УДК 519.232.2

В.Ю. Дубницкий, А.И. Ходырев

Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ (Киев)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ ТЯЖЕСТИ ХВОСТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ – УРОВНЯ ХВОСТА

Введена логарифмическая относительная мера тяжести хвоста распределений – уровень хвоста. Предложенная мера является функцией отношений величины хвостов сравниваемого и базисного (эталонного) распределений, выраженная в децибелах. Показано, что предложенная мера существенно зависит от видов сравниваемых распределений, уровня сравниваемых вероятностей и точности вычислений. ***Для однопараметрических распределений, определённых на положительной полуоси****, таких, как: показательное распределение, распределение Рэлея, упрощённое распределение Рэлея-Райса, распределение Максвелла, гиперэкспоненциальное распределение определён уровень хвоста по отношению к распределению Парето.* ***Для двухпараметрических распределений, определённых на положительной полуоси****, таких, как: бета-распределение второго рода, гамма-распределение, нормированное распределение Эрланга второго порядка, обобщённое распределение Эрланга второго порядка, распределение Вейбулла, гиперэкспоненциальное распределение второго порядка, распределение модуля двумерного случайного вектора, распределение Накагами, обратное распределение Гаусса, распределение специального вида определён уровень хвоста по отношению к логарифмически нормальному распределению.* ***Для двухпараметрических распределений, определённых на всей числовой оси,*** *таких, как: распределение Лапласа, распределение минимального значения, распределение максимального значения, двойное показательное распределение, логистическое распределение, распределение Чампернаума определён уровень хвоста по отношению к нормальному распределению.*

Ключевые слова: *хвост распределения, тяжесть хвоста, децибелы, уровень хвоста, показательное распределение, распределение Рэлея, упрощённое распределение Рэлея-Райса, распределение Максвелла, гиперэкспоненциальное распределение, распределение Парето, бета-распределение второго рода, гамма-распределение, нормированное распределение Эрланга второго порядка, обобщённое распределение Эрланга второго порядка, распределение Вейбулла, гиперэкспоненциальное распределение второго порядка, распределение модуля двумерного случайного вектора, распределение Накагами, обратное распределение Гаусса, распределение специального вида, логарифмически нормальное распределение, распределение Лапласа, распределение минимального значения, распределение максимального значения, двойное показательное распределение, логистическое распределение, распределение Чампернаума, нормальное распределение.*

Введение

В тексте данной работы термин «катастрофа» определяет не математическое понятие, а «событие с несчастными последствиями» [1]. Анализ последствий природных, техногенных катастроф и катастроф организационных систем, выполненный в работе [2], показал, что эти последствия наступают тогда, когда внешние воздействия на них превосходят расчётные. Формализуем этот вывод, принимая во внимание то обстоятельство, что в большинстве случаев воздействия на систему случайны.

Предположим, что воздействия на систему можно представить в виде случайной величины X, для которой известны функция распределения $F(X)$ и плотность распределения $f(x)$. В соответствии с принятой терминологией [3] величину:

$$Q(x) = \overline{F}(x) = 1 - F(x) \tag{1}$$

называют хвостом распределения. Отсюда следует, что для предотвращения катастрофы необходимо выбрать вид функции распределения воздействий, определить параметры этого распределения и задать квантиль, обеспечивающий приемлемый уровень риска. Численное значение этого квантиля определяет предельный безопасный уровень воздействия на систему.

Анализ литературы. Историю решения сформулированной условием (1) задачи можно рассматривать в теоретическом и прикладном аспектах. Теоретически оценка вероятности больших уклонений от среднего значения при исходном нормальном распределении случайной величины решалась применением правила «трёх сигм». При неизвестном распределении случайной величины решение задачи получали, используя неравенство Чебышева. Использование этих правил в некоторых случаях приводило к ошибочным или технически нереализуемым решениям. Развитие страхового дела, вызванное промышленным прогрессом в конце XIX века, показало, что вероятность аварий с тяжёлыми финансовыми последствиями и размеры этих последствий для страховых компаний больше тех, которые соответствовала правилу «трёх сигм». Задача вида (1) оказалась особо важной в мостостроении, гидротехническом строительстве, при проектировании конструкций, расчет которых выполняли по правилам строительной механики.

При проектировании мостов через водные преграды возникла задача определения расчётного уровня подъёма воды. Отсутствие удовлетворительных методов решения этой задачи отмечено в работе [4]. Библиографическое описание этой работы выполнено с сохранением орфографии оригинала. Анализ артиллерийских дуэлей в морских сражениях первой мировой войны, особенно Ютландского боя (1916 г.), показал, что принимаемая априори гипотеза нормального распределения погрешностей при выполнении расчётов по управлению огнём приводит к существенным ошибкам в принятии технических и организационных решений. В работе [5] отмечено, что: «При стрельбе из одного орудия в подавляющем большинстве мы будем иметь распределение точек падения снарядов по закону Гаусса или по закону, разница которого от закона Гаусса практически не улавливается». Более поздние работы показали, что отказ от учёта этого обстоятельства привел к низкому проценту попаданий по целям. Данные, приведенные в работе [6], позволили составить табл. 1.

Таблица 1

Эффективность артиллерийской стрельбы в Ютландском сражении (1916 г.)

Страна	Количество выстрелов	Процент попаданий, %
Британия	4480	2,75
Германия	3597	3,39

Средневзвешенный процент попаданий равен 3,03%, то есть на уровне эффективности стрельбы полевой артиллерии того же периода. И это с самыми современными, на то время, системами централизованного управления огнём.

Необходимость рационального проектирования конструкций привела к осознанию того факта, что свойства материала и внешние воздействия на него случайны. Это привело к появлению всем известного коэффициента запаса [7, 8]. Эти работы выполнены в предположении нормальности распределений свойств конструкции и воздействий на неё. Анализ аварий конструкций показал, что гипотеза нормальности выполнена далеко не всегда и для строгого обоснования вероятности появления величин, превосходящих расчётные, необходимо учитывать и иные, более сложные, виды распределений, что и было выполнено в работе [9]. При проектировании кораблей задача вида (1) известна как задача определения расчётного волнения. В русскоязычной литературе эта задача была сформулирована в работе [10]. Массовое строительство гидротехнических сооружений поставило задачу определения величины речного стока, которая сводилась к задаче вида (1), получившей название задачи о построении кривой обеспеченности. Статистический анализ данных наблюдений показал полнейшую непригодность концепции «трёх сигм» и необходимость использования более сложных методов для решения поставленной задачи [11]. При исследовании финансовых инструментов с сильной случайной составляющей также возникла задача определения вероятности появления убытков от наступления неблагоприятных результатов этих операций, превосходящих некоторую допустимую величину [12 – 14]. В 1962г. вышел английский оригинал работы [15], которая подвела итог первому этапу рассматриваемой проблемы. При исследовании вероятности появления значений случайной величины, превосходящих некоторые, допустимые для данной системы возникает две задачи. Первая – определение допустимого значения воздействия на изучаемую систему, вторая – определение вероятности его превышения. Решение первой задачи зависит от особенностей предметной области, для которой эта задача выполняется. Решение второй задачи во многом субъективно. Это видно из примера, приведенного в работе [16]. Исследования, проведенные в США, показали, что при обследовании 5500 парашютов в 14 были обнаружены ошибки укладки, которые могли помешать их раскрытию. Такое качество укладки было признано удовлетворительным. Таким образом, вероятность отказа парашюта, равная 0,0025, признана допустимой.

