УДК 519.86:347.464

С.В. Гадецкая, В.Ю. Дубницкий

Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ, Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ ДИВИДИРИАЛЬНОГО И МУЛЬТИГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МГНОВЕННОГО ТЕМПА РОСТА НЕМОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Приведены сведения об основных определениях дивидир и мультигралов первого и второго рода. Показано, что экономическим содержанием дивидир являются функции мгновенного темпа роста и эластичности. Вычислены соответствующие выражения для основных функций роста.

кривая роста, темп роста, эластичность функции, дивидира, мультиграл

Введение

Анализ литературы. В экономической теории хорошо известны задачи определения среднего темпа роста, определения среднего уровня инфляции и построения функции эластичности [1].

Для положительной монотонной конечной последовательности средний темп роста

$$T = \sqrt[n-1]{y_n / y_1}\ . \tag{1}$$

Средний темп роста подпоследовательности $Y_1 \subset Y,\ Y_1 = \{y_j\},\ j = \overline{k,m};\ 1 \le k < m \le n$ определяют по формуле

$$T_1 = \sqrt[m-k]{y_m / y_k}\ . \tag{2}$$

Среднегодовой уровень инфляции определяют по формуле [2]:

$$I = \prod_{j=1}^{12}\left(\frac{l_3}{100} + 1\right), \tag{3}$$

где l – уровень инфляции в j-м месяце , $j = \overline{1,12}$.

Известно, что для любой дифференцируемой функции $y = f(x)$ эластичность $E_x(y)$ определяют по формуле

$$E_x(y) = \frac{y'(x)}{y} x\ . \tag{4}$$

Невзирая на то, что, на первый взгляд, это достаточно разные задачи, их внутренняя общность показана в работах [2, 3].

В работе [2] доказано, что для определенной на [a, b] непрерывной функции имеет место условие, которое названо дивидирой первого рода V(x), а именно:

$$V(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}\right]^{1/\Delta x} = \exp\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]. \tag{5}$$

Операция, которая дает возможность по дивидире первого рода определить ее первообразную, названа мультигралом первого рода. Определенный на интервале [a, b] мультиграл первого рода вычисляют по формуле

$$\left. nf(x)^{dx}\right|_a^b = \exp\int_a^b \ln f(x)dx\ . \tag{6}$$

Дивидирой второго рода w(x) названа функция

$$w(x) = \lim_{h\to 1}\frac{\ln f(xh) - \ln f(x)}{\ln h} = \frac{xf'(x)}{f(x)}\ . \tag{7}$$

Сравнивая выражения (4) и (7), можно сделать вывод, что эластичность $E_x(y)$ функции w(x) есть дивидира второго рода.

Определенный на интервале [a, b] мультиграл первого рода вычисляют так:

$$nf(x)^{dx} = \exp\int_a^b \ln f(x)dx, \tag{8}$$

определенный мультиграл второго рода вычисляют по формуле

$$\left. n\delta(x)^{f(x)}\right|_a^b = \exp\left[\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx\right]. \tag{9}$$

Возможная экономическая интерпретация этих математических объектов согласно с работами [2, 3] такая.

Дивидира первого рода – это средний темп роста на бесконечно малом интервале времени $[t_1, t_2]$ $t_1 < t_2;$ $\Delta t = t_2 - t_1 < \varepsilon_1 \quad \varepsilon \to 0$:

$$V(t) = \sqrt[t_2 - t_1]{\frac{y(t_2)}{y(t_1)}}\ . \tag{10}$$

Дивидира второго рода в соответствии с её определением имеет экономический смысл эластичности функции.

В таком случае, по мнению автора работы [2], определенный мультиграл второго рода дает возможность вычислить зависимость предложения от цены по известным коэффициентам эластичности предложения от цены.

В работе [3] показано, что натуральный логарифм относительной меры отклонения фактической скорости от эталонной совпадает с дивидирой второго рода.

