

УДК 525.7

Ю.А. Олійник

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

## ВПЛИВ ШВИДКОСТІ ВІТРУ НА ЗМІНЕННЯ КОЕФІЦІЄНТУ ЛОБОВОГО ОПОРУ

У статті визначені числові характеристики коефіцієнту лобового опору з обліком постійної швидкості літального апарату та випадкової швидкості вітру. Розроблена математична модель нелінійної залежності коефіцієнту лобового опору від величин постійної швидкості літального апарата і випадкової швидкості вітру. Коефіцієнт лобового опору літального апарата представлений у виді функції, що залежить від куба швидкості літального апарату. Отримано функцію, що характеризує зміну коефіцієнта лобового опору при відсутності та при наявності швидкості вітру.

**Ключові слова:** коефіцієнт лобового опору, літальний апарат, випадкова величина, випадкова функція, числові характеристики.

### Вступ

Сила лобового опору літального апарата залежить від коефіцієнта лобового опору [1]. Сам коефіцієнт лобового опору залежить від швидкості літального апарата, причому ця залежність нелінійна [1]. Але атмосфера Землі, де рухається літальний апарат, не статична і вітер, що характеризує рух повітряних мас, може змінювати швидкість літального апарата в залежності від взаємного розташування векторів швидкості літального апарата та швидкості вітру.

**Постановка задачі.** Необхідно визначити і математично оцінити, на скількох істотно може бути

вплив швидкості вітру на коефіцієнт лобового опору.

**Ціль статті.** Створити математичну модель залежності коефіцієнта лобового опору від швидкості вітру. Визначити числові характеристики коефіцієнта лобового опору в залежності від числових характеристик швидкості вітру.

### Основна частина

Приймемо, що  $V_c$  – швидкість літального апарату. Коефіцієнт лобового опору летального апарата має нелінійну залежність від  $V_c$  [1]. Розглянемо коефіцієнт лобового опору ЛА  $c_{лс1}$  як функцію від куба  $V_c$ :

$$c_{лс1} = aV_c^3 + bV_c^2 + cV_c + d, \quad (1)$$

де  $a, b, c, d$  – постійні величини.

Далі розглянемо, що на ЛА діє сила вітру, причому вектор  $\vec{V}_c$  і вектор швидкості вітру  $\vec{v}_B$  колінеарні [2]. Позначимо коефіцієнт лобового опору  $c_{лс2}$  і запишемо наступний вираз:

$$c_{лс2} = a V_c + v_B^3 + b V_c + v_B^2 + c V_c + v_B + d. \quad (2)$$

Позначимо відношення виразу (2) к виразу (1) символом  $A_{клс}$ :

$$A_{клс} = c_{лс2}/c_{лс1}. \quad (3)$$

Якщо визначити характеристики функції  $A_{клс}$ , то можна отримати характеристики  $C_{лс2}$  в залежності від змінення швидкості вітру. При цьому також потрібно враховувати зміну швидкісного напору, що розглянуто в статті [2]. Далі визначимо, як швидкість вітру впливає на спільні характеристики коефіцієнта лобового опору і швидкісного напору. Крім того, можливо, що від  $V_c^3$  чи от  $V_c^2$  залежить не коефіцієнт лобового опору, а коефіцієнт підйомної сили і тоді можна визначити вплив швидкості вітру на зміну коефіцієнта підйомної сили. Визначимо вираз для  $A_{клс}$ :

$$A_{клс} = \frac{a V_c + v_B^3 + b V_c + v_B^2 + c V_c + v_B + d}{aV_c^3 + bV_c^2 + cV_c + d};$$

$$A_{клс} = \frac{a V_c^3 + 3V_c v_B^2 + 3V_c^2 v_B + v_B^3}{aV_c^3 + bV_c^2 + cV_c + d} +$$

$$\frac{b V_c^2 + v_B^2 + 2V_c v_B + c V_c + v_B + d}{aV_c^3 + bV_c^2 + cV_c + d}. \quad (4)$$

