, возникают задачи, решение которых математически сводится к решению параболических дифференциальных уравнений. Этот класс уравнений является мощным средством практически любой точной науки (теория вероятности, математическая статистика, теория управления, радиофизике и т.д.) [1–3]. Например, исследование свойств рассеивающих диссипативных каналов передачи информации возможно осуществлять на основе анализа характеристик распространяющихся информационных импульсов (электромагнитных, акустических и т.д.). Распространение импульсов в подобных средах может быть описано с помощью аппарата параболических дифференциальных уравнений [1].

В данной работе рассматривается неоднородное параболическое дифференциальное уравнение, представленное формулой

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(t)x^2 \right) f(t, x) = 0 \quad (1)$$

с потенциальным членом

$$U(t, x) = b(t)x^2 \quad (2)$$

квадратичного вида с коэффициентом $b(t)$, постоянным коэффициентом a при диффузионном слагаемом и неизвестной функцией $f(t, x)$. Уравнение (1) относится к классу уравнений Хилла. Для потенциалов общего вида получить его аналитическое решение не удастся.

Целью работы является получение приближенного выражения для функции $f(t, x)$. Решение будет получено для начального условия

$$f(t = 0, x) = 1. \quad (3)$$

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Представить потенциал в виде кусочно-постоянной функции от t .
2. Представить уравнение (1) в виде эквивалентной системы уравнений и найти ее решение.
3. Найти функцию $f_N(t, x)$ при $t = t_N = T$ и рассмотреть эволюцию функции $f_N(t, x)$ на оси $x = 0$.
4. Найти приближенное аналитическое выражение для функции $f(t, x = 0)$.

Построение приближенного решения искомого уравнения

Рассмотрим момент времени T . Разобьем интервал $[0, T]$ его на N участков $\{\Delta_n\}$

$$T = \sum_{n=1}^N \Delta_n.$$

Выберем участки $\Delta_n = t_n - t_{n-1}$, $n = \overline{1, N}$, так, чтобы передать все существенные детали потенциала $U(t, x)$, и обозначим $b_n = b(t_n)$. Имея в виду случай $N \gg 1$, заменим в потенциале $U(t, x)$ все значения, лежащие внутри каждого n -ого участка, $1 \leq n \leq N$, на величину $U(t_n, x)$, где $t_n = \sum_{m=1}^n \Delta_m$ - правая граница участка.

Полученный таким образом потенциал $U_N(t, x)$, являющийся кусочно-постоянной функцией от t , будем использовать ниже в приближенном уравнении (4).

Теперь приблизим решение уравнения (1) функцией $f_N(t, x)$, которая является решением приближенного уравнения с кусочно-постоянным по t приближением $U_N(t, x)$ для потенциала $U(t, x)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_N(t, x) \right) f_N(t, z) = 0, \quad (4)$$

с условием $f_N(0, x) = 1$.

Если будет найдено решение уравнения (4) для f_N , то искомая функция когерентности будет следовать из него при $N \rightarrow \infty$.

Уравнению (4) эквивалентна последовательность уравнений, представленная формулой (5)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_N(t_n, x) \right) f_N(t, x) = 0, \quad n = \overline{1, N}, \quad (5)$$

решения которых определяются начальным условием $f_N(t = 0, x) = 1$ и цепочкой граничных условий

$$y_{n+1}(t_n) = y_n(t_n), \quad n = \overline{1, N}, \quad (6)$$

где $y_n(t)$ - функция $f_N(t, x)$ на n -ом участке.

Перейдем к решению развернутой системы уравнений (5).