Постановка задачи. Целью данной работы является вычисление дивидир первого и второго рода, мультигралов первого и второго рода для основных функций роста, принятых в эконометрии [1] без ограничений на наличие свойства монотонности функции.

Изложение результатов

В табл. 1 приведен перечень основных функций роста, которые исследованы в работе.

Таблица 1

Основные типы кривых роста

№№	Тип кривой	Определение кривой
1	Экспоненциальная функция	$y_1 = ab^x$
2	Степенная функция	$y_2 = ax^b$
3	Обратная функция	$y_3 = a + b\frac{1}{x}$
4	Линейная функция	$y_4 = a + bx$
5	Квадратичная функция	$y_5 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$
6	Модифицированная экспонента	$y_6 = ab^x + c$
7	Кривая Гомперца, тип I	$y_7 = \exp(ab^x + c)$
8	Логистическая кривая	$y_8 = \frac{1}{ab^x + c}$
9	Логарифмическая парабола	$y_9 = ab^x c^{x^2}$
10	Кривая Перла-Рида	$y_{10} = \frac{a}{1 + be^{-cx}}$
11	Кривая Гомперца, тип II	$y_{11} = a\exp\left(-be^{-cx}\right)$

Сравнивая условия (5) и (7), можно видеть, что базовым для вычисления дивидир первого и второго рода является отношение

$$z(x) = f'(x)/f(x).$$

Результаты вычислений дивидир первого и второго рода приведены в табл. 2, 3 соответственно.

При вычислении дивидиры первого рода для кривой Перла-Рида следует иметь в виду следующее:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{1+be^{-cx}}\right) = \frac{abc\exp(-cx)}{\left(1+b\exp\left(-cx\right)\right)^2}. \qquad (11)$$

Для удобства последующих вычислений умножим и разделим выражение (11) на величину exp(2cx) и получим выражение, записанное в табл. 2.

Вычисления мультигралов первого рода (M1) выполняют в соответствии с формулой (6). Базовым для этой процедуры является выражение:

$$I_k^{(1)} = \int \ln f_k(x)dx, \quad k = \overline{1;11}. \qquad (12)$$

В условии (12) номера $k = \overline{1;11}$ совпадают с нумерацией выражений в табл. 1.

Для экспоненциальной функции выражение для M1 будет таким:

$$I_1^{(1)} = \int \ln(ab^x)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln\left(ab^x\right)^2}{\ln b}. \qquad (13)$$

Для степенной функции выражение для M1 будет таким:

Таблица 2

Дивидиры первого рода для основных типов кривых роста

№№	Тип кривой	Дивидира первого рода V(x)
1	Экспоненциальная функция	b
2	Степенная функция	$\exp\left(b/x\right)$
3	Обратная функция	$\exp\left(-\frac{b}{x\left(ax+b\right)}\right)$
4	Линейная функция	$\exp\left(\frac{b}{a+bx}\right)$
5	Квадратичная функция	$\exp\left(\frac{b_1 + 2b_2 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}\right)$
6	Модифицированная экспонента	$\exp\left(\frac{ab^x \ln b}{ab^x + c}\right)$
7	Кривая Гомперца, тип I	$\exp(ab^x \ln b)$
8	Логистическая кривая	$\exp\left(-ab^x \ln b\Big/\left(ab^x + c\right)^2\right)$
9	Логарифмическая парабола	$\exp\left(\ln b + 2x\ln c\right)$
10	Кривая Перла-Рида	$\exp\left(\frac{bc}{e^{cx} + b}\right)$
11	Кривая Гомперца, тип II	$\exp\left(bce^{-cx}\right)$

$$I_2^{(1)} = \int \ln(ab^x)dx = x\ln(ax^b) - bx. \qquad (14)$$

Для обратной функции выражение для M1 будет таким:

$$I_3^{(1)} = \int \ln\left(a + \frac{b}{x}\right)dx = \frac{b}{a}\left|y_3\right| - \frac{b}{a}\ln\left|-\frac{b}{x}\right| + x\ln\left|y_3\right|, \qquad (15)$$

в условии (15) принято, что согласно с табл. 1

$$y_3 = a + b/x.$$

В последующем особенность обозначения $y_k \left(k = \overline{1,11}\right)$ специально не оговаривается.

