УДК (006.91:519.2)

Ю.В. Куц, С.В. Шенгур, О.С. Мельник

Національний авіаційний університет, Київ

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДУ ВИБІРКОВИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ МОМЕНТІВ В ЗАДАЧАХ АПРОКСИМАЦІЇ РОЗПОДІЛІВ КУТОВИХ ДАНИХ

Проведені моделювання та експериментальні дослідження апроксимації законів розподілу кутових даних методом вибіркових тригонометричних моментів. Наведені результати апробації методу для різних типів розподілів кутових даних.

Ключові слова: *апроксимація, тригонометричний момент, випадковий кут.*

Вступ

Важливою задачею аналізу результатів кутових вимірювань є опрацювання експериментальних даних та встановлення емпіричних розподілів досліджуваних значень випадкових кутів (ВК). Під час оброблення даних спостережень випадкових величин часто припускають відомим вид закону їх розподілу, що дозволяє виконувати оцінку значень його параметрів та характеристик за результатами вимірювання. На практиці зазвичай вид закону апріорно невідомий, а теоретичні припущення щодо його виду є сумнівними і можуть привести до отримання некоректних статистичних оцінок. У загальному випадку різноманіття умов проведення вимірювальних експериментів та способів отримання даних вимірювань не дозволяє апріорно обґрунтувати вид розподілу. У цьому разі, за умови достатнього обсягу вибірки, вдаються до апроксимації (наближеного опису) реального закону деяким іншим, який не суперечить одержаним за результатами спостереження даним, та деякою мірою подібний до апріорно невідомого істинного закону. Апроксимація закону розподілу результатів кутових вимірювань забезпечує:

а) підвищення об'єктивності представлення результатів вимірювання випадкового кута з апріорно невідомим законом розподілу;

б) отримання аналітичного виразу щільності ймовірності випадкового кута, що дає можливість оцінити статистичні характеристики досліджуваної вибірки через тригонометричні моменти відповідного порядку, або квантилі розподілу;

в) можливість автоматизації процесу обчислення статистичних характеристик вибірок випадкових кутів та показників їх точності.

Вирішення поставленої задачі апроксимації традиційно здійснюється на основі застосування «типових» розподілів, спеціальних рядів або сімей універсальних розподілів.

У роботах [1, 2] наведено методику апроксимації результатів кутових вимірювань на основі застосування розподілу Джонсона [3-7] з подальшим обчисленням їх точкових та інтервальних оцінок. Проте, застосування такої методики має певні недоліки, викликані, у першу чергу, обмеженістю функцій Джонсона, а також особливостями кругової шкали відображення даних кутових вимірювань. У роботі [8] розглянуто метод побудови аналітичної функції щільності розподілу ймовірностей за емпіричними даними, одержаними під час кутових спостережень, на основі застосування характеристичної функції.

Метою даної статті є дослідження можливостей методу апроксимації розподілів кутових даних через їх вибіркові тригонометричні моменти шляхом модельних експериментів у порівнянні з методом апроксимації кривими Джонсона.

Постановка задачі

Досліджується випадковий кут $\Psi(\omega)\in[0,2\pi)$, де ω – елементарна подія з області подій Ω, з апріорно невідомим розподілом $p(\theta)$, $\theta\in[0,2\pi)$. Функція $p(\theta)$ може мати значну асиметрію і бути полімодальною (багаточастотною).

Доступним аналізу є вибірка значень випадкового кута $\theta=\{\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_l\}$ обсягу l. Використовуючи цю вибірку необхідно апроксимувати розподіл $p(\theta)$ методом вибіркових тригонометричних моментів і виконати порівняльний аналіз з апроксимацією $p(\theta)$ розподілом Джонсона.

Розв'язок

Методика проведених експериментів з випадковими кутами полягала в наступному:

– формування псевдогенеральної вибірки випадкового кута або суміші випадкових кутів з відомим/відомими розподілами ймовірності обсягу L;

– формування з псевдогенеральної вибірки меншого обсягу $l \ll L$;

– апроксимація розподілу $p(\theta)$ кривими Джонсона і функціями, отриманими методом вибіркових тригонометричних моментів;

– порівняльний аналіз результатів апроксимації.

