УДК 535.36

Н.Т. Процай

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В статье рассматривается неоднородное параболическое дифференциальное уравнение, которое относится к классу уравнений Хилла с потенциальным членом квадратичного вида. Потенциал аппроксимируется кусочно-постоянной функцией, после чего исходное уравнение представляется в виде эквивалентной системы уравнений, для которой получено аналитическое решение. Найдена функция $f_N(t,x)$ при $t = t_N = T$ и рассмотрена эволюция функции на оси $x = 0$. Получено приближенное аналитическое выражение для функции $f(t,x)$ для начального условия $f(t = 0, x) = 1$. Очерчены перспективы дальнейших исследований в данном направлении.

***Ключевые слова**: параболическое дифференциальное уравнение, потенциал, класс уравнений Хилла, функция когерентности, начальные условия, потенциал, уравнение Риккати, аппроксимация.*

Введение

Во многих сложных технических системах, связанных с обработкой информации различной природы, возникают задачи, решение которых математически сводится к решению параболических дифференциальных уравнений. Этот класс уравнений является мощным средством практически любой точной науки (теория вероятности, математическая статистика, теория управления, радиофизике и т.д.) [1 –3]. Например, исследование свойств рассеивающих диссипативных каналов передачи информации возможно осуществлять на основе анализа характеристик распространяющихся информационных импульсов (электромагнитных, акустических и т.д.). Распространение импульсов в подобных средах может быть описано с помощью аппарата параболических дифференциальных уравнений [1].

В данной работе рассматривается неоднородное параболическое дифференциальное уравнение, представленное формулой

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(t)x^2\right)f(t,x) = 0 \qquad (1)$$

с потенциальным членом

$$U(t,x) = b(t)x^2 \qquad (2)$$

квадратичного вида с коэффициентом $b(t)$, постоянным коэффициентом *a* при диффузионном слагаемом и неизвестной функцией $f(t,x)$. Уравнение (1) относится к классу уравнений Хилла. Для потенциалов общего вида получить его аналитическое решение не удается.

Целью работы является получение приближенного выражения для функции $f(t,x)$. Решение будет получено для начального условия

$$f(t = 0, x) = 1 . \qquad (3)$$

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие ***задачи*:**

1. Представить потенциал в виде кусочно-постоянной функции от *t*.

2. Представить уравнение (1) в виде эквивалентной системы уравнений и найти ее решение.

3. Найти функцию $f_N(t,x)$ при $t = t_N = T$ и рассмотреть эволюцию функции $f_N(t,x)$ на оси $x = 0$.

4. Найти приближенное аналитическое выражение для функции $f(t, x = 0)$.

Построение приближенного решения искомого уравнения

Рассмотрим момент времени *T*. Разобьем интервал $[0,T]$ его на N участков $\{\Delta_n\}$

$$T = \sum_{n=1}^{N}\Delta_n .$$

Выберем участки $\Delta_n = t_n - t_{n-1}$, $n = \overline{1,N}$, так, чтобы передать все существенные детали потенциала $U(t,x)$, и обозначим $b_n = b(t_n)$. Имея в виду случай $N >> 1$, заменим в потенциале $U(t,x)$ все значения, лежащие внутри каждого n-ого участка, $1 \le n \le N$, на величину $U(t_n,x)$, где $t_n = \sum_{m=1}^{n}\Delta_m$ - правая граница участка.

Полученный таким образом потенциал $U_N(t,x)$, являющийся кусочно-постоянной функцией от *t*, будем использовать ниже в приближенном уравнении (4).

Теперь приблизим решение уравнения (1) функцией $f_N(t,x)$, которая является решением приближенного уравнения с кусочно-постоянным по *t* приближением $U_N(t,x)$ для потенциала $U(t,x)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_N(t,x)\right) f_N(t,z) = 0, \qquad (4)$$

с условием $f_N(0,x) = 1$.

Если будет найдено решение уравнения (4) для f_N, то искомая функция когерентности будет следовать из него при $N \to \infty$.

Уравнению (4) эквивалентна последовательность уравнений, представленная формулой (5)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_N(t_n,x)\right) f_N(t,x) = 0,$$

$$n = \overline{1,N}, \qquad (5)$$

решения которых определяются начальным условием $f_N(t=0,x) = 1$ и цепочкой граничных условий

$$y_{n+1}(t_n) = y_n(t_n), \quad n = \overline{1,N}, \qquad (6)$$

где $y_n(t)$ - функция $f_N(t,x)$ на n-ом участке.