Розділимо чисельник і знаменник правої частини виразу (4) на  $V_c^3$  та одержимо:

$$A_{клс} = \frac{a \left( 1 + 3 \frac{v_B^2}{V_c^2} + 3 \frac{v_B}{V_c} + \frac{v_B^3}{V_c^3} \right) + \frac{b}{V_c} \times}{a + b/V_c + c/V_c^2 + d/V_c^3} +$$

$$\frac{\left( 1 + \frac{v_B^2}{V_c^2} + 2 \frac{v_B}{V_c} \right) + \frac{c}{V_c^2} \left( 1 + \frac{v_B}{V_c} \right) + \frac{d}{V_c^3}}{a + b/V_c + c/V_c^2 + d/V_c^3}.$$

Прийmemo наступне позначення:

$$A_{v_B} = \frac{v_B}{V_c}; S = a + \frac{b}{V_c} + \frac{c}{V_c^2} + \frac{d}{V_c^3}$$

і, підставив їх в (5), запишемо для  $A_{клс}$  вираз:

$$A_{клс} = \frac{a}{S} 1 + 3A_{v_B}^2 + 3A_{v_B} + A_{v_B}^3 +$$

$$+ \frac{b}{V_c S} 1 + A_{v_B}^2 + 2A_{v_B} + \frac{c}{V_c^2 S} 1 + A_{v_B} + \frac{d}{V_c^3 S}. \quad (6)$$

Далі прийmemo позначення:

$$a_S = \frac{a}{S}; b_S = \frac{b}{V_c S}; c_S = \frac{c}{V_c^2 S}; d_S = \frac{d}{V_c^3 S}$$

і, підставив їх в вираз (6), отримаємо:

$$A_{клс} = a_S 1 + 3A_{v_B}^2 + 3A_{v_B} + A_{v_B}^3 +$$

$$+ b_S 1 + A_{v_B}^2 + 2A_{v_B} + c_S 1 + A_{v_B} + d_S;$$

$$A_{клс} = a_S + 3a_S A_{v_B}^2 + 3a_S A_{v_B} + a_S A_{v_B}^3 +$$

$$+ b_S + b_S A_{v_B}^2 + 2b_S A_{v_B} + c_S + c_S A_{v_B} + d_S;$$

$$A_{клс} = 3a_S A_{v_B}^2 + b_S A_{v_B}^2 + 3a_S A_{v_B} + 2b_S A_{v_B} +$$

$$+ c_S A_{v_B} + a_S A_{v_B}^3 + a_S + b_S + c_S + d_S;$$

$$A_{клс} = a_S + b_S + c_S + d_S + A_{v_B}^2 3a_S + b_S +$$

$$+ A_{v_B} 3a_S + 2b_S + c_S + a_S A_{v_B}^3;$$

$$A_{клс} = a_S + b_S + c_S + d_S + 3a_S + 2b_S + c_S \times$$

$$\times A_{v_B} + 3a_S + b_S A_{v_B}^2 + a_S A_{v_B}^3. \quad (7)$$

Для математичного сподівання функції  $A_{клс}$  (рівність (7)) запишемо вираз [3]:

$$M[A_{клс}] = M[a_S + b_S + c_S + d_S + 3a_S + 2b_S + c_S \times$$

$$\times A_{v_B} + 3a_S + b_S A_{v_B}^2 + a_S A_{v_B}^3];$$

$$M[A_{клс}] = a_S + b_S + c_S + d_S + 3a_S + 2b_S + c_S \times$$

$$\times M[A_{v_B}] + 3a_S + b_S M[A_{v_B}^2] + a_S M[A_{v_B}^3].$$

Прийmemo, що  $V_c = \text{const}$ . При цьому з формули (1) слідує, що і  $c_{лс1} = \text{const}$ . Знаючи математичне сподівання  $A_{клс}$  ( $M A_{клс}$ ), можна визначити математичне сподівання  $c_{лс2}$ , використовуючи (3) [3]:

$$M[c_{лс2}] = c_{лс1} M A_{клс}.$$

Для дисперсії  $c_{лс2}$ , використовуючи формулу (3), запишемо наступний вираз [3]:

$$D[c_{лс2}] = c_{лс1}^2 D A_{клс},$$

де  $D A_{клс}$  – дисперсія випадкової функції  $A_{клс}$ .