Апроксимація на основі сім'ї розподілів Джонсона – універсальний вид апроксимації, що базується на такому перетворенні випадкової величини (заданої на скінченному інтервалі значень), яке дозволяє розглядати результат перетворення як стандартизовану випадкову величину, розподілену за стандартним гауссовим законом. Перевагою такого перетворення є те, що оцінки процентилів емпіричних розподілів можна отримати, використовуючи таблицю площ під кривою стандартного нормального розподілу. На відміну від розподілу Пірсона [9], розподіл Джонсона поділяється на три сім'ї кривих, можливості яких стосовно опису статистичних даних еквівалентні можливостям розподілів Пірсона [5].

Задача апроксимації випадкових величин з інтервалу (-∞; ∞) з подальшим визначенням їх статистичних характеристик на сьогодні є досить поширеною та детально висвітлена у багатьох наукових працях та навчальних посібниках. В той же час питання апроксимації законів розподілу випадкових кутів практично не розглянуто у науковій літературі та є недостатньо дослідженим. В загальному випадку перетворення Джонсона має вигляд:

$$z = \gamma + \eta\, \tau\, (x; \varepsilon, \lambda), \qquad (1)$$

де $\tau(x)$ – деяка унімодальна, монотонно зростаюча функція; z – нормована випадкова величина, розподілена за стандартним гауссівським законом; ε, λ, γ, η – параметри, що підлягають підбору: ε – параметр масштабу, $-\infty < \varepsilon < \infty$; λ – параметр масштабу, $\lambda > 0$, $\varepsilon \le x \le \varepsilon+\lambda$; γ – параметр форми, що характеризує асиметрію розподілу, $-\infty < \gamma < \infty$, η – параметр форми, що характеризує гостровершинність розподілу, $\eta > 0$.

Розрізняють три види розподілів Джонсона – S_U, S_L та S_B, які відрізняються формою кривих, відповідними умовами їх отримання та обмеженнями.

Для можливості застосування функції Джонсона до даних, реалізованих на круговій шкалі, у [1, 2] обґрунтована доцільність їх подачі у такому вигляді:

1. Логарифмічно нормальний S_L розподіл:

$$p_{S_L}(\theta) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}(\theta-\varepsilon)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\eta^2\left[\frac{\gamma}{\eta} + \ln(\theta-\varepsilon)\right]^2\right\}, \qquad (2)$$

де $\varepsilon<\theta<2\pi$; ε – нижня границя випадкового кута, $0\le \varepsilon < 2\pi$; $-\infty<\gamma<\infty$; $\eta>0$.

2. S_B розподіл Джонсона:

$$p_{S_B}(\theta) = \left(\eta/\sqrt{2\pi}\right)\cdot\left(\lambda/\left((\theta-\varepsilon)(\lambda-\theta+\varepsilon)\right)\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-0,5\cdot\left[\gamma+\eta\ln\left((\theta-\varepsilon)/(\lambda-\theta+\varepsilon)\right)\right]^2\right\}, \qquad (3)$$

де $\varepsilon<\theta<\varepsilon+\lambda$; ε – найменше ймовірне значення випадкового кута, $0\le \varepsilon < 2\pi$; $\varepsilon+\lambda$ – найбільше ймовірне значення випадкового кута, $0 < \lambda < 2\pi$; $-\infty<\gamma<\infty$, $\eta > 0$.

3. S_U розподіл Джонсона:

$$p_{S_U}(\theta) = \left(\eta/\sqrt{2\pi}\right)\cdot\left(1/\sqrt{(\theta-\varepsilon)^2+\lambda^2}\right)\times$$
$$\times e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\gamma+\eta\ln\left\{\left((\theta-\varepsilon)/\lambda\right)+\left[\left((\theta-\varepsilon)/\lambda\right)^2+1\right]^{1/2}\right\}\right)^2\right]}, \qquad (4)$$

де $0 \le \theta < 2\pi$, ε – параметр, що характеризує центр розподілу, $0 \le \varepsilon < 2\pi$; λ – параметр масштабу, $\lambda > 0$; $-\infty < \gamma < \infty$, $\eta > 0$.