Рассмотрим с этой целью произвольный n -й участок:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_N(t_n, x) \right) f_N(t, x) = 0. \quad (7)$$

На этом участке U_N зависит от координаты t_n как от параметра,

$$U_N(t, x) = b(t)x^2 \equiv b_n x^2.$$

Таким образом, каждое из уравнений (6) является параболическим уравнением в частных производных с кусочно-постоянным по t потенциалом. Будем искать решение n -ого уравнения на интервале $[t_{n-1}, t_n]$ в виде функции, представленной выражением (8)

$$f_N(t, x) = \frac{1}{f(t)} \exp[g(t)x^2]. \quad (8)$$

Такая форма искомого решения обусловлена квадратичностью потенциала по x . Из (6) и (8) вытекают следующие уравнения для введенных функций $f(t)$ и $g(t)$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{f(t)} \frac{df(t)}{dt} + 4ag(t) &= 0, \\ \frac{dg(t)}{dt} + 4ag^2(t) + b_n &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим сначала второе уравнение из системы (9), являющееся стандартным уравнением Рикати.

Пусть $g_n = g(t_n)$, тогда для всех n решение этого уравнения с начальным условием $g(t_{n-1}) = g_{n-1}$, вытекающим из (6), следующее:

$$g(t) = \frac{g_{n-1} - (4a/b_n)^{-1/2} \operatorname{tg}(\sqrt{4ab_n}(t - t_{n-1}))}{1 + (4a/b_n)^{1/2} g_{n-1} \operatorname{tg}(\sqrt{4ab_n}(t - t_{n-1}))}, \quad (10)$$

откуда при $t = t_n$ получаем

$$g_n = \frac{g_{n-1} - (4a/b_n)^{-1/2} \operatorname{tg}(\sqrt{4ab_n} \Delta_n)}{1 + (4a/b_n)^{1/2} g_{n-1} \operatorname{tg}(\sqrt{4ab_n} \Delta_n)}. \quad (11)$$

В свою очередь, функция $f(t)$ находится из (9) с помощью квадратуры с начальным условием $f(t_{n-1}) = f_{n-1}$, где f_{n-1} - значение функции $f(t)$ при $t = t_{n-1}$

$$\begin{aligned} \frac{f(t)}{f_{n-1}} &= \cos(\sqrt{4ab_n}(t - t_{n-1})) + \\ &+ \sqrt{4a/b_n} g_{n-1} \sin(\sqrt{4ab_n}(t - t_{n-1})). \end{aligned} \quad (12)$$

Откуда при $t = t_n$ найдем

$$\begin{aligned} f_n &= \left[\cos(\sqrt{4ab_n} \Delta_n) + \right. \\ &\left. + \sqrt{4a/b_n} g_{n-1} \sin(\sqrt{4ab_n} \Delta_n) \right] f_{n-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Итак, функция $f_N(t, x)$ при $t = t_N = T$ описывается выражением

$$f_N(t_N, x) = \frac{1}{f_N} \exp(g_N x^2), \quad (14)$$

при этом последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$, $1 < n \leq N$, определяются из рекуррентных соотношений (10) и (12), а также начальных условий:

$$\begin{aligned} f_0(t = 0) &= 1; \\ g_0(t = 0) &= 0. \end{aligned}$$

Анализ поведения решения на оси x

Рассмотрим далее эволюцию функцию $f_N(t, x)$ на оси $x = 0$. Из рекуррентного соотношения (13) следует

$$\begin{aligned} f_N &= \prod_{n=1}^{N-1} \left[\cos(\sqrt{4ab_n} \Delta_n) + \right. \\ &\left. + \sqrt{4a/b_n} g_{n-1} \sin(\sqrt{4ab_n} \Delta_n) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Допустим далее, что функция $b(t)$ - гладкая. Тогда из (11) следует

$$\operatorname{tg}(\phi_n) = \frac{\operatorname{tg}(\phi_{n-1}) - \operatorname{tg}(\sqrt{4ab_n} \Delta_n)}{1 + \operatorname{tg}(\phi_{n-1}) \operatorname{tg}(\sqrt{4ab_n} \Delta_n)},$$

где $\operatorname{tg}(\phi_n) = \sqrt{4a/b_n} g_n$.

