УДК 006.91

О.А. Боцюра, И.П. Захаров

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ОСОБЕННОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ТИПА А НА ОСНОВЕ БАЙЕСОВСКОГО ПОДХОДА

Описана ревизия GUM, рассмотрены основные особенности оценивания стандартной и расширенной неопределенности измерений типа А на основе Байесовского подхода.

Ключевые слова: *неопределенность измерений, Байесовский подход, функция плотности вероятности.*

Введение

В 1992 году Рабочая группа ISO, состоящая из экспертов BIPM, ISO, OIML и IEC, обнародовала «Руководство по выражению неопределенности измерений» (GUM:1993) [1], которое в настоящее время является фактическим международным стандартом выражения качества измерений в аккредитованных на соответствие требованиям ISO/IEC 17025 [2] лабораториях. GUM был переиздан в 2008 году [3] с незначительными исправлениями, хотя в процессе его использования в деятельности лабораторий накапливались вопросы по его применению в сложных ситуациях и претензии к достоверности получаемых оценок. Это поставило задачу перед рабочей группой объединенного комитета по руководствам в метрологии JCGM WG1 о ревизии GUM [4]. Ключевым вопросом при этом является поиск правильного баланса между точностью изложения материала и простотой применения для среднего пользователя.

JCGM-WG 1 считает, что наиболее простым и интуитивно понятным способом преодолеть упомянутые трудности, было принять в новом Руководстве Байесовский подход к оцениванию неопределенности измерений, используемый в приложениях GUM-S1 и GUM-S2 [5-6]. В этих документах функции плотности вероятности (PDF) связаны с входными величинами в модели измерения и трансформируются через нее, используя метод Монте-Карло. Результатом этой процедуры является численное приближение к PDF для измеряемой величины, или совместное PDF для многомерных измеряемых величин. PDF является универсальным способом выражения состояния знаний экспериментатора об измеряемой величине [7]. Из PDF могут быть извлечены такие параметры как математическое ожидание и стандартное отклонение, принимаемые, соответственно, в качестве оценок истинного значения измеряемой величины и связанной с ним стандартной неопределенностью. Кроме того, из PDF может быть получен интервал охвата (обычно наименьший или вероятностно симметричный) для любой вероятности охвата.

В [4] отмечается, что «В действующем руководстве Байесовский вывод не используется, и Байесовский подход принимается только как способ рассмотрения нестатистических вкладов в неопределенность, так называемых оценок типа *B*. В самом деле, в процедуре Руководства дисперсии распределений используются и распространяются таким же образом, как и в частотном методе. Соответственно, степени свободы закреплены за этими оценками либо законно, для оценок типа *A*, или искусственно, для оценок типа *B* (см [1], G.4.2). Таким образом, в действующем Руководстве Байесовский подход введен только для того, чтобы избежать трудностей, но частотный взгляд является доминирующим. Этот подход включает в себя ряд осложнений, особенно в построении интервала охвата. Кроме того, предложенная процедура страдает от отсутствия общности».

Таким образом, основным мотивом для принятия решения о пересмотре Руководства являлось то, что Руководство после принятия приложений GUM-S1 и GUM-S2 больше не согласуется с ними в части оценивания составляющих типа А.

Целью статьи является рассмотрение особенностей оценивания неопределенности измерений типа А в соответствии с Байесовским подходом.

1. Функция плотности вероятности для статистических вкладов неопределенности и ее параметры

Исходными данными для оценки стандартной неопределенности типа А входной величины X_j являются результаты ее многократных измерений $x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jn_j}$, где n_j – количество этих измерений. Чаще всего за оценку x_j величины X_j принимают их среднее арифметическое:

$$x_j = \overline{x}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ji} . \quad (1)$$

Такая оценка является состоятельной и несмещенной при любом законе распределения $x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jn_j}$ и эффективной для нормального закона [8], который принимается для результатов измерений исходя из центральной предельной теоремы теории вероятности в предположении, что на результат каждого измерения воздействует множество факторов, вызывающих его отклонение от среднего значения.

За несмещенную оценку дисперсии отдельных измерений принимают величину:

$$s^2(x_{ji}) = \frac{1}{n_j - 1}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ji} - \bar{x}_j)^2. \qquad (2)$$

Оценка стандартного отклонения среднего арифметического будет равна:

$$s(\bar{x}_j) = s(x_{ij})\Big/\sqrt{n_j} \qquad (3)$$

и принимается в [1] равной стандартной неопределенности типа А.