Для возможности сравнения различных видов распределений при оценке вероятности превышения равных величин в работе [17] использован следующий методический приём. Для распределения Пуассона, нормального распределения, распределения Вейбулла, распределения Эрланга, распределения Рэлея, экспоненциального распределения определяли вероятность получения случайной величины, не менее чем вдвое превышающей среднее значение. Результаты, полученные при этом, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Вероятности превышения случайной величиной своего удвоенного среднего значения

Результат расчёта	Вид распределения					
	экспоненциальное	нормальное	Рэлея	Вейбулла	Эрланга	Пуассона
Вероятность превышения	0,135	0,001	0,04	0,03	0,04	0,04
Зависимость от параметров распределения	отсутствует	имеет место	отсутствует	имеет место	имеет место	имеет место

Из табл. 2 следует, что вероятность превышения удвоенного среднего значения зависит от вида распределения и его параметров. Для некоторых распределений она достаточно велика и знаменитый «двойной запас прочности » не во всех случаях достаточен.

Проиллюстрируем сказанное таким численным экспериментом. Используя средства системы Statgraphics XV.1 получим 100 чисел, распределённых по закону Вейбулла, имеющего плотность вида:

$$f(x) = \frac{v}{u}\left(x/u\right)^{v-1} \exp\left[-\left(x/u\right)^{v}\right], \quad x \geq 0. \qquad (2)$$

Параметры закона, заданные до начала моделирования, следующие: параметр формы $v = 2,0$ и параметр масштаба $u = 1$. Для полученного массива данных определяли параметры этого закона в предположении справедливости заданного распределения, а также среднее значение и среднеквадратическое отклонение, то есть параметры нормального распределения. Результаты этих действий приведены в табл. 3. Следует отметить, что отклонения в 3% от заранее заданного для параметра формы и 9% для параметра масштаба возникли вследствие ограниченного объёма исходной выборки, что, в прочем, не повлияло на качественный анализ результатов эксперимента. На рис. 1 показаны графики плотностей этих законов, построенных для одного и того массива данных. Из этого графика видно, что для больших значений случайной величины вероятность их появлений при законе распределении Вейбулла выше, чем та же вероятность, исчисленная в предположении нормального распределения.

Таблица 3

Статистические характеристики полученного массива псевдослучайных чисел, распределённых по закону Вейбулла

Вид предполагаемого закона распределения			
Нормальное распределение		Распределение Вейбулла	
среднее значение, $\bar{x}$	0,8077	параметр формы, v	2,0660
среднеквадратическое отклонение, s	0,4130	параметр масштаба, u	0,9121

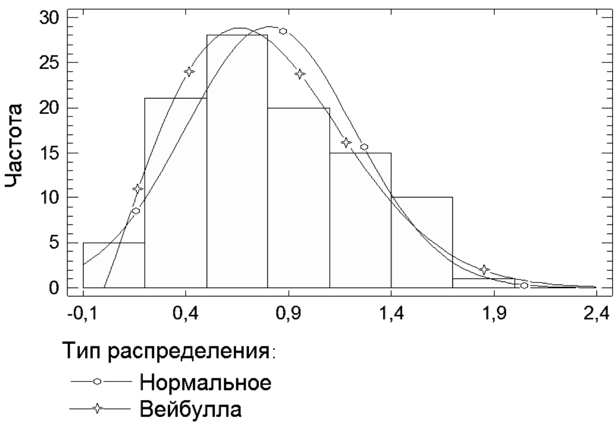


Рис. 1. Графики плотностей законов нормального распределения и распределения Вейбулла для одного и того же массива данных

Детальное изучение этого явления привело к понятию распределений с тяжелыми хвостами [3], то есть таких распределений, для которых при стремлении аргумента к $\pm\infty$, при его равных значениях вероятность превышает гауссову.

Пример тяжелохвостного распределения – распределение Парето [17]. Функция этого распределения имеет вид:

$$F(x) = 1 - \left(x_0/x\right)^{\alpha}, \ x > 0. \qquad (3)$$

Плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \alpha/x_0 \cdot \left(x_0/x\right)^{\alpha+1}, \quad x > 0. \qquad (4)$$

Для дальнейшего рассмотрения важными являются моменты этого распределения.

Первый начальный момент, математическое ожидание:

$$m_x = \left(\alpha/_{\alpha-1}\right) \cdot x_0, \quad \alpha > 1\,. \qquad (5)$$

Второй центральный момент, дисперсия:

$$D_x = \alpha \Big/ \left(\alpha-1\right)^2 \left(\alpha-2\right) \cdot x_0^2, \quad \alpha > 2. \qquad (6)$$

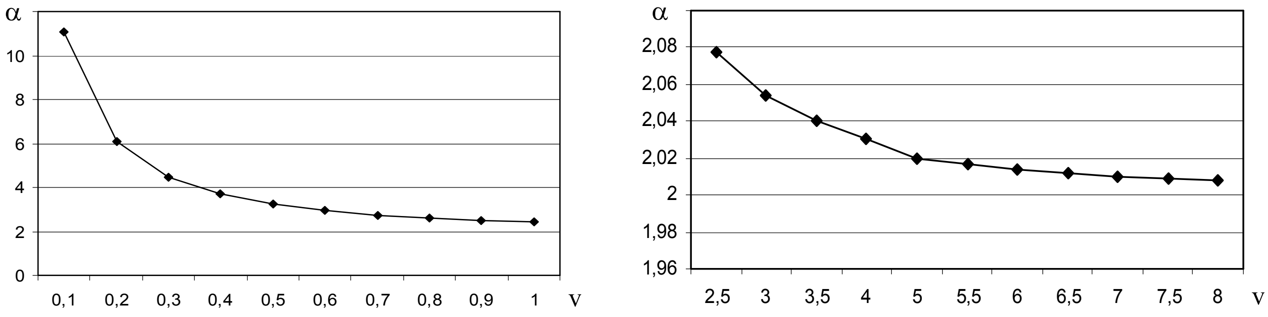
Из условий (5) и (6) следует, что при приближении значения параметра α критическим значениям возрастает вероятность получения неограниченно больших значений аргумента функции (5).