Досліджуваний метод апроксимації розподілів випадкових кутів $\psi(\omega)\in[0, 2\pi)$ ґрунтується на представленні щільності розподілу ймовірності випадкового кута $p(\theta)$ за допомогою характеристичної функції [10, 11]. Остання для цілих значень $n=0, \pm1, \pm2,\ldots$ задається як комплекснозначна послідовність тригонометричних моментів порядку n

$$f_n = \mathbf{M}\{\exp(in\psi(\omega))\}, \qquad (5)$$

де $\mathbf{M}$ – оператор математичного сподівання, $i = \sqrt{-1}$.

Функція $p(\theta)$ однозначно визначається її характеристичною функцією $f_n(\theta)$

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(0)e^{-in\theta}, \qquad (6)$$

тобто – розклад $p(\theta)$ в ряд Фур'є.

Тригонометричні моменти f_n мають представлення в Декартовій і полярній системах координат:

$$f_n = a_n + ib_n = \rho_n \exp(i\mu_n), \qquad (7)$$

де послідовність дійсних чисел $\{a_n, b_n\}$ обчислено у заданій системі координат відносно нульового початкового напрямку:

$$a_n = \mathbf{M}\{\cos(n\psi(\omega))\},\ b_n = \mathbf{M}\{\sin(n\psi(\omega))\}, \qquad (8)$$

$$\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},\ \mu_n = \mathrm{Arg}\, f_n. \qquad (9)$$

Характеристична функція (f_n, $n=0, \pm1,\ldots$) повністю задає $\psi(\omega)$ на $[0,2\pi)$. Її використання в ряді випадків приводить до більш простих аналітичних і алгоритмічних розв'язків вимірювальних задач кутометрії.

Характеристична функція має такі властивості.

1. Модуль тригонометричного моменту характеристичної функції порядку n дорівнює $|f_n|\le1$.

2. Для $n=0$ маємо $f_0=1$.

3. Тригонометричний момент порядку n дорівнює комплексноспряженому тригонометричному моменту характеристичної функції порядку n: $f_{-n} = f_n^*$.

4. Тригонометричний момент n-того порядку суми незалежних випадкових кутів $\psi_1(\omega),\ldots\psi_j$, … $\psi_m(\omega)$ дорівнює добутку тригонометричних моментів того ж порядку всіх m кутів:

$$f_n = \prod_{j=1}^{m} f_n^{(j)}. \qquad (10)$$

5. Характеристична функція суми $[\psi(\omega)+\nu] \bmod 2\pi$, тобто суми випадкового кута і довільного дійсного числа $\nu=\mathrm{const}$ по модулю 2π дорівнює:

$$f_n(\nu) = \mathbf{M}e^{in(\psi+\nu)} = e^{in\nu} f_n(0). \qquad (11)$$

У випадку опрацювання вибірки кутів визначають вибіркову характеристичну функцію випадкового кута, яка являє комплекснозначну послідовність $\left(\hat{f}_n(0), n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\right)$, всі вибіркові тригонометричні моменти якої визначені відносно нульового напрямку $\alpha = 0$:

$$\hat{f}_n(0)=\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}e^{in\theta_j}=\hat{a}_n(0)+i\hat{b}_n(0)=\hat{\rho}_n(0)e^{i\hat{\mu}_n(0)}, \quad (12)$$

де $\hat{a}_n(0)=\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}\cos(n\theta_j)$; $\hat{b}_n(0)=\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}\sin(n\theta_j)$. (13)

Вирази (13) - (14) визначають відповідно вибіркові косинус- та синус-моменти порядку n.

Сутність методу апроксимації розподілів кутових даних вибірковими тригонометричними моментами полягає у заміні у виразі (6) тригонометричних моментів випадкових кутів їх оцінками – відповідними вибірковими тригонометричними моментами (12), отриманими з вибірки ($\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_j, \ldots \theta_l$).

Експериментальне дослідження методу апроксимації кутових даних вибірковими тригонометричними моментами

Дослідження виконувалось методом комп'ютерного моделювання в програмному середовищі LabView [12].

Методика проведення комп'ютерного експерименту полягала у такому.