Для линейной функции выражение для M1 будет таким:

$$I_4^{(1)} = \int \ln\left(a + bx\right)dx = \frac{y_4 \cdot \ln\left|y_4\right|}{b} - x. \qquad (16)$$

Для квадратичной функции выражение для M1 будет таким:

$$I_5^{(1)} = \int \ln\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2\right)dx =$$

$$= x\ln\left|y_5\right| - 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{b_1}{b_2} + \ln\left|y_5\right| + \qquad (17)$$

$$+\frac{4b_0}{\sqrt{4b_2 b_0 - b_1^2}}\operatorname{arctgf} - \frac{b_1^2}{b_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4b_2 b_0 - b_1^2}}\operatorname{arctgf},$$

где
$$f = \frac{b_1 + 2b_2 x}{\sqrt{4b_2 b_0 - b_1^2}}. \qquad (18)$$

Таблица 3

Дивидиры второго рода (эластичности) основных типов кривых роста

№№	Тип кривой	Дивидира второго рода w(x)
1	Экспоненциальная функция	$x\ln b$
2	Степенная функция	b
3	Обратная функция	$-\frac{b}{ax+b}$
4	Линейная функция	$\frac{bx}{a+bx}$
5	Квадратичная функция	$\frac{x\left(b_1+2b_2x\right)}{b_0+b_1x+b_2x^2}$
6	Модифицированная экспонента	$\frac{xab^x\ln b}{ab^x+c}$
7	Кривая Гомперца, тип I	$x\exp(ab^x\ln b)$
8	Логистическая кривая	$-\frac{xab^x\ln b}{\left(ab^x+c\right)^2}$
9	Логарифмическая парабола	$x\left(\ln b+2x\ln c\right)$
10	Кривая Перла-Рида	$\frac{xbc}{e^{cx}+b}$
11	Кривая Гомперца, тип II	$xbce^{-cx}$

Для модифицированной экспоненты выражение для М1 будет таким:

$$I_6^{(1)}=\int\ln\left(ab^x+c\right)dx=$$
$$=\frac{\ln|c|}{\ln|b|}\ln\left|a\cdot\frac{b^x}{c}\right|-\frac{1}{\ln|b|}\operatorname{di}\log\left[\frac{ab^x}{c}\right]. \quad (19)$$

В условии (19) символ $\operatorname{di}\log(z)$ значит специальную функцию – дилогарифм [4].

В нашем случае дилогарифм будем рассматривать как функцию

$$\tilde{L}i_2(x)=\operatorname{Re}Li_2(x)=\begin{cases}Li_2\ (x), & x\le 1;\\ Li_2\ (x)+i\pi\ln x, & x\ge 1.\end{cases} \quad (20)$$

Для вычисления дилогарифмической функции в нашем случае нужно использовать такие соотношения [5]:

$$Li_2(x)+Li_2(1-x)=\frac{\pi^2}{6}-\ln x\cdot\ln(1-x),\quad \tfrac{1}{2}<x<1; \quad (21)$$

$$\tilde{L}i_2(x)+\tilde{L}i_2\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\ln^2 x,\ 0<x<\infty. \quad (22)$$

Более детальные сведения о способах вычисления функции $\operatorname{di}\log(z)$ приведены [6, 7].