Приведём пример возникновения этого явления. Для рассмотрения результата в безразмерном виде получим из условий (5) и (6) выражение для коэффициента однородности:

$$v_x = m_x \big/ \sqrt{D_x} = m_x / s_x = 1 \big/ \sqrt{\alpha\left(\alpha-2\right)}, \quad \alpha > 2. \quad (7)$$

Исходя из этого условия, были построены графики функций вида $\alpha = f(v)$. В первом случае (рис. 2, а) величина коэффициента однородности $v_x \leq 1$, то есть данные имели вполне приемлемое рассеивание, характерное для многих предметных областей. Во втором случае (рис. 2, б) резкое повышение неоднородности и возможность получения очень больших случайных величин происходит при приближении параметра α к критическому значению.

Это явление характерно для биржевых крахов, что стимулировало применение свойств тяжёлохвостных распределений при моделировании финансовых рисков [19]. Методы, существующие в данное время, насколько известно авторам настоящего сообщения, позволяют оценивать свойство тяжелохвостности только для данных, полученным по результатам выборочных наблюдений [3, 20, 21, 22].



а – $v \in [0,1;1]$ б – $v \in [2,5;8]$

Рис. 2. График функции $\alpha = f(v)$ при различных коэффициентах неоднородности

Для сравнения полученных результатов оценок вероятности, особенно при сравнении чисел вида $a = k \cdot 10^{\pm m}$, где m >3, в работе [23] предложено использовать логарифмическую меру вида:

$$\rho = \lg(1/Q) = -\lg(1-P), \quad (8)$$

при том, что:

$$P = P(X < x),\ Q = 1 - P. \quad (9)$$

В этой работе отмечено, что при значениях P близких к единице, величина меры ρ и соответствующего квантиля нормального распределения совпадают. Результаты проверки этого утверждения приведены в табл. 4.

Таблица 4

Относительная ошибка абсолютного и логарифмического значений вероятности в предположении нормального закона распределения

Вероятность P	Вероятность Q	мера ρ	квантиль нормального распределения	относительная ошибка Δ	Вероятность P	Вероятность Q	мера ρ	квантиль нормального распределения	относительная ошибка Δ
0,6	0,4	0,3979	0,2533	0,571	0,96	0,04	1,3979	1,7506	0,201
0,7	0,3	0,5229	0,5244	0,003	0,99	0,01	2,0000	2,3263	0,140
0,8	0,2	0,699	0,8416	0,169	0,999	0,001	3,0000	3,0902	0,029
0,9	0,1	1	1,2816	0,220	0,9999	1E-04	4,0000	3,7190	0,076
0,9	0,1	1,1549	1,4758	0,217	0,99999	1E-05	5,0000	4,2648	0,172

Из приведенных результатов видно, что малая относительная ошибка возникает только при больших значениях вероятности, то есть при P> 0,99.

Постановка задачи. Анализ литературы позволил сделать следующие заключения: 1) оценки тяжести хвостов известны для распределений, полученных по выборке; 2) Отсутствуют относительные методы сравнения тяжести хвостов. Это дало возможность сформулировать задачу исследования как разработку методики относительного сравнения тяжести хвостов распределений, начальные характеристики которых известны.

Полученные результаты

Предположим, без ограничения общности, что для случайной переменной X определены двупараметрические функции распределения $F_1(x;\theta_{11},\theta_{12})$ и $F_2(x;\theta_{21},\theta_{22})$, для которых известны математическое ожидание m_1, m_2 и среднеквадратические отклонения σ_1, σ_2. Примем, что $m_1 = m_2 = m^*$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma^*$.

Используя результаты работ [24, 25] получим зависимости вида:

$$\begin{aligned} &\hat{\theta}_{11} = \phi_1\left(m^*, s^*\right), \quad \hat{\theta}_{21} = \phi_2\left(m^*, s^*\right); \\ &\hat{\theta}_{12} = \varphi_1\left(m^*, s^*\right), \quad \hat{\theta}_{22} = \varphi_2\left(m^*, s^*\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда, при $x = x^*$ хвосты этих распределений, определённые выражением вида (1), примут вид:

$$\overline{F_1}\left(x^*\right) = 1 - F_1(x^*; \hat{\theta}_{11}, \hat{\theta}_{12}); \quad (11)$$

и

$$\overline{F_1}\left(x^*\right) = \int_{x^*}^{\infty} \frac{\partial F_1(x; \hat{\theta}_{11}, \hat{\theta}_{12})}{\partial x} dx. \quad (12)$$

Предложенные в условиях (1), (8) и (9) способы измерения хвостов распределений обладают малой наглядностью, поэтому для лучшего восприятия авторы предлагают определять тяжесть хвоста в сравнении с некоторым другим распределением, выбранным в качестве базисного. Для этого, учитывая выражения (8) и (9), можно применить такую относительную меру сравнения, как децибелы $[dB]$. Следуя определениям, приведенным в работах [26, 27] тяжесть хвоста распределения $\overline{F_1}(x)$ по отношению к распределению $\overline{F_2}(x)$ определим так:

$$D = 10\lg\left(\overline{F}_1(x)/\overline{F}_0(x)\right)\ [dB]. \quad (13)$$

Для ответа на вопрос: «во сколько раз хвост $\overline{F_1}(x)$ тяжелее хвоста $\overline{F_2}(x)$?» следует вычислить величину

$$On = \left(\overline{F_1}(x) \big/ \overline{F_2}(x)\right) \cdot 10^{(dB/10)} . \qquad (14)$$

В работе [27] рекомендуется говорить, называя численное значение выражения (14), об уровне величины On.

Поэтому оценку тяжести хвоста вида (14) будем называть уровнем хвоста. В табл. 5 приведены распределения, хвосты которых проанализированы в данной работе. Эти распределения сгруппированы по областям определения и количеству параметров, их определяющих.