Границы интервала охвата для X_j в этом случае имеют вид [7]:

$$\bar{x}_j - t_p(\nu_j)\cdot s(\bar{x}_j) \le X_j \le \bar{x}_j + t_p(\nu_j)\cdot s(\bar{x}_j), \qquad (4)$$

где $t_p(\nu_j)$ – коэффициент Стьюдента для вероятности p и числа степеней свободы $\nu_j = n_j - 1$. Этот коэффициент рассчитывается из равенства:

$$\int_0^{t_p(\nu_j)} p(t,\nu_j)\,dt = \frac{p}{2}, \qquad (5)$$

где $$p(t,\nu_j) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu_j}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_j+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_j}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu_j}\right)^{-\frac{\nu_j+1}{2}} - \qquad (6)$$

распределения Стьюдента (t-распределение).

Это распределение имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию

$$\alpha_j^2 = \frac{\nu_j}{\nu_j - 2}. \qquad (7)$$

Теоретические $\alpha_{теор}$ и рассчитанные методом Монте-Карло $\bar{\alpha}$ значения α приведены в табл. 1.

Байесовский подход предполагает оценку неопределенности измерений как стандартного отклонения распределения X_j. Таким образом, стандартная неопределенность типа А будет равна:

$$u_A(x_j) = \alpha_j \cdot s(\bar{x}_j) = \sqrt{\frac{(n_j-1)}{(n_j-3)}}s(\bar{x}_j), \qquad (8)$$

Зависимость коэффициента α от n приведена на рис. 1. Из рис. 1 видно, что максимальное отличие $u_A(x_i)$ от $s(\bar{x}_j)$ достигается при n=4 и равно $\sqrt{3}$. При $n \to \infty$ коэффициент $\alpha \to 1$, а оценка $u_A(x_i)$ стремится к $s(\bar{x}_j)$, предписанной в [1].

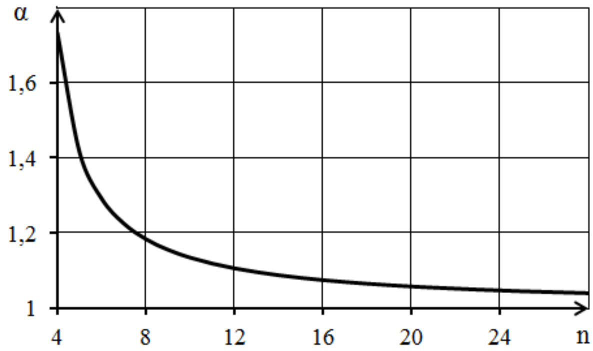

Рис. 1. Зависимость коэффициента α от числа измерений n

Необходимо отметить, что оценка (8) будет существовать только при $n > 3$. Это условие вынудило ограничить определение многократных измерений, принятое в [9], четырьмя измерениями. Однако в метрологической практике довольно часто число производимых измерений принимается равным трем (например, при измерениях, сопряженных с большими временными затратами) [10].

Следует отметить, что численный эксперимент, проведенный методом Монте-Карло с объемом выборок N=10^7 все же показывает наличие у распределения Стьюдента с $\nu = 2$ стабильного значения стандартного отклонения α, в среднем равного 4 (табл. 1).

Таблица 1

Стандартные отклонения распределения Стьюдента α для степеней свободы ν=1…6

i	ν=1	ν=2	ν=3	ν=4	ν=5	ν=6
1	1920	4,231	1,723	1,415	1,290	1,224
2	6505	3,877	1,721	1,415	1,291	1,225
3	7032	3,692	1,729	1,414	1,291	1,225
4	1530	4,299	1,731	1,414	1,291	1,225
5	1032	4,032	1,743	1,414	1,290	1,225
6	1933	4,089	1,738	1,415	1,290	1,224
7	6514	3,923	1,729	1,416	1,291	1,225
8	6910	4,209	1,736	1,415	1,290	1,224
9	6127	3,806	1,744	1,416	1,292	1,225
10	2626	3,851	1,734	1,414	1,290	1,224
$\bar{\alpha}$	**4213**	**4,001**	**1,7328**	**1,4148**	**1,2906**	**1,2246**
$s(\bar{\alpha})$	25768	0,203	0,0077	0,0008	0,0007	0,0005
$\alpha_{теор}$	–	–	**1,7321**	**1,4142**	**1,2910**	**1,2247**

Однако стандартное отклонение его оказывается в 25 раз больше, чем для $\nu = 3$ и в 250 раз больше, чем для $\nu \ge 4$. Этот же эксперимент показал, что для $\nu = 1$ α не имеет стабильного значения (табл. 1).