Для кривой Гомперца первого типа выражение для М1 будет таким:

$$I_7^{(1)}=\int\ln\left(\exp\left(ab^x+c\right)\right)dx=x\ln\left|y_7\right|+\frac{ab^x}{\ln|b|}-axb^x. \quad (23)$$

Для логистической кривой выражение для М1 будет таким:

$$I_8^{(1)}=\int\ln\left|\frac{1}{ab^x+c}\right|dx=\frac{1}{\ln|b|}\left[\ln\left|\frac{1}{c}\right|\cdot\ln\left|\frac{c}{ab^x+c}-1\right|-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1}{ab^x+c}\right)^2+\operatorname{di}\log\left|\frac{c}{ab^x+c}\right|\right)\right]. \quad (24)$$

Для логарифмической параболы выражение для М1 будет таким:

$$I_9^{(1)}=\int\ln\left(ab^xc^{x^2}\right)dx=$$
$$=x\ln\left|ab^xc^{x^2}\right|-\frac{x^2\ln|b|}{2}-\frac{2x^3\ln|c|}{3}. \quad (25)$$

Для кривой Перла-Рида выражение для М1 будет таким:

$$I_{10}^{(1)}=\int\ln\left|\frac{a}{1+be^{cx}}\right|dx=\frac{1}{2c}\ln\left(y_{10}\right)^2-\frac{\ln|a|}{c}\times$$
$$\times\ln\left|\frac{y_{10}-a}{a}\right|+\frac{1}{c}\operatorname{di}\log\left|\frac{1}{1+b\exp\left(-cx\right)}\right|. \quad (26)$$

Для кривой Гомперца второго типа выражение для М1 будет таким:

$$I_{11}^1=\int\ln\left|a\exp\left(-be^{-cx}\right)\right|dx=\frac{b}{c}\exp\left(-cx\right)+x\ln|a|. \quad (27)$$

Как пример использования приведенной методики рассмотрим кривые мгновенного роста (дивидиры первого рода), которые были получены для регрессионных моделей динамики авиационного производства в СССР (А), США (Б), Японии (В), Германии (Г) [8]. Уравнения кривой роста $y^{(u)}(t)$, $u=\{А,Б,В,Г\}$ будут такими:

$$y^{(а)}(t)=\exp(-2{,}5850+0{,}0032t^2);$$
$$y^{(б)}(t)=\exp(-3{,}7711+0{,}0041t^2);$$
$$y^{(в)}(t)=\exp(-4{,}7412+0{,}0040t^2);$$
$$y^{(г)}(t)=\exp(-5{,}2450+0{,}0054t^2)^2.$$

Для первых трех стран кривая роста имеет вид:

$$y(t)=\exp(a+bt^2),$$

для четвертой

$$y(t)=(a+bt^2)^2.$$

Тогда дивидира первого рода для первых трех функций имеет вид:

$$V(t)=\exp\frac{2bt\exp\left(a+bt^2\right)}{\exp\left(a+bt^2\right)}=\exp\left(2bt\right).$$

Для четвертой страны дивидира первого рода будет такой:

$$V(t)=\exp\frac{4bt\left(a+bt^2\right)}{\left(a+bt^2\right)^2}=\exp\left(\frac{4bt}{a+bt^2}\right).$$

Графики, которые отвечают этим уравнениям, приведены на рис. 1.

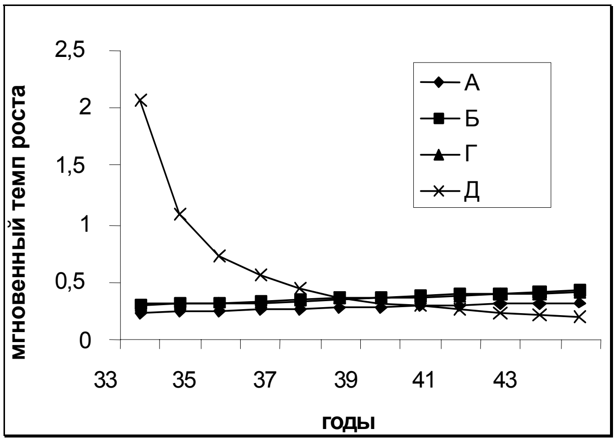

Рис. 1. График уравнений кривых роста

Из этого графика можно сделать вывод, что страны А, Б, В имели приблизительно одинаковый темп роста, страна Г все время снижала темп выпуска продукции.