Таблица 5

Классификация распределений по областям определения и количеству параметров

Количество параметров	Область определения	
	Вся числовая ось, $-\infty < x < \infty$	Положительная полуось, $x > 0$
одно-параметрические		Показательное распределение
		Распределение Рэлея
		Упрощённое распределение Рэлея-Райса
		Распределение Максвелла
		Распределение Парето
		Гиперэкспоненциальное распределение
двух-параметрические	Нормальное распределение	Бета-распределение второго рода
	распределение Лапласа	Гамма-распределение
	Распределение минимального значения	Нормированное распределение Эрланга n-го порядка*
	Распределение максимального значения	Обобщённое распределение Эрланга второго порядка
	Двойное показательное распределение	Распределение Вейбулла
	Логистическое распределение	Гиперэкспоненциальное распределение второго порядка
	Распределение Чампернауна	Распределение модуля n-мерного случайного вектора*
	Распределение Мойяла	Распределение Накагами
		Логарифмически нормальное распределение
		Обратное распределениеиеГаусса
		Распределение специального вида [30]

∗) Для дальнейших расчётов принято n =2.

Необходимые сведения о большинстве из приведенных в этой таблице распределениях даны в работах [24, 25]. Сведения о распределениях, не рассмотренных в них, приведены в данной работе.

Общий вид распределения Рэлея-Райса, приведенный в работе [18], таков:

$$f(x) = \frac{x}{a^2} \exp\left(-\left(\frac{x^2+h^2}{2a^2}\right)\right) I_0\left(\frac{xh}{a^2}\right), \quad x \ge 0, \qquad (15)$$

где a – положительный параметр масштаба, h – положительный параметр формы, $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка аргумента x. В данной работе рассмотрено упрощённое распределения Рэлея-Райса, приведенное в работе [28]. Плотность этого распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \theta^2 x \exp\left(-(\theta x)^2 \big/ 2\right), x > 0; \\ 0, x < 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Параметр θ определяют из условия:

$$\theta = \sqrt{2\pi} \big/ m_x . \qquad (17)$$

Функция распределения Чампернауна, приведенная в работе [18], имеет вид:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \mathrm{arctg}(\exp(\alpha(x-\mu)), \qquad (18)$$

при условии, что:

$$\mu = m_x, \qquad s = \pi/(2\alpha) . \qquad (19)$$

Общий вид функции распределения бета-распределения второго рода, приведенный в работе [18], таков:

$$F(x) = I_{x/(1+x)}(u,v), \; x > 0, u.0, v > 0. \qquad (20)$$

Правая часть выражения (20) – отношение неполной бета -функции.

Плотность бета-распределения второго рода, приведенная в работе [18], такова:

$$f(x) = \frac{1}{B(u,v)} \cdot \frac{x^{u-1}}{(1+x)^{u+v}} = \frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\Gamma(v)} \cdot \frac{x^{u-1}}{(1+x)^{u+v}} ,$$
$$x > 0, u > 0, v > 0. \qquad (21)$$

При вычислении значений вероятности выбор конкретного выражения (20) или (21) зависит от наличия таблиц и программ, находящихся в распоряжении пользователя.

Зависимость между начальными характеристиками и параметрами этого распределения приведена в работе [18]:

математическое ожидание:

$$m_x = u/(v-1), v > 1, \qquad (22)$$

дисперсия

$$D_x = u(u+v-1) \Big/ \left((v-1)^2 (v-2)\right), v > 2. \qquad (23)$$

Для решения обратной задачи использовали методику, подробно описанную в работе [25].

Примем, что:

$$F(u,v) = m - u/(v-1) = F ; \qquad (24)$$

$$G(u,v)=D-\frac{u(u+v-1)}{(v-1)^2(v-2)}=G. \qquad (25)$$

Якобиан для системы уравнений, определённых условиями (24), (25) примет вид:

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}E & Q\\ P & L\end{vmatrix}=\frac{u(u+v-2)}{(1-v)^3(v-2)^{\ 2}}; \qquad (26)$$

где
$$E=\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{1}{1-v}; \qquad (27)$$

$$Q=\frac{\partial F}{\partial v}=\frac{u}{(v-1)^2}; \qquad (28)$$

$$P=\frac{\partial G}{\partial u}=\frac{2u+v-}{(2-v)(v-1)}; \qquad (29)$$

$$L=\frac{\partial G}{\partial v}=\frac{u\left[u(3v-5)+2v^2-5v+3\right]}{(v-2)^2(v-1)^3}. \qquad (30)$$

Тогда

$$\Pi=\begin{vmatrix}F & Q\\ G & L\end{vmatrix}\Big/\frac{u(u+v-2)}{(1-v)^3(v-2)^2}=$$
$$=\frac{(m+vD-2D+1)(v-1)(v-2)}{u+v-1}+\left(\frac{u(2v-3)}{v-1}\right)+ \qquad (31)$$
$$+m(5-3v)-v+2;$$

$$T=\begin{vmatrix}E & F\\ P & G\end{vmatrix}\Big/\frac{u(u+v-2)}{(1-v)^3(v-2)^2}=$$
$$=\frac{(2-v)\left[m(v-1)(2u+v-1)-u^2-D(v-2)(v-1)^2\right]}{u(u+v-1)}. \qquad (32)$$

Равенства (26)…(32) позволяют записать условия, используемые для организации вычислительного процесса, предназначенного для определения параметров u и v, входящих в условия (20) и(21):

$$\begin{cases}u_{n+1}= & u_n-\Pi_n;\\ v_{n+1}= & v-T_n.\end{cases} \qquad (33)$$

Начальные значения определим из условий, приведенных в [18]:

$$v_0=m_x(m_x+1)/D_x+2\ ,\ u_0=m_x(v-1). \qquad (34)$$

Обобщённое распределение Эрланга второго порядка, описанное в работе [18].

Плотность этого распределения имеет вид:

$$f(x)=\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\left(e^{-\mu x}-e^{-\lambda x}\right), x>0, \quad \lambda>0, \mu>0; \qquad (35)$$

функция распределения имеет вид:

$$F(x)=1-\left(\lambda e^{-\mu x}-\mu e^{-\lambda x}\right)\Big/(\lambda-\mu). \qquad (36)$$

Математическое ожидание m и дисперсия D обобщённого распределения Эрланга 2-го порядка связаны с параметрами распределения системой вида:

$$\begin{cases}m_x=(\lambda+\mu)/(\lambda\mu);\\ D_x=\left(\lambda^2+\mu^2\right)\Big/(\lambda\mu)^2.\end{cases} \qquad (37)$$

Разрешая систему (37) получим, что:

$$\lambda=\left(1\pm\sqrt{2v_x^2-1}\right)\Big/\left(m_x\left(v_x^2\pm\sqrt{2v_x^2-1}\right)\right); \qquad (38)$$

$$\mu=\left(1\pm\sqrt{2v_x^2-1}\right)\Big/\left(m\left(1-v_x^2\right)\right). \qquad (39)$$

Для выполнения ограничений, наложенных неравенствами в (35) в выражениях (38), (39) следует брать знак «+».