В работе [7] отмечается, что расширенная неопределенность $U_A(p)$, понимаемая как полуширина интервала охвата, существует для любых $n \geq 2$ и равна

$$U_A(p) = t_p(n_j - 1) \cdot s(\overline{x}_j). \qquad (9)$$

С другой стороны, эта неопределенность может быть вычислена как

$$U_A(p) = k_p \cdot u_A(x_j) = k_p \cdot \alpha_j \cdot s(\overline{x}_j), \qquad (10)$$

где k_p – коэффициент охвата, откуда

$$k_p = \frac{t_p(n_j - 1)}{\alpha_j} = t_p(n_j - 1)\sqrt{\frac{n_j - 3}{n_j - 1}}. \qquad (11)$$

Зависимость k_p для неопределенности типа A для разных уровней значимости p и числа измерений $n > 3$ имеет вид, представленный на рис. 2.

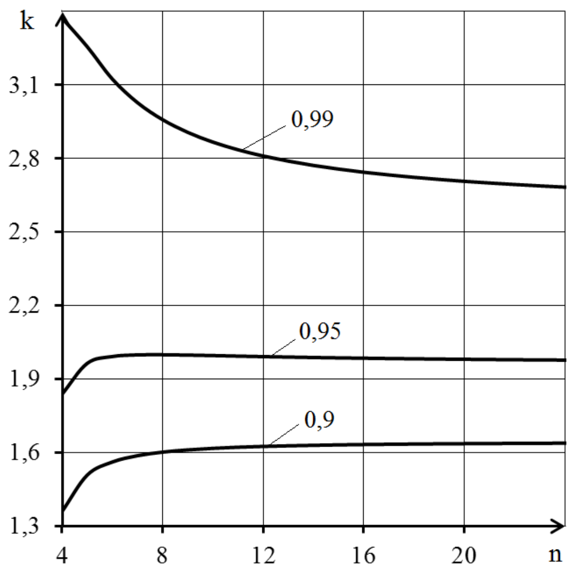

Рис. 2. Зависимость коэффициентов охвата для разных уровней значимости p и числа измерений n

Из рис. 2 видно, что для вероятности 0,95 значения коэффициента охвата изменяются в диапазоне от 1,84 (при n =3) до 2,0 (при n = 8) и с дальнейшим увеличением стремится к 1,96. Если приближенно считать $k_{0,95}$=1,96, погрешность вычисления расширенной неопределенности будет находиться в пределах от 6,7 до –1,9 %. Принятие $k_{0,95}$=1,915 симметрирует границы погрешности вычисления расширенной неопределенности для всех значений $n > 3$ до ±4,2 %. Для других вероятностей (p=0,9 или p=0,99) использование единого коэффициента охвата для всех n приводит к существенным погрешностям вычисления расширенной неопределенности, поэтому не применимо. Следует отметить, что применение вероятности 0,95 для вычисления расширенной неопределенности рекомендует MRA [11].

2. Комбинация вкладов неопределенности типа А

В общем виде модель измерений описывается выражением [1]:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_m), \qquad (12)$$

где Y – измеряемая величина, $X_1, X_2, ..., X_m$ – входные величины.

В этом случае выражение для суммарной стандартной неопределенности Y при отсутствии корреляции между аргументами будет иметь вид:

$$u_{cA}(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 u_A^2(\overline{x}_j)}, \qquad (13)$$

где c_j – соответствующие коэффициенты чувствительности.

Расширенную неопределенность типа *A* можно вычислить по формуле:

$$U_A(p) = k_p u_{cA}(y) = k_p \sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 \alpha_j^2 s^2(\overline{x}_j)}, \qquad (14)$$

где k_p – коэффициент охвата.

В частном случае, при $n_j = n$, будем иметь

$$U_A(p) = k_p \alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 s^2(\overline{x}_j)}. \qquad (15)$$

Общий коэффициент α, вынесенный за корень, говорит о том, что PDF для измеряемой величины в этом случае – распределение Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = n - 1$.

В общем случае приближенно можно принять в выражении (14) k_p =1,96 с указанной выше погрешностью.

Более точно значение k_p можно вычислить исходя из следующих рассуждений.

В работе [12] показано, что расширенная неопределенность для вероятности p=0,95 композиции законов распределения Стьюдента, определяется выражением (т.н. закон распространения расширенной неопределенности):

$$U_A(p) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} U_P^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} t_{0,95}^2(\nu_i) c_j^2 s^2(\overline{x}_j)}. \qquad (16)$$

В частном случае, при $n_j = n$, будем иметь

$$U_A(p) = t_{0,95}(n - 1)\sqrt{\sum_{j=1}^{m} c_j^2 s^2(\overline{x}_j)}, \qquad (17)$$

что хорошо согласуется с выводами, сделанными после выражения (15).

