УДК 389.14:53.083

С.Ф. Левин

Московский институт экспертизы и испытаний, Москва, Россия

ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДУЛЯ ПОЛНОГО ИМПЕДАНСА ЭЛЕМЕНТА ЦЕПИ

Рассмотрен пример из Приложения Н.2 «Руководства по выражению неопределенности измерения» с точки зрения теории измерительных задач. Показано, что характеристики неопределенности результатов в примере существенно расходятся с интервальными оценками математической статистики.

***Ключевые слова**: метод косвенного измерения, суммарная неопределенность, толерантный интервал, погрешность неадекватности модели.*

Введение

Решение конкретных измерительных задач различными методами оказывается гораздо плодотворнее теоретических споров специалистов, придерживающихся различных точек зрения. Ситуация запутывается, если различные точки зрения выражаются одними и теми же словами, которые фактически являются различными терминами. Ситуация запутывается еще больше, когда одни и те же термины заменяют ненормативными словами. Однако полезнее судить о качестве результатов решения измерительных задач не по используемой терминологии, а по применяемым вычислительным схемам. И хотя многие нормативные документы сопровождаются примерами расчетов, именно они становятся камнем преткновения для некоторых разработчиков.

В Приложении Н.2 «Руководства по выражению неопределенности измерения» [1] дан пример решения измерительной задачи определения модуля полного импеданса элемента цепи Z = V/I, где V – амплитуда изменяющейся по гармоническому закону разности потенциалов на клеммах элемента, I – амплитуда проходящего через элемент переменного тока. В этой задаче измерялись одновременно эти величины и фазовый сдвиг *Φ* между ними (табл. 1).

Таблица 1

Данные измерений

Номер измерения, k	Входные переменные		
	V, В	I, мА	Φ, рад
1	5,007	19,663	1,0456
2	4,994	19,639	1,0438
3	5,005	19,640	1,0468
4	4,990	19,685	1,0428
5	4,999	19,678	1,0433
Среднее арифметическое	4,9990	19,6610	1,04446
Выборочное стандартное отклонение среднего	0,0032	0,0095	0,00075
Коэффициенты корреляции			
$r(\bar{V},\bar{I}) = -0{,}36;\ r(\bar{I},\bar{\Phi}) = -0{,}65;\ r(\bar{V},\bar{\Phi}) = 0{,}86.$			

Решение задачи получено двумя способами:

Z_1 = (254,260 ± 0,236) Ом, Z_2 = (254,260 ± 0,204) Ом.

Если в первом решении корреляция учитывалась, то во втором расчет проводился в предположении незначимой корреляции между *V* и *I*. Показателем точности исходных данных было принято «выборочное стандартное отклонение среднего», а для конечного результата – суммарная стандартная неопределенность $u_c(Z)$. Метрологические характеристики средств измерений не учитывались.

В статье рассмотрены решения этой задачи, полученные методами математической статистики.

Интервальное оценивание

При отсутствии сведений о виде распределения совокупностей данных измерений используют гипотезу о равномерном распределении [2]. Оценки параметров положения и рассеяния этого распределения по крайним членам вариационного ряда из *N* членов имеют вид соответственно (табл. 2)

$$X_{\hat{\theta}_{R1}} = \frac{\hat{x}_{(1)} + \hat{x}_{(N)}}{2} \text{ и } X_{\hat{\theta}_{R2}} = \frac{N+1}{N-1}\cdot\frac{\hat{x}_{(N)} - \hat{x}_{(1)}}{2}.$$

Таблица 2

Протокол вычислений

Номер вычисления, *k*	Выходная переменная
	Z, Ом
1	254,6406957
2	254,2899333
3	254,8370672
4	253,4925070
5	254,0400447
$\hat{z}_{(1)}; \hat{z}_{(N)}$	253,4925070; 254,8370672
$Z_{\hat{\theta}_{R1}}$	254,1647871
$Z_{\hat{\theta}_{R2}}$	1,00842015
$Z_{\hat{\theta}_{R2}} / \sqrt{3}$	0,5822116451

При этом параметр рассеяния равномерного распределения вероятностей в √3 раз больше его стандартного отклонения, которое в этой ситуации является стандартной неопределенностью типа В:

Z = (254,165 ± 1,009) Ом в границах распределения;
Z = (254,165 ± 0,583) Ом в стандартных отклонениях.

Другой простой способ решения задачи связан с интервальной арифметикой:

$$Z^{+\Delta_Z^+}_{-\Delta_Z^-} = V^{+\Delta_V^+}_{-\Delta_V^-} \Big/ I^{-\Delta_I^-}_{+\Delta_I^-} = \frac{{}^{V}\hat{\theta}_{R1}}{{}^{I}\hat{\theta}_{R1}} \cdot \frac{1 \pm {}^{V}\hat{\theta}_{R2} \,/\, {}^{V}\hat{\theta}_{R1}}{1 \mp {}^{I}\hat{\theta}_{R2} \,/\, {}^{I}\hat{\theta}_{R1}} =$$

$$= \frac{4{,}9985 \pm 0{,}01275}{0{,}019662 \mp 0{,}0000345} = 254{,}2213407^{+1{,}096453254}_{-1{,}092612246}.$$

Соответственно

Z = (254,22±1,10) Ом в границах распределения,
Z = (254,221±0,635) Ом в стандартных отклонениях.