Гиперэкспоненциальное распределение в работе [18] приведено в таком виде:

плотность распределения:

$$f(x)=2p^2\lambda e^{-2px\lambda}+2(1-p)^2\lambda e^{-2(1-p)\lambda x},$$
$$x\geq 0,\quad 0<p<0,5. \qquad (40)$$

математическое ожидание, дисперсия и коэффициент вариации соответственно:

$$m_x=\frac{1}{\lambda},\ \ D_x=\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{1}{2p(1-p)}-1\right],$$
$$v_x=\sqrt{1+\frac{(1-2p)^2}{2p(1-p)}}. \qquad (41)$$

Из условия (41) следует, что величина $v_x>1$. Следовательно:

$$p=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{\left(v_x^2-1\right)\Big/\left(v_x^2+1\right)}\right). \qquad (42)$$

Для выполнения ограничения, наложенного на коэффициент однородности в условии (42) следует брать знак «–».

Функция обратного распределения Вальда, приведенная в работе [18], имеет вид:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi_0\left[\left(\frac{x}{\mu}-1\right)\sqrt{\frac{c\mu}{x}}\right]+$$
$$+\left[\frac{1}{2}-\Phi_0\left[\left(\frac{x}{\mu}+1\right)\sqrt{\frac{c\mu}{x}}\right]\right]e^{2cx}, \qquad (43)$$

математическое ожидание и дисперсия:

$$m_x=\mu,\qquad D_x=m^2/c. \qquad (44)$$

В условии (43) функция $\Phi_0(\cdot)$ – функция Лапласа. Для вычисления значений этого распределения функцию $F(x,\mu,c)$ следует представить в виде распределения Вальда, функция распределения которого имеет вид $F(x/\mu,1,c)$. Значения этой функции табулированы в работе [29].

В работе [30] рекомендуется для моделирования рисков финансовых операций использовать распределение вида

$$f(x)=\frac{x(x+a)\exp(-x/b)}{b^2(a+2b)},\ \ x\geq 0. \qquad (44)$$

В работе [30] выражения для математического ожидания и дисперсии отсутствуют, поэтому рассмотрим их получение.

$$m_x = \int_0^\infty \frac{x^2(x+a)\exp(-x/b)}{b^2(a+2b)}dx = 2b^2(a+3b) . (45)$$

Второй центральный момент

$$\mu_2 = \int_0^\infty \frac{x^3(x+a)\exp(-x/b)}{b^2(a+2b)}dx = \frac{6b^2(a+4b)}{a+2b}; (45)$$

дисперсию D_x определим из условия:

$$D_x = \mu_2 - (m_x)^2 = 2b^2\left(6b^2+6ab+a^2\right)\Big/(a+2b)^2 . (46)$$

Следуя рекомендациям работы [30] и приняв, что:

$$\rho = 3m + \sqrt{3\left(m_x^2 - 2D_x\right)} , \qquad (47)$$

получим связь между начальными характеристиками распределения вида (44) и его параметрами:

$$a = \left(\rho^2/6 - m_x\rho/3\right)\Big/(m-\rho); \qquad b = \rho/6. \qquad (48)$$

Далее приведём результаты численного моделирования предложенной методики. В соответствии с результатами работ [17, 31] для всех функций распределений, приведенных в табл. 5, вычислялись величины, указанные в условиях (1), (13), (14) при постоянном значении аргумента $x = 2m_x$. В тех случаях, когда для расчёта параметров требовался коэффициент вариации, его определяли из условия:

$$v_x = m_x / s_x = 0,4 . \qquad (49)$$

Следовательно, в дальнейшем принимали, что во всех случаях $m_x = 100, s_x = 40$, $x = 200$.

Уровень хвоста по отношению к распределению Парето для однопараметрических распределений, определённых на положительной полуоси, приведен в табл. 6. Уровень хвоста по отношению к нормальному распределению для двухпараметрических распределений, определённых на всей числовой оси, приведен в табл. 7. Уровень хвоста по отношению к логарифмически нормальному распределению для двухпараметрических распределений, определённых на положительной полуоси, приведен в табл. 8.

Уровень хвоста гиперэкспоненциального распределения по отношению к распределению Парето в зависимости от коэффициента вариации v_x показан на рис. 3. Показанная на рис. 3 зависимость хорошо аппроксимируется выражением вида:

$$On = \sqrt{-0.0179 + 0.1312v^{-1}} . \qquad (50)$$

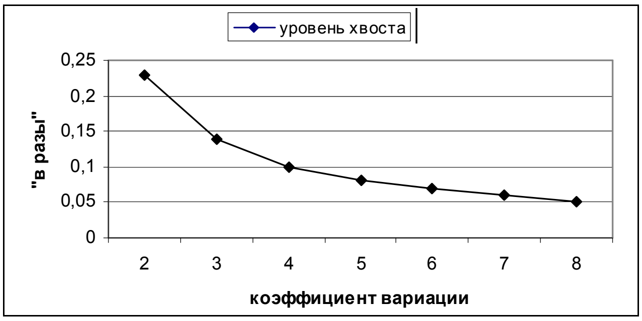


Рис. 3. Зависимость уровня хвоста гиперэкспоненциального распределения по отношению к распределению Парето

Аналогичные зависимости могут быть получены и для других видов распределений, что существенно облегчит задачи моделирования рисков в различных областях знаний.

Полученные в табл. 6 – 8 результаты дают возможность сравнивать относительную тяжесть хвостов основных типов распределений.

Таблица 6

Уровень хвоста по отношению к распределению Парето для однопараметрических распределений, определённых на положительной полуоси

Вид распределения	Величина		Децибелы, dB	«В разы», уровень хвоста
	$F(x)$	$\bar{F}(x)$		
Показательное распределение	0,8646	0,1354	3,2476	2,1123
Распределение Рэлея	0,9568	0,0432	-1,7137	0,6739
Упрощённое распределение Рэлея-Райса	0,9999	$1\cdot10^{-4}$	-28,0686	0,00156
Распределение Максвелла	0,9829	0,0171	-5,73862	0,2668
Обобщённое распределение Эрланга 2-го порядка	0,9858	0,0142	-6,5457	0,2215
Распределение Парето	0,9359	0,0641	0	1

Таблица 7

Уровень хвоста по отношению к нормальному распределению для двухпараметрических распределений, определённых на всей числовой оси

Вид распределения	Величина		Децибелы, dB	«В разы», уровень хвоста
	$F(x)$	$\bar{F}(x)$		
Лапласа	0,9708	0,0291	6,71501	4,6900
Распределение минимального значения	0,9999	$4\cdot10^{-4}$	-21,9033	0,0064
Распределение максимального значения	0,9775	0,02245	5,588247	3,6200
Двойное показательное распределение	0,9990	0,0001	-17,9239	0,0161
Логистическое	0,9893	0,0106	2,329142	1,7100
Чампернаума	0,9874	0,0125	3,045183	2,0200
Распределение Мойяла	0,973	0,0263	6,275641	4,2400
Нормальное распределение	0,9938	0,0062	0	1