Визначення величини  $D A_{клс}$  – це більш важке завдання, чим отримання величини  $M A_{клс}$ . Маючи формули для випадкових величин  $X$  і  $Y$  з [3]:

$$D X + Y = D X + D Y + 2K X; Y; \quad (8)$$

$$K X; Y = M XY - M X M Y, \quad (9)$$

можна визначити дисперсії і кореляційний момент досліджуваних випадкових функцій. Представимо  $A_{клс}$  (вираз (7)) у вигляді суми:

$$A_{клс} = A_{клс1} + A_{клс2}, \quad (10)$$

$$A_{клс1} = a_S + b_S + c_S + d_S + 3a_S + 2b_S + c_S A_{v_B} +$$

$$+ 3a_S + b_S A_{v_B}^2; A_{клс2} = a_S M[A_{v_B}^3]. \quad (11)$$

Для дисперсії  $A_{клс}$  (формула (10)) запишемо вираз с урахуванням формул (8) та (9) [3]:

$$D[A_{клс}] = D[A_{клс1} + A_{клс2}] =$$

$$D[A_{клс1}] + D[A_{клс2}] + 2K[A_{клс1}; A_{клс2}]; \quad (12)$$

$$K[A_{клс1}; A_{клс2}] = M[A_{клс1} \cdot A_{клс2}] - M[A_{клс1}] M[A_{клс2}].$$

Для математичного сподівання та дисперсії  $A_{\text{кклс1}}$  (вирази (11)) отримаємо [2, 3]:

$$\begin{aligned} M[A_{\text{кклс1}}] &= a_S + b_S + c_S + d_S + 3a_S + 2b_S + c_S \times \\ &\times M[A_{V_B}] + 3a_S + b_S M[A_{V_B}^2]; \\ D[A_{\text{кклс1}}] &= 3a_S + b_S^2 D[A_{V_B}^2] + \\ &+ 3a_S + 2b_S + c_S^2 D[A_{V_B}] + \\ &+ 2K[3a_S + b_S A_{V_B}^2; 3a_S + 2b_S + c_S A_{V_B}]; \\ D[A_{V_B}] &= M[A_{V_B}^2] - M^2[A_{V_B}]; \\ D[A_{V_B}^2] &= M[A_{V_B}^4] - M^2[A_{V_B}^2]. \end{aligned}$$

Далі визначимо вираз для кореляційного моменту  $K[3a_S + b_S A_{V_B}^2; 3a_S + 2b_S + c_S A_{V_B}]$ , використовуючи формулу (9) [3]:

$$\begin{aligned} K[3a_S + b_S A_{V_B}^2; 3a_S + 2b_S + c_S A_{V_B}] &= \\ &= M[3a_S + b_S A_{V_B}^2 \cdot 3a_S + 2b_S + c_S A_{V_B}] - \\ &- M[3a_S + b_S A_{V_B}^2] M[3a_S + 2b_S + c_S A_{V_B}]; \\ K[3a_S + b_S A_{V_B}^2; 3a_S + 2b_S + c_S A_{V_B}] &= \\ &= M[3a_S + b_S 3a_S + 2b_S + c_S A_{V_B}^3] - \\ &- 3a_S + b_S M[A_{V_B}^2] 3a_S + 2b_S + c_S M[A_{V_B}]; \\ K[3a_S + b_S A_{V_B}^2; 3a_S + 2b_S + c_S A_{V_B}] &= \\ &= 3a_S + b_S 3a_S + 2b_S + c_S M[A_{V_B}^3] - \\ &- 3a_S + b_S 3a_S + 2b_S + c_S M[A_{V_B}^2] M[A_{V_B}]; \\ K[3a_S + b_S A_{V_B}^2; 3a_S + 2b_S + c_S A_{V_B}] &= \\ &= 3a_S + b_S 3a_S + 2b_S + c_S \times \\ &\times M[A_{V_B}^3] - M[A_{V_B}^2] M[A_{V_B}]. \end{aligned}$$