1. Формування реалізації ВК $\Theta=\{\theta_1,\ldots,\theta_j,\ldots,\theta_L\}$ значного обсягу L=10000 із генеральної сукупності або шляхом комбінування вибірок декількох випадкових кутів із заданими круговими законами розподілу ВК, тобто з областю значень на інтервалі $[0, 2\pi\}$.

2. Формування з Θ вибірки малого обсягу l=30...200 значень шляхом випадкового вибору без повернення.

3. Підбір функції щільності розподілу ймовірностей для сформованої у п. 2 вибірки з використанням методу вибіркових тригонометричних моментів та методу апроксимації кривими Джонсона.

4. Порівняльний аналіз отриманих апроксимацій функції щільності розподілу ймовірностей.

Нижче наведені приклади підбору функції щільності розподілу ймовірностей для вибірок обсягом від 30 до 200 значень, які належать до різних законів розподілу.

1. Апроксимація вибірки випадкового кута з розподілом Мізеса.

Для можливості перевірки методу вибіркових тригонометричних моментів для апроксимації вибірок випадкових кутів, що належать до стандартизованих законів розподілу використано розподіл Мізеса [10-11, 13-15] ($p(\theta)=\left[2\pi I_0(k)\right]^{-1}\exp\left[k\cos(\theta-\mu)\right]$, $0 \le \theta < 2\pi$, де $|\mu| < \infty$ та $k > 0$ – відповідно параметри положення та концентрації, $I_0(k)$ – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку). Для цього сформовано вибірки випадкових кутових даних обсягом n=30…70 з розподілом Мізеса та параметрами $\mu=\pi$, k=4.

На рис. 1 а, б наведені графіки функцій щільності розподілу ймовірностей Мізеса (крива 1), апроксимуюча функція, отримана за методом вибіркових тригонометричних моментів (крива 2) та гістограма (крива 3). Порядок використаного вибіркового тригонометричного моменту не вище 5.

Як видно з графіків, метод вибіркових тригонометричних моментів задовільно апроксимує вибірку випадкових кутів, а апроксимуюча функція наближається до аналітичної зі збільшенням обсягу вибірки. Однак, апроксимуюча функція в області малих значень має характер незначних знакозмінних осциляцій, що не відповідає у повній мірі умовам нормування щільності розподілів ймовірності.

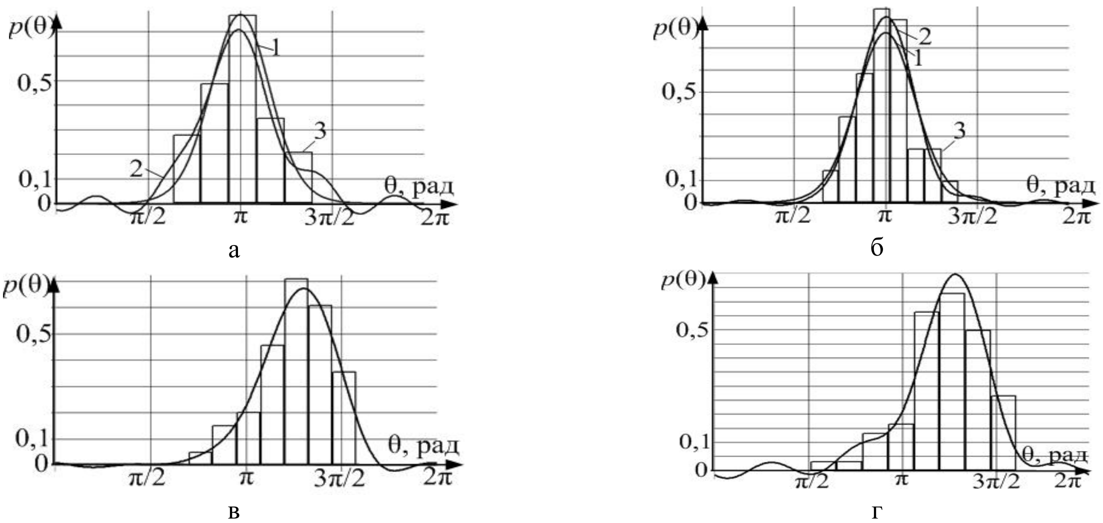

Рис. 1. Апроксимація вибірок ВК
методом вибіркових тригонометричних моментів; обсяг вибірки: а – 30; б – 70; в – 50; г –70

2. Апроксимація вибірки випадкового кута невідомого асиметричного розподілу.