Таблица 8

Уровень хвоста по отношению к логарифмически нормальному распределению
для двухпараметрических распределений, определённых на положительной полуоси

Вид распределения	Величина		Децибелы, dB	«В разы», уровень хвоста
	F(x)	$\overline{F}(x)$		
Гамма-распределение	0,9814	0,0186	-1,7951	0,6614
Нормированное распределение Эрланга 2-го порядка	0,9813	0,0187	-1,7748	0,6645
Распределение Вейбулла	0,9909	0,0091	-4,9030	0,3234
Обратное распределениеГаусса	0,9750	0,0250	-0,5109	0,8890
Распределение специального вида [30]	0,9043	0,0957	5,3214	3,4052
Распределение Накагами	0,9843	0,0157	-2,5324	0,5582
Бета-распределение второго рода	0,9559	0,0441	1,9528	1,5678
Распределение модуля двухмерного случайного вектора	0,4915	0,5085	12,5746	18,0907
Обобщённое распределение Эрланга 2-го порядка	0,9858	0,0142	-2,9789	0,5036
Логарифмически нормальное распределение	0,9719	0,0281	0,0000	1

Историко-библиографическое дополнение

Авторы данного сообщения, изучая историю возникновения задачи оценки хвостов распределений, обратили внимание на судьбы авторов работ [10] и [15], родившихся почти в один год в последнее десятилетие века XIX, прошедшего, по словам А. Городницкого: «Без войны без мировой / без вселенских сует» и ушедших из жизни в середине века XX. Их биографии полностью подтвердили мысль, высказанную в работе [32], о том, что человек должен быть причастен к деяниям и страстям своей эпохи, иначе могут счесть, что он никогда не жил. Краткое жизнеописание автора работы [10], Ю.А. Круткова, предварим отрывком из книги его собрата по несчастью, известного авиационного инженера Л.Л. Кербера [33]: "Юрий Александрович Крутков, наш Вольтер, с язвительной физиономией, полной сарказма, оживший бюст Гудона. Всесторонне образованный эрудит и энциклопедист, он очаровывал всех тонкостью своих суждений. В ЦКБ-29 академик Крутков был доставлен из Канских лагерей, где работал уборщиком в бараке уголовников. "Неплохая работа, знаете ли, главное, поражала тонкость оценки твоего труда – иногда побьют, иногда оставят покурить. Должен заметить, студенты моего университета были менее притязательны и ни разу меня не били, курить давали безропотно и даже не окурки". Он же рассказывал, как получил вместе с уборщиком соседнего барака задание напилить дров. Два пожилых человека, закутанные в лохмотья, грязные, обросшие седой щетиной, медленно тянут пилу. Между ними состоялся такой диалог: "Ты откуда?" – "Из Ленинграда. А ты?" – "Оттуда же". – "Где работал?" – "В Академии наук. А ты где?" – "Там же". – "Ну уж брось, я там почти всех знал. Как твоя фамилия?" – "Крутков. – "Юрий Александрович? Бог мой, я Румер, помните лестницу, ломоносовскую мозаику, ради Бога, не обессудьте, не узнал". – "Полно, полно, Юрий Борисович, кто здесь узнает. Но не обессудьте, пошел барак топить, а то, сами знаете, побьют, да и только".

Второй участник этого диалога – Ю.Б. Румер, получивший решением ВАК в 1935 г. диплом №1 доктора физико-математических наук honoris causa в 1935 г.[33] и обвинённый 1938 г. в пособничестве врагу народа Л.Д. Ландау. В цитированном отрывке есть неточность, отмеченная в работе [35]. Член-корреспондент АН СССР Ю.А. Крутков (1890-1952) – первый в России профессиональный физик-теоретик. Начал свою научную деятельность в студенческие годы в семинаре П.С. Эренфеста. Один из первых пропагандистов квантовой механики в России. С 1920 г. принимает активное участие в работе Атомной комиссии Российской академии наук. Одно из организационных решений комиссии было таким: «Обеспечить Ю.А. Круткова керосином и дровами, чтобы дать ему возможность продуктивнее работать дома». В этой комиссии происходит его знакомство с А.Н. Крыловым, бывшим генералом флота (1916г.), будущим лауреатом Сталинской премии (1941 г.). А.Н. Крылов предложил использовать полученные Ю.А. Крутковым результаты по математическим моделям броуновского движения для решения задачи определения расчётного волнения. Практика боевого применения в Северной Атлантике, при проводке Атлантических конвоев, советских эскадренных миноносцев проектов 7 и 7у показала правильность выбранной модели. В 1936 году (30 декабря) Ю.А. Крутков был арестован, пробыл в заключении до 1947 г. Академик А.Н. Крылов добился перевода Ю.А. Круткова из лагеря в специальное авиационное конструкторское бюро, находившееся под контролем НКВД. Умер Ю.А. Крутков в 1952 г., спустя две недели после известия о присвоении ему Сталинской премии за работы по созданию атомного оружия. Реабилитирован посмертно в 1957 г.

Не менее драматична судьба автора работы [15] Эмиля Гумбеля. Родился в Германии в 1891 г. в весьма состоятельной семье. 28 июля 1914 г. защищает дипломную работу на тему: «Об интерполяции состояния населения». В первые дни начавшейся войны, которую позже назовут Мировой, а после Второй

– Первой (не приведи, Господи, продолжить этот ряд) уходит добровольцем на фронт. Опять же, как сказал Н.А. Некрасов: «Это многих славный путь». С 1915 года работает на фирме «Телефункен» и преподает в университете. Принимает активное участие в международном пацифистском социал-демократическом движении. Обращает на себя внимание широко известными в то время работами антинацистской направленности [36, 37], которые и до сегодняшнего дня являются ценными источником информации по истории Веймарской республики. Авторы данного сообщения обращают внимание на название издательства, выпустившего работу [36]. Межрабпом – международная рабочая помощь. Эта организация осуществляла финансовую поддержку международного рабочего движения прокоммунистической направленности. В СССР имела свою киностудию, известную историкам кино как Межрабпом-Русь. Впоследствии на её базе была создана киностудия, превратившаяся сегодня в «Центральную киностудию детских и юношеских фильмов им. М. Горького».