Видно, что

$$\phi_{n+1} = \phi_n - \sqrt{4a/b_n} \Delta_n$$

и, следовательно,

$$\phi_N = -\sum_{n=1}^N \sqrt{4ab_n} \Delta_n.$$

Поэтому

$$g_n = -\frac{1}{\sqrt{4a/b_n}} \operatorname{tg} \left(\sum_{j=1}^N \sqrt{4ab_j} \Delta_j \right). \quad (16)$$

Подставляя это выражение в соотношение (14), найдем после упрощений

$$f_N = \cos \left(\sum_{n=1}^N \sqrt{4ab_n} \Delta_n \right). \quad (17)$$

Итак, мы получили приближенное аналитическое выражение для функции $f(t, x = 0)$:

$$f(t, x = 0) \approx \cos \left(\sum_{n=1}^N \sqrt{4ab_n} \Delta_n \right),$$

$$t = \sum_{n=1}^N \Delta_n. \quad (18)$$

Выводы

В статье получено приближенное выражение для функции $f(t, x)$ для начального условия $f(t = 0, x) = 1$:

$$f(t, x = 0) \approx \cos \left(\sum_{n=1}^N \sqrt{4ab_n} \Delta_n \right),$$

$$t = \sum_{n=1}^N \Delta_n.$$

Уравнения рассмотренного типа встречаются, в частности, при анализе распространения сигналов

в рассеивающих каналах передачи информации различной природы.

Развитием предложенного аппроксимационного подхода при изучении процессов, влияющих на временное затягивание электромагнитных импульсов, может быть учет затухания излучения при его распространении в неоднородной поглощающей среде [4].

Математической основой при этом послужит учет в параболическом уравнении (3) слагаемого, связанного с поглощением, при этом коэффициенты в уравнении могут зависеть от продольной координаты z .

Отметим также, что анализ эволюции формы временного импульса при его распространении дает возможность судить о пространственном распределении характеристик рассеивающей среды вдоль оси распространения.

Список литературы

1. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. В 2-х т. / А. Исимару. – М.: Мир, 1981. – Т. 1. – 280 с. – Т. 2. – 317 с.
2. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику / С.М. Рытов, Ю.А. Кравцов, В.И. Татарский. – М.: Наука, 1978. – 270 с.
3. Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания / К. Хелстром. – М.: Мир, 1979. – 344 с.
4. Галуза А.А. О временных характеристиках ЭМ импульса, прошедшего через однородную поглощающую диффузионную среду / А.А. Галуза, А.С. Мазманивили // Радиофизика и радиоастрономия. – 1997. – Т. 2, № 2. – С. 211-214.

Поступила в редколлегию 19.02.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л. М. Любчик, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

РОЗВ'ЯЗОК ПАРАБОЛІЧНОГО ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

Н.Т. Процай

У статті розглядається неоднорідне параболическое дифференциальное уравнение, яке належить до класу рівнянь Хілла з потенціальним членом квадратного виду. Потенціал апроксимується кусково-постійною функцією, після чого рівняння записується у вигляді еквівалентної системи рівнянь, для якої отримано аналітичний розв'язок. Знайдена функція $f_N(t, x)$ при $t = t_N = T$ та розглянуто еволюцію функції на осі $x = 0$. Отримано наближений аналітичний вираз для функції $f(t, x)$ для початкової умови $f(t = 0, x) = 1$. Окреслені перспективи подальших досліджень у зазначеному напрямку!

Ключові слова: параболическое дифференциальное уравнение, потенциал, клас рівнянь Хілла, функція когерентності, початкові умови, потенціал, рівняння Ріккати, апроксимація.

SOLUTION PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ALTERNATIVE POTENTIAL

N.T. Protsai

The article is reviewed the inhomogeneous parabolic differential equation. It is belonged to Hill's class of equations with a quadratic potential member. The potential is approximated by a piecewise constant function. Then the equation is represented as equivalent system of equations. For this system of equations is got the analytical solution. The function $f_N(t, x)$ is found for $t = t_N = T$. Evolution of function on the axis $x = 0$ is reviewed. The approximate analytical expression is got for the function $f(t, x)$ for the starting condition $f(t = 0, x) = 1$.

Keywords: parabolic differential equation, potential, Hill's class of equations, coherence function, starting conditions, Riccati's equation, approximation.