Асиметричну псевдогенеральну вибірку сформовано шляхом комбінування трьох розподілів Мізеса з такими параметрами:

$\mu1=3{,}19$ (183º), k1=8,7, L1=20000;

$\mu2=2{,}55$ (146º), k2=3, L2=5000;

$\mu3=2{,}15$ (123º), k3=2,4, L3=10000.

Приклади апроксимації отриманих у такий спосіб вибірок обсягом 50 та 70 значень показані на рис. 1, в, г. Для апроксимації використано вибіркові тригонометричні моменти перших чотирьох порядків.

З аналізу графіків на рис. 1, в, г можна зробити висновок про те, що досліджуваний метод можна застосовувати для апроксимації вибірок кутових даних, що належать до апріорно невідомого асиметричного закону розподілу.

Небажані осциляції кривих щільності розподілів присутні і в цьому випадку.

3. Порівняння методу тригонометричних моментів та методу апроксимації емпіричних розподілів функціями Джонсона.

Для порівняння двох методів апроксимації випадкових кутів – методу вибіркових тригонометричних моментів та методу апроксимації функціями Джонсона сформовано вибірки обсягом 30, 50, 70 та 100 значень. Генеральна сукупність належить до асиметричного розподілу, одержаного як гранична щільність осьової складової розподілу Лангевіна-Фішера на сфері [14]:

$$p(\theta) = C\sin\theta\exp\left\{k\cos(\theta)\right\},\ 0 \le \theta < \pi\,, \qquad (15)$$

де C та k>0 – параметри масштабу.

У виконаному дослідженні задавались такі значення параметрів C = 0,4, k = 1,2. На рис. 2 зображені варіанти апроксимації вибірок заданого обсягу:

крива 1 – вихідна, апроксимована функція щільності розподілу ймовірностей;

крива 2 – підібрана функція з S_L розподілу Джонсона;

крива 3 – апроксимуюча функція, отримана за методом тригонометричних моментів;

крива 4 – гістограма вибірки.

Порядок використаних тригонометричних моментів не вище четвертого. Апроксимуюча функція за методом вибіркових тригонометричних моментів візуально більше наближена до вхідної функції щільності розподілу ймовірності зокрема в області моди.

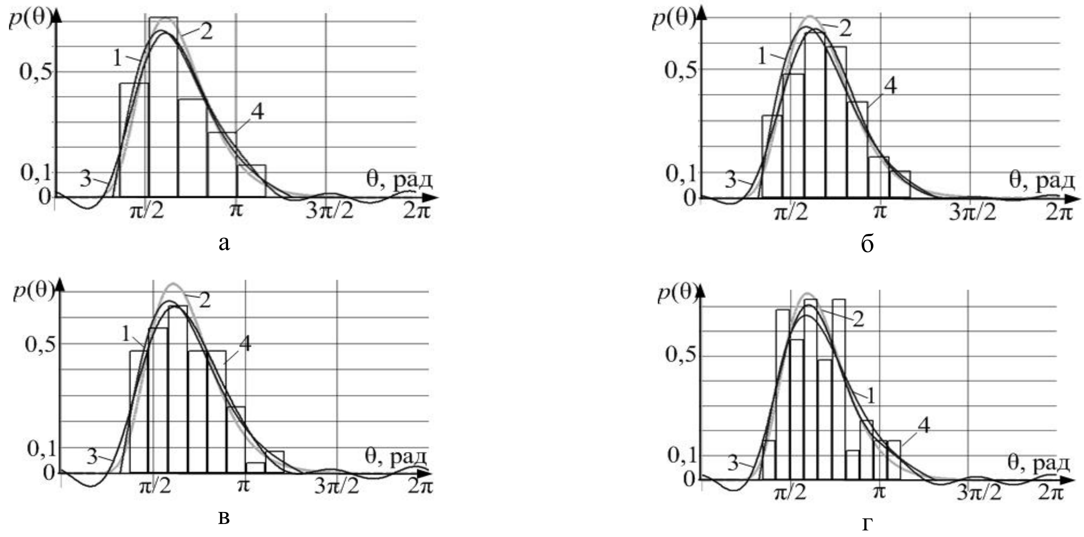

Рис. 2. Порівняння методу вибіркових тригонометричних моментів
та методу апроксимації емпіричних розподілів функціями Джонсона; обсяг вибірки: а – 30; б – 50; в – 70; г – 100