Перейдем к решению развернутой системы уравнений (5).

Рассмотрим с этой целью произвольный n-й участок:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_N(t_n,x)\right) f_N(t,x) = 0. \qquad (7)$$

На этом участке U_N зависит от координаты t_n как от параметра,

$$U_N(t,x) = b(t)x^2 \equiv b_n x^2.$$

Таким образом, каждое из уравнений (6) является параболическим уравнением в частных производных с кусочно-постоянным по *t* потенциалом. Будем искать решение n-ого уравнения на интервале $[t_{n-1}, t_n]$ в виде функции, представленной выражением (8)

$$f_N(t,x) = \frac{1}{f(t)} \exp\left[g(t)x^2\right]. \qquad (8)$$

Такая форма искомого решения обусловлена квадратичностью потенциала по *x*. Из (6) и (8) вытекают следующие уравнения для введенных функций $f(t)$ и $g(t)$:

$$-\frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} + 4ag(t) = 0,$$

$$\frac{dg(t)}{dt} + 4ag^2(t) + b_n = 0. \qquad (9)$$

Рассмотрим сначала второе уравнение из системы (9), являющееся стандартным уравнением Риккати.

Пусть $g_n = g(t_n)$, тогда для всех n решение этого уравнения с начальным условием $g(t_{n-1}) = g_{n-1}$, вытекающим из (6), следующее:

$$g(t) = \frac{g_{n-1} - (4a/b_n)^{-1/2}\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{4ab_n}(t - t_{n-1})\right)}{1 + (4a/b_n)^{1/2} g_{n-1}\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{4ab_n}(t - t_{n-1})\right)}, \qquad (10)$$

откуда при $t = t_n$ получаем

$$g_n = \frac{g_{n-1} - (4a/b_n)^{-1/2}\,\mathrm{tg}(\sqrt{4ab_n}\Delta_n)}{1 + (4a/b_n)^{1/2} g_{n-1}\,\mathrm{tg}(\sqrt{4ab_n}\Delta_n)}. \qquad (11)$$

В свою очередь, функция $f(t)$ находится из (9) с помощью квадратуры с начальным условием $f(t_{n-1}) = f_{n-1}$, где f_{n-1} - значение функции $f(t)$ при $t = t_{n-1}$

$$\frac{f(t)}{f_{n-1}} = \cos\left(\sqrt{4ab_n}(t - t_{n-1})\right) + \sqrt{4a/b_n}\, g_{n-1} \sin\left(\sqrt{4ab_n}(t - t_{n-1})\right). \qquad (12)$$

Откуда при $t = t_n$ найдем

$$f_n = \left[\cos\left(\sqrt{4ab_n}\Delta_n\right) + \sqrt{4a/b_n}\, g_{n-1} \sin\left(\sqrt{4ab_n}\Delta_n\right)\right] f_{n-1}. \qquad (13)$$

Итак, функция $f_N(t,x)$ при $t = t_N = T$ описывается выражением

$$f_N(t_N,x) = \frac{1}{f_N}\exp(g_N x^2), \qquad (14)$$

при этом последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$, $1 < n \le N$, определяются из рекуррентных соотношений (10) и (12), а также начальных условий:

$$f_0(t=0) = 1;$$

$$g_0(t=0) = 0.$$

Анализ поведения решения на оси x

Рассмотрим далее эволюцию функцию $f_N(t,x)$ на оси $x = 0$. Из рекуррентного соотношения (13) следует

$$f_N = \prod_{n=1}^{N-1}\left[\cos\left(\sqrt{4ab_n}\Delta_n\right) + \sqrt{4a/b_n}\, g_{n-1} \sin\left(\sqrt{4ab_n}\Delta_n\right)\right]. \qquad (15)$$

Допустим далее, что функция $b(t)$ - гладкая. Тогда из (11) следует

$$\mathrm{tg}(\phi_n) = \frac{\mathrm{tg}(\phi_{n-1}) - \mathrm{tg}\left(\sqrt{4ab_n}\Delta_n\right)}{1 + \mathrm{tg}(\phi_{n-1})\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{4ab_n}\Delta_n\right)},$$

где $\mathrm{tg}(\phi_n) = \sqrt{4a/b_n}\, g_n$.