Ещё до 1933 г. Э. Гумбель подвергался травле пронацистскими элементами. В 1933 г., практически сразу по приходу А. Гитлера к власти, было объявлено, что книги Гумбеля подлежат публичному сожжению, а сам он должен быть лишен немецкого гражданства. После долгих мытарств и опасных приключений Гумбель в 1940 г. перебрался в США, где и проработал до 1966 г.

Завершим этот грустный раздел словами из работы [38]: «Тут ни убавить / ни прибавить/ – так это было на земле».

Выводы

1. Введена логарифмическая относительная мера тяжести хвоста распределений – уровень хвоста. Предложенная мера является функцией отношений величины хвостов сравниваемого и базисного (эталонного) распределений, выраженная в децибелах.

2. Показано, что предложенная мера существенно зависит от видов сравниваемых распределений, уровня сравниваемых вероятностей и точности вычислений.

3. Полученные результаты могут быть использованы для обоснования коэффициента запаса при определении расчётной величины допустимых воздействий на системы критического применения.

Список литературы

1. Ожегов С.И. Словарь русского языка [Текст] / С.И. Ожегов. – М.: Советская энциклопедия, 1968. – 900 с.

2. Риски в природе, техносфере, обществе и экономике [Текст] / В.А. Акимов, В.В. Лесных, Н.Н. Радаев; МЧС России. – М: Деловой экспресс, 2004. –352 с.

3. Румянцев А.С. Распределения с тяжёлыми хвостами и их приложения: монография [Текст] / А.С. Румянцев, Е.В. Морозов. – Петрозаводск: Изд.-во ПетрГУ, 2013. – 68 с.

4. ИЗДАНІЕ УПРАВЛЕНИЯ ВНУТРЕННИХЪ ВОДНЫХ ПУТЕЙ и ШОССЕЙНЫХЪ ДОРОГЪ по Отдѣлу Водяных Сообщений. МАТЕРІАЛЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ РУССКИХЪ РѢКЪ и ИСТОРІИ ИХѢ СУДОХОДНЫХЪ УСЛОВІЙ. Выпускъ XL. Свѣдѣнія о мостахъ на водныхъ путяхъ Россійской Имперіи. - Подъ редакціей инженера путей сообщения Н.А. ВЕНДИКТОВА. С.-ПЕТЕРБУРГЪ, Типография Министерства путей Сообщенія (Товарищество И.Н. Кушнерева и К^0), Фонтанка, 117. 1913.

5. Унковский В.А. Теория стрельбы и её применение к стрельбе корабельной артиллерии [Текст] / В.А. Унковский, капитан 1-го ранга, доцент. – М.: Госуд. издательство Наркомата обороны Союза ССР,1939. – 370 с.

6. Больных А.Г. Величайшее морское сражение первой мировой войны / А.Г. Больных. – М.: ЭКСМО, 2010. – 220 с.

7. Хоциалов Н.Ф. Запасы прочности / [Текст] / Н.Ф. Хоциалов // Строительная промышленность. – 1929. – № 10. – С. 840-844.

8. Стрелецкий Н.С. Основа статистического учета коэффициента запаса, прочности сооружений [Текст] / Н.С. Стрелецкий. – М.: Стройиздат, 1947. – 92 с.

9. Переверзев Е.С. Надёжность и испытания технических систем [Текст] / Е.С. Переверзев. – К.: Наук. думка, 1990. – 328 с.

10. Крутков Ю.А. Замечания о боковой качке корабля на волнении [Текст] / Ю.А. Крутков // Доклады АН СССР. – 1934. – 2 (III), №3. – С. 158-162.

11. Крицкий С.Н. О соответствии теоретических кривых распределения вероятностей данным наблюдений по речному стоку [Текст] / С.Н. Крицкий, М.Ф. Менкель // Сб. «Проблемы регулирования речного стока», вып. 3. – М.: Изд. Ан СССР, 1948. – С. 83-102.

12. Курс экономики: учебник [Текст] / ред. Б.А. Райзберг. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 720 с.

13. Шоломицкий А.Г. Теория риска. Выбор при неопределённости и моделирование риска [Текст] / А.Г. Шоломицкий. – М.: Изд. «ГУ ВШЭ», 2005. – 121 с.

14. Нейштадт А.И. Уточнение теории спекуляции Л. Башелье [Текст] / А.И. Нейштадт, Т.В. Селезнёва, В.Н. Тутубалин, Е.Г. Угер // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2002. – Т.9, №3. – С. 525-543.

15. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений [Текст] / Э. Гумбель. – М.: МИР, 1965. – 452 с.

16. Агроник А.Г. Развитие авиационных средств спасения [Текст] / А.Г. Агроник, Л.И. Эгенбург. – М.: Машиностроение, 1990. – 256 с.

17. Дубницкий В.Ю. Оценка вероятности превышения случайной величиной своего удвоенного среднего значения [Текст] / В.Ю. Дубницкий, Н.С. Пилипенко // Обработка информации. – Х.: ХВУ, 1996. – С. 16-21.

18. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям / Р.Н. Вадзинский. – М.: НАУКА, 2001. – 295 с.

19. Щетинин Е.Ю. Статистические методы и математические модели оценивания финансовых рисков [Текст] / Е.Ю. Щетинин, А.С. Лапушкин // Математическое моделирование. – 2004. – Т. 16, №5. – С. 40-54.

20. Hill B.M. A simple general approach to inference about the tail of a distribution. [Текст] / B.M. Hill // The Annals of Statistics. – 1975. – V. 5, №3. – P. 1011-1029.

21. Шепель В.Н. Использование оценки Хилла для различения законов распределения вероятности. [Текст] / В.Н. Шепель, С.С. Акимова // Вестник Оренбургского гос. ун-та. – 2014. – № 1 (62), январь. – С. 75-78.

22. Журавлёв И. Как взвесить тяжелый хвост. [Текст] / И. Журавлёв // Риск-менеджмент. – 2007. – № 17-18, июль-август. – С. 200-205.

23. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надёжности в расчётах сооружений [Текст] / В.В. Болотин. – М.: Стройиздат, 1982. – 351 с.

24. Дубницкий В.Ю. Решение в явном виде обратной задачи моделирования [Текст] / В.Ю. Дубницкий, И.Г. Скорикова // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2015. – Вип. 1(126). – С. 106-110.

25. Дубницкий В.Ю. Решение в неявном виде обратной задачи моделирования непрерывной одномерной случайной величины [Текст] / В.Ю. Дубницкий, И.Г. Скорикова // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2015. – Вип. 3(128). – С. 47-52.

26. Зельдин Е.А. Децибелы [Текст] / Е.А. Зельдин. – М.: Энергия, 1977. – 64 с.