4. Апроксимація вибірки випадкових кутів з двомодальним законом розподілу

Експеримент (рис. 3) проведено з вибіркою випадкових кутів обсягом 200 значень, сформованою з генеральної сукупності обсягом 40000 значень. Остання отримана шляхом комбінування двох розподілів Мізеса з параметрами:

$\mu1$=4,36 (250º), $k1$=3, $L1$=20000;

$\mu2$=1,75 (100º), $k2$=3, $L2$=20000.

Гістограми вибірки ВК та графіки отриманих апроксимацій розподілів представлені на рис. 3.

Аналіз отриманих графіків засвідчує, що метод тригонометричних моментів в цілому задовільно апроксимує двомодальні розподіли випадкових кутів, зберігає характерні особливості їх форми, адекватно відтворює кути, в околі яких має місце підвищена концентрація даних.

Підвищення порядку тригонометричних моментів приводить до виникнення осциляцій та значного спотворення результатів апроксимації щільностей розподілів випадкових кутів.

Висновок

Досліджено можливості методу вибіркових тригонометричних моментів для апроксимації розподілів кутових даних з областю значень в інтервалі $[0,2\pi)$ на якісному рівні.

Встановлено, що цей метод, на відміну від інших методів апроксимації, задовільно апроксимує двомодальні розподіли ймовірності, які мають місце в аналізі експериментальних даних кутових вимірювань і зберігає здатність апроксимувати несиметричні розподіли ймовірності випадкових кутів.

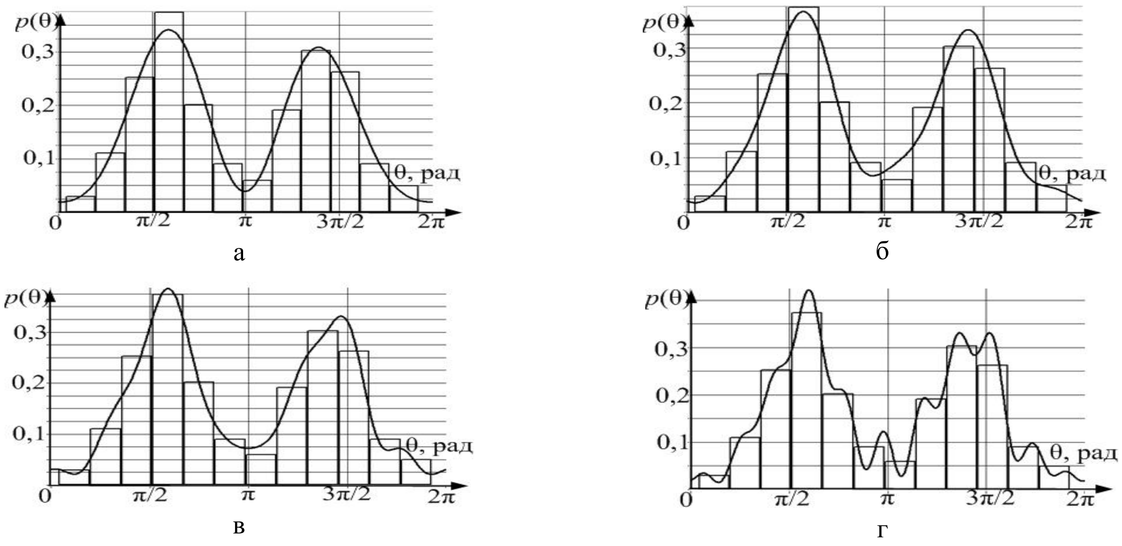

Рис. 3. Апроксимації двомодальної щільності ймовірності вибірки ВК;
порядок найвищого використаного вибіркового тригонометричного моменту: а – 3; б – 5; в – 9; г – 11

В ряді випадків апроксимаційні криві мають характер осциляцій і можуть набувати невеликих від'ємних значень, що не відповідає сутності ймовірнісної міри і потребує проведення додаткових досліджень для усунення цього ефекту. Розглянутий метод апроксимації потребує подальших досліджень для встановлення кількісних оцінок його адекватності розподілам генеральної вибірки.