Видно, что

$$\phi_{n+1} = \phi_n - \sqrt{4a/b_n}\,\Delta_n$$

и, следовательно,

$$\phi_N = -\sum_{n=1}^{N} \sqrt{4ab_n}\,\Delta_n .$$

Поэтому

$$g_n = -\frac{1}{\sqrt{4a/b_n}} \operatorname{tg}\left(\sum_{j=1}^{N} \sqrt{4ab_j}\,\Delta_j \right). \qquad (16)$$

Подставляя это выражение в соотношение (14), найдем после упрощений

$$f_N = \cos\left(\sum_{n=1}^{N} \sqrt{4ab_n}\,\Delta_n \right). \qquad (17)$$

Итак, мы получили приближенное аналитическое выражение для функции $f(t, x = 0)$:

$$f(t, x = 0) \approx \cos\left(\sum_{n=1}^{N} \sqrt{4ab_n}\,\Delta_n \right),$$

$$t = \sum_{n=1}^{N} \Delta_n . \qquad (18)$$

Выводы

В статье получено приближенное выражение для функции $f(t, x)$ для начального условия $f(t = 0, x) = 1$:

$$f(t, x = 0) \approx \cos\left(\sum_{n=1}^{N} \sqrt{4ab_n}\,\Delta_n \right),$$

$$t = \sum_{n=1}^{N} \Delta_n .$$

Уравнения рассмотренного типа встречаются, в частности, при анализе распространения сигналов в рассеивающих каналах передачи информации различной природы.

Развитием предложенного аппроксимационного подхода при изучении процессов, влияющих на временное затягивание электромагнитных импульсов, может быть учет затухания излучения при его распространении в неоднородной поглощающей среде [4].

Математической основой при этом послужит учет в параболическом уравнении (3) слагаемого, связанного с поглощением, при этом коэффициенты в уравнении могут зависеть от продольной координаты z.

Отметим также, что анализ эволюции формы временного импульса при его распространении дает возможность судить о пространственном распределении характеристик рассеивающей среды вдоль оси распространения.

Список литературы

1. *Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. В 2-х т. / А. Исимару. – М.: Мир, 1981. – Т. 1. – 280 с.. – Т.2. – 317 с.*
2. *Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику / С.М. Рытов, Ю.А. Кравцов, В.И. Татарский. – М.: Наука, 1978. – 270 с.*
3. *Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания / К. Хелстром. – М.: Мир, 1979. – 344 с.*
4. *Галуза А.А. О временных характеристиках ЭМ импульса, прошедшего через однородную поглощающую диффузионную среду / А.А. Галуза, А.С. Мазманишвили // Радиофизика и радиоастрономия. – 1997. – Т. 2, № 2. – С. 211-214.*

Поступила в редколлегию 19.02.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л. М. Любчик, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

РОЗВ'ЯЗОК ПАРАБОЛІЧНОГО ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

Н.Т. Процай

У статті розглядається неоднорідне параболічне диференціальне рівняння, яке належить до класу рівнянь Хілла з потенціальним членом квадратного виду. Потенціал апроксимується кусково-постійною функцією, після чого рівняння записується у вигляді еквівалентної системи рівнянь, для якої отримано аналітичний розв'язок. Знайдена функція $f_N(t,x)$ при $t = t_N = T$ та розглянуто еволюцію функції на осі $x = 0$. Отримано наближений аналітичний вираз для функції $f(t,x)$ для початкової умови $f(t = 0, x) = 1$. Окреслені перспективи подальших досліджень у зазначеному напрямку/

Ключові слова: *параболічне диференційне рівняння, потенціал, клас рівнянь Хілла, функція когерентності, початкові умови, потенціал, рівняння Ріккаті, аппроксимація.*

SOLUTION PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ALTERNATIVE POTENTIAL

N.T. Protsai

The article is reviewed the inhomogeneous parabolic differential equation. It is belonged to Hill's class of equations with a quadratic potential member. The potential is approximated by a piecewise constant function. Than the equation is represented as equivalent system of equations. For this system of equations is got the analytical solution. The function $f_N(t,x)$ is found for $t = t_N = T$. Evolution of function on the axis $x = 0$ is reviewed. The approximate analytical expression is got for the function $f(t,x)$ for the starting condition $f(t = 0, x) = 1$.

Keywords: *parabolic differential equation, potential, Hill's class of equations, coherence function, starting conditions, Riccati's equation, approximation.*