27. Сборник задач по метрологии [Текст] / В.И. Нефёдов, А.А. Балагур, Н.В. Мельчаков, Е.В. Федорова. – М.: МГУРТЭиА, 2010. – 124 с.

28. Королёв В.Ю. Математические основы теории риска [Текст] / В.Ю. Королёв, В.Е. Бенинга. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 591 с.

29. Крапивин В.Ф. Таблицы распределения Вальда [Текст] / В.Ф. Крапивин. – М.: Наука, 1965. – 184 с.

30. Рибальченко С.А. Огляд функцій розподілу ймовірностей для моделювання страхової діяльності [Електронний ресурс] / Ефективна економіка. – 2013. – №3. – Режим доступу: http://www.economy.nayka.com.ua/?n= 9&y=2014.

31. Максимов И.И. Моделирование риска и рисковых ситуаций [Текст] / В.И. Максимов, О.И. Никонов. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2004. – 82 с.

32. Уилсон М. Встреча на далеком меридиане / М. Уилсон. – М.: МИР, 1964. – 429 с.

33. Озеров Г. (Л.Л. Кербер) Туполевская шарага [Электронный ресурс]. – Режим доступа: // http://militera.lib.ru/memo/Russian/kerber_ll/index.html/ 27.04.2015.

34. Юрий Борисович Румер: Физика, XX век / авт.-сост. И.А. Крайнева [и др.]; отв. ред. А.Г. Марчук. – Ин-т информатики им. А.П. Ершова. – Н-ск: АРТА, 2013. – 592 с.

35. Френкель В.Я. Юрий Александрович Крутков [Текст] / В.Я. Френкель // Успехи физических наук. – 1970. – Т.102, №4. – С. 639-654.

36. Гумбель Э. Заговорщики. К истории германских националистических союзов [Текст] / Э. Гумбель. – Л.: Госиздат, 1925. – 208 с.

37. Гумбель Э. История 354 политических убийств [Текст] / Э. Гумбель. – М.: Межрабпом, 1924. – 108 с.

38. Твардовский А.Т. За далью-даль [Текст] / А.Т. Твардовский. Стихотворения и поэмы // Сост. М.И. Твардовской; подг. текста и прим. Л.Г. Чащиной и Э.М. Шнейдермана. – Л.: Сов. писатель, 1986. – 896 с. – (Библиотека поэта. Большая серия. Второе изд.)

Поступила в редколлегию 4.05.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.А. Кучук, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

ВИЗНАЧЕННЯ ВІДНОСНОЇ ОЦІНКИ ТЯЖКОСТІ ХВОСТА РОЗПОДІЛУ – РІВНЯ ХВОСТА

В.Ю. Дубницький, О.І. Ходирєв

Введено логарифмічну відносну міру тяжкості хвоста розподілів – рівень хвоста. Запропонована міра є функцією відношення величини хвостів порівнюваного і базисного (еталонного) розподілів, визначена в децибелах. Показано, що запропонована міра істотно залежить від видів порівнюваних розподілів, рівня порівнюваної ймовірності і точності обчислень. ***Для однопараметричних розподілів, визначених на додатній напівосі,*** *таких, як: показниковий розподіл, розподіл Релея, спрощений розподіл Релея-Райса, розподіл Максвелла, гіперекспоненційний розподіл визначено рівень хвоста по відношенню до розподілу Парето.* ***Для двохпараметричних розподілів, визначених на додатній напівосі,*** *таких, як: бета-розподіл другого роду, гамма-розподіл, нормований розподіл Ерланга другого порядку, узагальнений розподіл Ерланга другого порядку, розподіл Вейбула, гіперекспоненційний розподіл другого порядку, розподіл модуля двовимірного випадкового вектора, розподіл Накагамі, зворотний розподіл Гаусса, розподіл спеціального вигляду визначено рівень хвоста по відношенню до логарифмічно нормального розподілу.* ***Для двохпараметричних розподілів, визначених на всій числовій осі,*** *таких, як: розподіл Лапласа, розподіл мінімального значення, розподіл максимального значення, визначено рівень хвоста по відношенню до нормального розподілу.*

Ключові слова: *хвіст розподілу, тяжкість хвоста, децибели, рівень хвоста, показниковий розподіл, розподіл Релея, спрощений розподіл Релея-Райса, розподіл Максвелла, гіперекспоненційний розподіл, розподіл Парето, бета-розподіл другого роду, гамма-розподіл, нормований розподіл Ерланга другого порядку, узагальнений розподіл Ерланга другого порядку, розподіл Вейбулла, гіперекспоненційний розподіл другого порядку, розподіл модуля двовимірного випадкового вектора, розподіл Накагамі, зворотний розподіл Гаусса, розподіл спеціального вигляду, логарифмічно нормальний розподіл, розподіл Лапласа, розподіл мінімального значення, розподіл максимального значення, подвійний показниковий розподіл, логістичний розподіл, розподіл Чампернаума, нормальний розподіл.*

DETERMINATION OF RELATIVE ESTIMATE OF THE WEIGHT OF DISTRIBUTION TAIL AREA -TAIL LEVEL

V.Yu. Dubnitskiy, A.I. Khodyrev

A logarithmic relative measure was introduced for the weight of distribution tail area – tail level. The proposed measure is a function of relation between tail area values of compared and basic (reference) distributions expressed in decibels. It was shown that the proposed measure substantially depends on types of compared distributions, level of compared probability and calculation accuracy. ***For one-parameter distributions*** *such as exponential distribution, Rayleigh distribution, simplified Rayleigh-Rice distribution, Maxwell distribution, hyperexponential distribution, tail level was determined relative to Pareto distribution.* ***For two-parameter distributions*** *determined on an added semiaxis, such as second type beta distribution, gamma distribution, normalized second order Erlang distribution, Weibull distribution, second order hyperexponential distribution, two-dimensional random vector modulus distribution, Nakagami distribution, inverse Gaussian distribution, special form distribution, tail level was determined relative to logarithmic normal distribution.* ***For two-parameter distributions*** *determined on numerical axis, such as Laplace distribution, minimum value distribution, maximum value distribution, tail level was determined relative to normal distribution.*

Keywords: *distribution tail area, decibels, tail level, exponential distribution, Rayleigh distribution, simplified Rayleigh-Rice distribution, Maxwell distribution, hyperexponential distribution, Pareto distribution, second type beta distribution, gamma distribution, normalized second order Erlang distribution, Weibull distribution, second order hyperexponential distribution, two-dimensional random vector modulus distribution, Nakagami distribution, inverse Gaussian distribution, special form distribution, logarithmic normal distribution, Laplace distribution, minimum value distribution, maximum value distribution, double exponential distribution, logistic distribution, Champernaum distribution, normal distribution.*