Вычисления мультигралов второго рода (М2) выполняют в соответствии с формулой (9). Базовым для этой процедуры является выражение

$$I_k^{(2)}=\int\frac{f(x)}{x}dx. \qquad (28)$$

В условии (12) номера $k=\overline{1;11}$ также совпадают с нумерацией выражений в табл. 1. Неопределенный мультиграл второго рода будет определен согласно с работой [2] так:

$$n\delta\cdot x^{f(x)}=\exp\int\frac{f(x)}{x}dx. \qquad (29)$$

Дальше приведем результаты вычисления интегралов вида (12) для функций, указанных в табл. 1.

Для экспоненциальной функции интеграл

$$I_1^{(2)}=\int\frac{ab^x}{x}dx=-aE_1(-x\ln b). \qquad (30)$$

Для степенной функции интеграл

$$I_2^{(2)}=\int\frac{ax^b}{x}dx=\frac{a}{b}x^b. \qquad (31)$$

Для обратной функции интеграл

$$I_3^{(2)}=\int(a+\frac{b}{x})\frac{1}{x}dx=a\ln x-\frac{b}{x}. \qquad (32)$$

Для линейной функции интеграл

$$I_4^{(2)}=\frac{a+bx}{x}dx=a\ln x+bx. \qquad (33)$$

Для квадратичной функции интеграл

$$I_5^{(2)}=\int\frac{b_0+b_1x+b_2x^2}{x}dx=b_1x+b_2\frac{x^2}{2}+b_0\ln x\ . \qquad (34)$$

Для модифицированной экспоненты интеграл

$$I_6^{(2)}=\int\frac{ab^{x+c}}{x}dx=-aE_1(-x\ln b)+c\ln x. \qquad (35)$$

Для логистической кривой интеграл

$$I_8^{(2)}=\int\frac{dx}{x(ab^x+c)}=(-1)\left(\frac{1}{x^2(ab^x+c)}+\frac{ab^x\ln b}{x(ab^x+c)^2}\right). \qquad (36)$$

Для кривой Гомперца первого типа, логарифмической параболы, кривой Перла-Рида, кривой Гомперца второго типа интегралы вида (29) в явном виде получить не удалось.

В выражениях (30) и (35) функция $E_1(x)$ – интегральная показательная функция [5]. Для x > 0, а в нашем случае это условие выполняется по содержательному смыслу задачи:

$$E_1(x)=-C-\ln x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n\cdot n!}, \qquad (37)$$

где C – постоянная Эйлера, C=0,5772… . В работе [9] отмечено, что суммирование ряда (35) можно прекратить при числе членов ряда N = 100.

Выводы

1. Приведены сведения о дивидирах первого и второго рода и мультигралах первого и второго рода для основных типов кривых роста, принятых в эконометрии.

2. Приведен пример использования введенных понятий для анализа темпов роста авиационного производства.

Список литературы

1. *Лук'яненко І.Г., Красникова Л.І. Економетрика. – К.: Знання, 1998. – 494 с.*

2. *Литвин О.М. Дивідіріальні та мультигральні числення. – К.: Наук. думка, 2006. – 144 с.*

3. *Котляр В.Ю. Об относительной скорости изменения функции // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 5. – С. 160-165.*

4. *Дьяконов В.П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторе. – М.: Наука, 1986. – 224 с.*

5. *Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. – К.: Наук. думка, 1984. – 598 с.*

6. *Mornis R. The dilogarifm function of real argument // Math.Comput. – 1979. – V. 33, № 146. – P. 778-787.*

7. *Lewin L. Dilogarifm and associated functions. – London: Macdonald, 1958. – 353 p.*

8. *Дубницький В.Ю., Ходирєв О.І. Економетричний аналіз виробництва літаків у країнах – основних учасницях Другої Світової війни // Системи озброєння і військова техніка. – 2007. – № 1 (9). – С. 87-91.*

9. *Цирлинг Ш.Е. Специальные функции и определенные интегралы. Алгоритмы. Программы. – М.: Радио и связь, 1988. – 272 с.*

Поступила в редколлегию 27.09.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Кононенко, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.