Вероятностное оценивание

Более сложные методы оценивания связаны со статистической проверкой гипотез о виде распределения. Однако традиционные процедуры при малом числе измерений оказываются заложниками выбора уровня значимости, поэтому распространение получили методы проверки сложных гипотез на основе максимального правдоподобия и MD–оценок [3]. В последнем случае критерием выбора стал минимум некоторого расстояния между статистической $F_{(N)}(x)$ и гипотетической $F_*(x)$ функциями распределения. Его роль играют расстояние Колмогорова D_*, среднее абсолютное отклонение (САО) гипотетической функции распределения вероятностей от статистической функции распределения данных измерений $đ_*$ (от ее т.н. срединных точек) и каппа-статистика вероятности согласия $æ_*$ [4] при равном количестве параметров конкурирующих распределений [5].

Программы «ММИ–поверка» [6, 7] реализуют эти положения [5, 7–9] для различных классов распределений вероятностей. Для нахождения границ толерантного интервала данные измерений (табл. 2) центрируют выборочной медианой 254,2899333 Ом и представляют статистической функцией распределения (табл. 3). При этом в качестве гипотез предварительно рассматриваются типовые распределения вероятностей, определенные на бесконечном интервале (Лапласа, Гаусса и Коши), дополненные равномерным распределением. Оценки параметров этих распределений методом максимального правдоподобия приведены в Таблице 4, где разность последней и предпоследней колонок есть относительная частота повторения выборочного значения $\xi_{[r]}$.

Таблица 3

Статистическая функция распределения центрированных данных многократных измерений

r	$\xi_{[r]}$	$F^-_{(5)}(\xi_{[r]})$	$F^+_{(5)}(\xi_{[r]})$
1	–0,7974263110	0	0,2
2	–0,2498885760	0,2	0,4
3	0	0,4	0,6
4	0,3507624269	0,6	0,8
5	0,5471339138	0,8	1

Таблица 4

Оценки параметров положения и рассеяния гипотетических распределений вероятностей для центрированных данных

Распределение	$\hat{\theta}_{*1}$	$\hat{\theta}_{*2}$
Равномерное, $*$ = R	–0,1251461986	1,0084201686
Лапласа, $*$ = L	0	0,3890422455
Гаусса, $*$ = G	–0,0298837093	0,4724950034
Коши, $*$ = K	0	0,3003255015

При нулевых погрешностях средств измерений, как и в рассматриваемом примере из «Руководства по выражению неопределенности измерения», результаты проверки гипотез о виде распределения по критерию минимума MD–оценок согласно программе «ММИ–поверка» приведены в табл. 5.

Таблица 5

Результаты проверки гипотез

Распределение	D_*	$æ_*$	$đ_*$
$*$ = R	0,2381496021	0,3372972337	0,0739001970
$*$ = L	0,1970411770	0,6157276860	0,0384272314
$*$ = G	0,1898319763	0,6109635662	0,0389036434
$*$ = K	0,1746089236	0,6600883597	**0,0339**911640

По всем трем критериям наиболее правдоподобным оказалось распределение Коши, для которого дисперсия не существует. При этом в качестве основного в рассматриваемой измерительной задаче был принят критерий минимума САО $đ_*$.

Дело в том, что расстояние Колмогорова является наибольшей из статистик Смирнова и соответствует не просто т.н. «наихудшему случаю», а «самому наихудшему случаю».

В то же время каппа-статистика вероятности согласия $æ_*$ численно равна сумме относительных частот повторения выборочных значений, для которых гипотетическая функция распределения вероятностей пересекает интервал, ограниченный характерными точками статистической функции распределения вероятностей, указанными в двух последних колонках Таблицы 3 [4]. При малом количестве измерений N для большинства гипотетических функций распределения вероятностей $æ_*$ = 1, и выбор вида распределения по критерию максимума вероятности согласия теряет смысл, тогда как критерий минимума $đ_*$ от этого недостатка свободен.

Таким образом, в рассматриваемой измерительной задаче состоятельность оценок неопределенности измерения в узком смысле, упомянутых в стандарте [1], вызывает сомнения.

Для усеченных распределений условия существования математического ожидания и дисперсии не являются такими жесткими, как для типовых классических распределений с бесконечными «хвостами». Поэтому воспользуемся классом усеченных распределений вероятностей, дополненным распределением Трубицына для аппроксимации двойного экспоненциального распределения с параметром формы «4» [5, 7, 9] и программой «ММИ–поверка 2.0» [9] в режиме нахождения границ толерантного интервала, содержащего долю распределения вероятностей возможных значений измеряемой величины, соответствующую заданной доверительной вероятности Р. Для этого достаточно в диалоговом режиме установить такие границы допуска, при которых показатель «Достоверность поверки» примет требуемое значение доверительной вероятности.