Математичне сподівання та дисперсія  $A_{\text{кклс1}}$  визначені. Далі знайдемо математичне сподівання та дисперсію  $A_{\text{кклс2}}$  (вирази (11)) [3]:

$$\begin{aligned} M[A_{\text{кклс2}}] &= a_S M[A_{V_B}^3]; \quad D[A_{\text{кклс2}}] = a_S^2 D[A_{V_B}^3]; \\ D[A_{V_B}^3] &= M[A_{V_B}^6] - M^2[A_{V_B}^3]. \end{aligned}$$

Визначимо вираз для  $A_{\text{кклс1}} \cdot A_{\text{кклс2}}$  ((11)):

$$\begin{aligned} A_{\text{кклс1}} \cdot A_{\text{кклс2}} &= [a_S + b_S + c_S + d_S + 3a_S + b_S A_{V_B}^2 + \\ &+ 3a_S + 2b_S + c_S A_{V_B}] \cdot a_S A_{V_B}^3; \\ A_{\text{кклс1}} \cdot A_{\text{кклс2}} &= a_S A_{V_B}^3 [a_S + b_S + c_S + d_S + \\ &+ 3a_S + b_S A_{V_B}^2 + 3a_S + 2b_S + c_S A_{V_B}]; \\ A_{\text{кклс1}} \cdot A_{\text{кклс2}} &= a_S [a_S + b_S + c_S + d_S A_{V_B}^3 + \\ &+ 3a_S + 2b_S + c_S A_{V_B}^4 + 3a_S + b_S A_{V_B}^5]. \end{aligned} \quad (13)$$

Для математичного сподівання добутку  $A_{\text{кклс1}} \cdot A_{\text{кклс2}}$  (формула (13)) отримаємо [3]:

$$\begin{aligned} M[A_{\text{кклс1}} \cdot A_{\text{кклс2}}] &= a_S M[a_S + b_S + c_S + d_S A_{V_B}^3 + \\ &+ 3a_S + 2b_S + c_S A_{V_B}^4 + 3a_S + b_S A_{V_B}^5]; \\ M[A_{\text{кклс1}} \cdot A_{\text{кклс2}}] &= a_S [a_S + b_S + c_S + d_S M[A_{V_B}^3] + \\ &+ a_S + b_S + c_S + d_S M[A_{V_B}^3] + 3a_S + 2b_S + c_S \times \\ &\times M[A_{V_B}^4] + 3a_S + b_S M[A_{V_B}^5]]. \end{aligned}$$

Всі величини, необхідні для одержання величини  $D[A_{\text{кклс}}]$  (формула (12)) визначені.

Вплив швидкості вітру на швидкісний напір характеризує коефіцієнт  $A_{\text{шн}}$  (стаття [2]). Так як сила лобового опору залежить від добутку коефіцієнта лобового опору і швидкісного напору, то необхідно визначити математичне сподівання та дисперсію добутку  $A_{\text{кклс}} A_{\text{шн}}$ .

Для визначення  $M A_{\text{кклс}} A_{\text{шн}}$  необхідно знайти вираз добутку  $A_{\text{кклс}} \cdot A_{\text{шн}}$  і далі визначити суму математичних сподівань, де будуть фігурувати постійні величини та наступні випадкові величини:  $A_{V_B}$ ,  $A_{V_B}^2$ ,  $A_{V_B}^3$ ,  $A_{V_B}^4$ ,  $A_{V_B}^5$ . Схожі дії здійснені при визначенні  $M A_{\text{кклс}}$ .

Для дисперсії добутку випадкових величин  $X$  і  $Y$  із книги [3] маємо наступну формулу:

$$DXY = D X D Y + M^2 X D Y + M^2 Y D X,$$

яку можна використовувати для визначення величини  $D A_{\text{кклс}} A_{\text{шн}}$ , так як математичне сподівання і дисперсія випадкових функцій  $A_{\text{кклс}}$  та  $A_{\text{шн}}$  (стаття [2]) визначені.