Список літератури

1. *Куц Ю.В. Знаходження довірчого інтервалу в задачах кутометрії за апроксимацією емпіричних даних розподілом Джонсона / Ю.В. Куц, С.В. Шенгур // Відбір і обробка інформації. – 2011. – Вип. 35 (111). – С. 32-37.*
2. *Куц Ю.В. Подання результату кутових вимірювань в концепції невизначеності / Ю.В. Куц, С.В. Шенгур // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2013. – Вип. 3 (110). – С. 97-100.*
3. *Johnson N.L. Systems of frequency curves generated by methods of translation / N.L. Johnson // Biometrica. – Vol. 36, 1949. – P. 148-176.*
4. *Johnson N.L. Systems of Frequency Curves / N.L. Johnson, W.P. Elderton. – London: Cambridge University Press, 1969. – 216 p.*
5. *Хан Г. Статистические модели в инженерных задачах / Г. Хан, С. Шапиро: Пер. с англ. Е. Г. Коваленко / Под ред. В.В. Налимова. – М.: Мир, 1969. – 396 с.*
6. *Кендалл М. Теория распределений / М. Кендалл, А. Стьюарт. – М.: Наука, 1966. – 566 с.*
7. *Вентцель Е.С. Теория вероятности / Е.С.Вентцель. – М.: Наука, Физматгиз, 1969. – 576 с.*
8. *Куц Ю.В., Застосування методу тригонометричних моментів в аналізі даних фазових вимірювань / Ю.В. Куц, І.А. Купрійчук, А.А. Рижкова // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2013. – № 6 (113). – С. 98-102.*
9. *Pearson E.S. Studies in the History of Statistics and Probability / E.S. Pearson, M. Kendall. – London: Oxford University Press, 1987. – 501 p.*
10. *Mardia K.V. Statistics of directional data / K.V. Mardia, P.E. Jupp. – London: Academic Press Inc., 1972. – 415 p.*
11. *Куц Ю.В. Статистична фазометрія / Ю.В. Куц, Л.М. Щербак – Тернопіль, 2009. – 383с.*
12. *Блюм П. LabView: стиль программирования / П. Блюм. – М.: ДМК Пресс, 2008 – 400 с.*
13. *Von Mizes R. Probability, Statistics and Truth / R. Von Mizes. – NY: Dover Publ., 1957. – 244 p.*
14. *Jammalamadaka S. Rao. Topics in circular statistics / S. Rao Jammalamadaka, A. SenGupta. – Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001 – 322p.*
15. *Fisher N.I. Statistical analysis of circular data. / N.I. Fisher. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 277 p.*

Надійшла до редколегії 18.03.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.М. Щербак, Національний авіаційний університет, Київ.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА ВЫБОРОЧНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ АППРОКСИМАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ УГЛОВЫХ ДАННЫХ

Ю.В. Куц, С.В. Шенгур, Е.С. Мельник

Проведены моделирование и экспериментальные исследования аппроксимации законов распределения угловых данных методом выборочных тригонометрических моментов. Приведены результаты апробации метода для разных типов распределений угловых данных.

***Ключевые слова**: аппроксимация, тригонометрический момент, случайный угол.*

RESEARH OF SAMPLE TRIGONOMETRIC MOMENT'S METHOD FOR CIRCULAR DISTRIBUTIONS APPROXIMATION TASKS

Y.V. Kuts, S.V. Shengur, E.S. Melnik

Circular distributions approximations by sample trigonometric moment's method are simulated and experimentally investigated. Method's testing results for different circular distribution types are described.

***Keywords:** approximation, trigonometric moment, random circle.*