Следует заметить, что частное гауссовых величин имеет распределение Коши. К этому же распределению сходится и распределение Стьюдента при одной степени свободы.

В программе «ММИ–поверка 2.0» [7] предусмотрен выбор вида усеченного распределения вероятностей по критерию минимума погрешности неадекватности с учетом обоих статистик Смирнова.

Наиболее правдоподобным из числа рассмотренных оказалось усеченное в точках 253,156367 Ом и 255,1732073 Ом распределение Коши с параметром положения (**254,2899**333 + **0,0338**) Ом и параметром рассеяния **0,5194**141542 Ом. При этом САО гипотетической функции распределения вероятностей $đ_{*[K]}$ = **0,0258**382351 и не менее 95 % распределения композиции, учитывающей погрешности неадекватности функции распределения вероятностей, находится в границах (254,32 ± 0,99) Ом.

И это решение можно считать окончательным в вопросе о целесообразности использования расширенной или какой-либо другой неопределенности

Заключение

Согласно п. 6.3.2 [1] «в идеале хотелось бы иметь возможность выбрать конкретное значение коэффициента охвата k, которое обеспечивало бы интервал $Y = y \pm U = y \pm k \cdot u_c(y)$, соответствующий выбранному уровню доверия, такому как 95 или 99 процентов; равным образом, для заданного значения k хотелось бы иметь возможность четко указать уровень доверия, связанный с этим интервалом. Однако это нелегко осуществить на практике, поскольку это требует полного знания распределения вероятностей, характеризуемого результатом измерения y и его суммарной неопределенностью $u_c(y)$. Хотя эти параметры обладают большой значимостью, сами по себе они недостаточны для того, чтобы установить интервалы, имеющие точно известные уровни доверия».

Сопоставление результатов, приведенных в рассмотренном примере, и результатов, полученных методами интервального оценивания и проверкой непараметрических гипотез, только подтверждает предупреждение «Руководства по выражению неопределенности измерения» в Приложении Е о том, что оно использует реалистические, т.е. небезопасные оценки точности.

Список литературы

1. *ГОСТ Р 54500.3–2011/Руководство ИСО / МЭК 98-3:2008 Неопределенность измерения. Часть 3: Руководство по выражению неопределенности измерения.*
2. *ГОСТ 8.736–2011. ГСИ. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения.*
3. *Р 50.1.037–2002. ГСИ. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии.*
4. *Р 50.2.004–2000. ГСИ. Определение характеристик математических моделей зависимостей между физическими величинами при решении измерительных задач. Основные положения.*
5. *МИ 2916–2005. ГСИ. Идентификация распределений вероятностей при решении измерительных задач.*
6. *Гогин С.С. Программа «ММИ–поверка» / С.С. Гогин // Измерительная техника. – 2006. – № 7. – С. 20–21.*
7. *Левин С.Ф. Автоматизация обработки данных многократных измерений по программе «ММИ–поверка 2.0» / С.Ф. Левин, И.А. Сулейман // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2011. – Вип. 1 (91). – С. 38–41.*
8. *Левин С.Ф. Контурное оценивание усеченных распределений при решении измерительных задач / С.Ф. Левин, С.С. Левин // Измерительная техника. – 2008. – № 1. – С. 10–13.*
9. *Сулейман И.А. Методика решения измерительной задачи на основе усеченных функций распределений / И.А. Сулейман // Измерительная техника. – 2012. – № 1. – С. 28–30.*
10. *Бостанджиян В.А. Справочник по статистическим распределениям / В.А. Бостанджиян. – Черноголовка: ИХФ РАН, 2000. – 1008 с.*

Поступила в редколлегию 1.04.2015

Рецензент: д-р техн. наук. проф. Ю.П. Мачехин, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ВИМІРЮВАЛЬНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ МОДУЛЯ ПОВНОГО ІМПЕДАНСУ ЕЛЕМЕНТА ЛАНЦЮГА

С.Ф. Левін

Розглянуто приклад з Додатку Н.2 «Настанови з подання невизначеності вимірювання» з точки зору теорії вимірювальних завдань. Показано, що характеристики невизначеності результатів у прикладі істотно розходяться з ін.-тервальними оцінками математичної статистики.

***Ключові слова**: метод непрямого виміру, сумарна невизначеність, толерантний інтервал, похибка неадекватності моделей.*

MEASURING PROBLEM OF DEFINITION THE MODULE OF THE FULL IMPEDANCE FOR THE CHAIN ELEMENT

S.F. Levin

The example from Appendix H.2 «Guide to the Expression of the Uncertainty in Measurement» from the point of view of the measuring problems theory is considered. It is shown, that characteristics of uncertainty of results in an example essentially disperse from interval estimations of mathematical statistics.

***Keywords**: indirect measurement method, total uncertainty, tolerance interval, inadequacy error of model.*