С другой стороны $U_A(p)$ определяется выражением (14), поэтому

$$k_p = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} t_{0,95}^2(\nu_i) c_j^2 s^2(\bar{x}_j) \Big/ \sum_{j=1}^{m} c_j^2 \alpha_j^2 s^2(\bar{x}_j)}\,. \quad (18)$$

При наличии коррелированных входных величин, например X_j и X_k следует рассчитать их суммарную стандартную неопределенность типа А по формуле:

$$u_{jk}(y) =$$
$$= \sqrt{c_j^2 u_A^2(\bar{x}_j) + 2\rho_{jk} c_j c_k u_A(\bar{x}_j) + c_k^2 u_A^2(\bar{x}_k)} =$$
$$= \alpha_{jk}\sqrt{c_j^2 s^2(\bar{x}_j) + 2\rho_{jk} c_j c_k s(\bar{x}_j) s(\bar{x}_k) + c_k^2 s^2(\bar{x}_k)}\,, \quad (19)$$

где ρ_{jk} − коэффициент корреляции между данными измерений X_j и X_k, α_{jk} − стандартное отклонение для распределения Стьюдента с числом степеней свободы ν_{jk}, одинаковым для обеих входных величин. После расчета $u_{jk}(y)$ ее можно подставить вместо вкладов неопределенности $u_{jk}(y)$ и $u_{jk}(y)$ в формулу (13). Все остальные выражения (14)-(18) будут справедливы для этого случая.

Выводы

1. Ревизия GUM, проводимая JCGM WG1 вызвана тем, что GUM после принятия приложений GUM-S1 и GUM-S2 больше не согласуется с ними. В основу нового Руководства будет положен Байесовский подход к оцениванию неопределенности измерений, опирающийся на распределения входных величин.

2. Рассмотрена функция плотности вероятности для статистических вкладов неопределенности и ее параметры. Показано, что этот подход применим для числа многократных измерений больше четырех, однако его применение возможно и для трех измерений, поскольку методом Монте-Карло показано, что распределение Стьюдента для числа степеней свободы два имеет стабильное стандартное отклонение, равное 4.

3. Получены выражения для оценивания суммарной стандартной и расширенной неопределенности для комбинации вкладов неопределенности типа А. Показано, что эти выражения могут быть использованы при отсутствии и наличии корреляции между результатами измерений входных величин.

Список литературы

1. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, ISO, Geneva, First Edition, – 1995 – 101 p.*
2. *ISO/IEC 17025:2005. General requirements for the competence of testing and calibration laboratories.*
3. *JCGM 100:2008. Evaluation of measurement data – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. – JCGM, 2008. – 120 p.*
4. *Bich et al. Revision of the «Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement»// Metrologia. − 2012. − Vol. 49, pp. 702–705.*
5. *JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data − Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” − Propagation of distributions using a Monte Carlo method. − JCGM, 2008. − 88 p.*
6. *JCGM 102:2011 Evaluation of measurement data − Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” − Extension to any number of output quantities. − JCGM, 2011. − 72 p.*
7. *Вегер В. Информация о измеряемой величине как основа для формирования плотности вероятности / В. Вегер // Измерительная техника. – 2003. – № 9. – С. 3-9.*
8. *Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М.: Мир, 1975. – 648 с.*
9. *ГОСТ Р 8.736 – 2011. ГСИ. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения. – М.: Стандартинформ, 2013 – 24 с.*
10. *Мироновский Л.А. Алгоритмы оценивания результата трех измерений / Л.А. Мироновский, В.А. Слаев. – СПб.: Профессионал, 2010 – 192 с.*
11. *Mutual recognition of national measurement standards and of calibration and measurement certificates issued by national metrology institutes. Paris, 1999 – 48 p.*
12. *Захаров И.П. Композиция законов распределения Стьюдента / И.П. Захаров // Системи обробки інформації. – 2005. – Вип. 8. – С. 28-35.*

Поступила в редколлегию 1.04.2015

Рецензент: д-р техн. наук. проф. Ю.П. Мачехин, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ОСОБЛИВОСТІ ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ ЗА ТИПОМ А НА ОСНОВІ БАЙЄСІВСЬКОГО ПІДХОДУ

О.А. Боцюра, І.П. Захаров

Описано ревізію GUM, розглянуто основні особливості оцінювання стандартної та розширеної невизначеності вимірювань за типом А на основі Байєсівського підходу.

Ключові слова: *невизначеність вимірювань, Байєсівський підхід, функція щільності ймовірності.*

PECULIARITIES OF EVALUATION OF MEASUREMENT UNCERTAINTY TYPE A BASED ON A BAYESIAN APPROACH

O.A. Botsiura, I.P. Zakharov

The revision of GUM is described, the basic peculiarities of evaluation of standard and extended measurement uncertainties of type A based on the Bayesian approach is reviewed.

Keywords: *measurement uncertainty, Bayesian approach, probability density function.*