У статті не розглянуті конкретні приклади і не отримані практичні дані про значення числових характеристик випадкової функції  $A_{\text{кклс}}$ . Але з упевненістю можна сказати, що істотні зміни значення випадкової функції  $A_{\text{кклс}}$  будуть спостерігатися при невеликих швидкостях ЛА, складових приблизно 120÷300 км/ч. Це випадки, коли відбувається зліт чи посадка ЛА, крім того, ці швидкості характерні для невеликих по розмірі безпілотних ЛА.

Надалі необхідно визначити конкретні значення випадкової функції  $A_{\text{кклс}}$  і проаналізувати їхньої зміни щодо одиниці.

## Висновки

У статті створена математична модель змінення коефіцієнта лобового опору в залежності від випадкової швидкості вітру. При цьому коефіцієнт лобового опору, з урахуванням випадкової величини швидкості вітру, є випадковою функцією.

У розробленій математичній моделі для оцінки коефіцієнта лобового опору введена випадкова фун-

кція  $A_{\text{клс}}$ . Визначені числові характеристики випадкової функції  $A_{\text{клс}}$  і функції коефіцієнта лобового опору в залежності від числових характеристик швидкості вітру. Слід зазначити, що необхідно буде удосконалити розроблену математичну модель, тому що крім числових характеристик випадкової функції  $A_{\text{клс}}$  потрібно проводити оцінку поривів вітру, які можуть істотно збільшувати значення  $A_{\text{клс}}$ , але вникають з визначеної ймовірністю [4, 5]).

Також відмітимо, що за аналогією з розробленою математичною моделлю можна оцінювати вплив швидкості вітру на коефіцієнт підйомної сили, що так само має нелінійну залежність від швидкості ЛА [1], отже може відчутно залежати від швидкості вітру при швидкостях ЛА порядку  $120 \div 300$  км/ч.

## Список літератури

1. Ништа М.И. Аэродинамика летательных аппаратов и гидравлика их систем. – М.: ВВИА, 1981. – 624 с.
2. Олійник Ю.А. Вплив швидкості вітру на змінення швидкісного напору // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2008. – Вип. 2 (69). – С. 89-91.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.
4. Олійник Ю.А., Бородавка В.А., Слободянюк В.Ф. . Визначення максимальних швидкостей вітру з урахуванням поривів вітру при обмеженні ймовірності їх виникнення // Системи озброєння і військова техніка. – 2007. – Вип. 2(10). – С. 90-92.
5. Олійник Ю.А., Бородавка В.А. Бутівченко Р.В. Ймовірнісні характеристики параметрів пульсацій швидкості вітру та поривів вітру // Збірник наукових праць ХУПС. – Х.: ХУПС, 2007. – Вип. 3 (15). – С. 16-18.

Надійшла до редколегії 15.05.2008

**Рецензент:** канд. техн. наук, проф. В.О. Прокопов, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

## ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ВЕТРА НА ИЗМЕНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Ю.А. Олейник

*В статье определены числовые характеристики коэффициента лобового сопротивления с учетом постоянной скорости летательного аппарата и случайной скорости ветра. Разработана математическая модель нелинейной зависимости коэффициента лобового сопротивления от величин постоянной скорости летательного аппарата и случайной скорости ветра. Коэффициент лобового сопротивления летательного аппарата представлен в виде функции, зависящей от куба скорости летательного аппарата. Получена функция, характеризующая изменение коэффициента лобового сопротивления при отсутствии и при наличии скорости ветра.*

**Ключевые слова:** коэффициент лобового сопротивления, летательный аппарат, случайная величина, случайная функция, числовые характеристики.

## INFLUENCE TO VELOCITIES WINDS ON CHANGE THE FACTOR OF THE FRONTAL RESISTANCE

Yu.A. Oleynik

*Numeric features of the factor of the frontal resistance are determined in article with provision for constant velocity of the flying machine and casual velocity winds. It is designed mathematical model to nonlinear dependency of the factor of the frontal resistance from values of the constant velocity of the flying machine and casual velocity winds. The factor of the frontal resistance of the flying machine is presented in the manner of functions, hanging from cubes of the velocities of the flying machine. It is received function, characterizing change the factor of the frontal resistance in the absence of and at presence of the velocities winds.*

**Keywords:** factor of the frontal resistance, flying machine, random quantity, casual function, numeric features.