

УДК 519.859

Л.Г. Евсеєва, О.В. Панкратов

Полтавський університет потребительської кооперації України, Полтава

## УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ И РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ

*Строится интервальная математическая модель оптимизационной задачи упаковки интервальных параллелепипедов. Осуществляется переход к двухкритериальной задаче в евклидовом пространстве. Предлагается стратегия решения, которая базируется на использовании метода оптимизации по группам переменных и модифицированного метода сужающихся окрестностей.*

**интервальный параллелепипед, интервальное  $\Phi$ -отображение, интервальная математическая модель, двухкритериальная оптимизационная задача, стратегия решения**

### Введение

Задачи упаковки параллелепипедов 3DBP (3D Bin Packing) принадлежат к классу задач геометрического проектирования [1] и занимают особое место в классе задач Cutting & Packing (3D C&P) [2], что обусловлено их актуальностью и широким спектром приложений. В работе [2] отмечаются наиболее известные подходы к решению задач трехмерной упаковки, а именно подходы, которые базируются на генетическом алгоритме (genetic algorithm), на алгоритме “имитационного обжига” (simulated annealing algorithm), на использовании различных эвристических подходов (heuristics algorithms). Большинство современных методик решения данного класса задач являются эвристическими (например [3, 4]) и рассматриваются в контексте конкретного практического применения задачи. Потому полученные решения, в общем случае, представляют собой лишь некоторые приближения к оптимальным. Эффективные методы решения оптимизационных задач размещения разработаны в научной школе Ю.Г. Стояна [1, 5, 6]: модификации методов локальной и глобальной оптимизации. Однако, как правило, математическое моделирование и решение задач размещения осуществлялось без учета погрешностей исходных данных, то есть в идеализированной форме. Развитие геометрического проектирования как научного направления требует учета погрешностей для построения адекватных математических моделей оптимизационных задач размещения и разработки методов их решения. В рамках развития концепции учета погрешностей при моделировании и решении задач размещения геометрических объектов в данной работе предлагается подход к учету погрешностей на основе использования приложения интервального анализа [7] в геометрическом проектировании [1], интервальной геометрии [8]. Применение при моделировании оптимизационной задачи таких понятий интервальной геометрии, как: интервальная гиперплоскость, интервальный параллелепипед, интервальное касание геометрических объектов, интервальное расстояние между выпуклы-

ми интервальными многогранниками, интервальное направленное множество, дает возможность с одной стороны, рациональным образом учитывать погрешности исходных данных, а с другой стороны – представить математическую модель задачи в виде, позволяющем реализовать ее современными эффективными методами оптимизации.

### Постановка задачи

Рассмотрим оптимизационную задачу геометрического проектирования [1] в такой постановке. Пусть в евклидовом пространстве  $R^3$  имеется конечное множество параллелепипедов  $P_i$  с метрическими характеристиками

$$m_i^v = 2(a_i \pm v_{a_i}, b_i \pm v_{b_i}, c_i \pm v_{c_i}), \quad (1)$$

$$a_i \in R^+, v_{a_i} \in R^+, b_i \in R^+, v_{b_i} \in R^+, c_i \in R^+, v_{c_i} \in R^+, \quad (2)$$

$$a_0 \geq a_i, b_0 \geq b_i, c_0 \geq c_i$$

$$v_{a_i} < \varepsilon \cdot a_i, v_{b_i} < \varepsilon \cdot b_i, v_{c_i} < \varepsilon \cdot c_i, \varepsilon \in (0,1) \subset R^1, i \in \{0\} \cup J_n,$$

где  $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$  – индексное множество.

Значение  $\varepsilon$  зависит от конкретного смысла прикладной или научной задачи и характеризует точность задания исходных данных.

В данном исследовании для упаковки параллелепипедов  $P_i, i \in J_n$ , в параллелепипед  $P_0$  используется трансляция  $P_i$  на векторы:

$$u_i \pm v_{u_i} = (x_i \pm v_{x_i}, y_i \pm v_{y_i}, z_i \pm v_{z_i}) \in R^3, \quad (3)$$

где  $v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i} \in R^1$ , (параллелепипед  $P_i$  с параметрами размещения (3) обозначим  $P_i(u_i \pm v_{u_i})$ ).

**Задача.** Необходимо найти вектор параметров размещения  $u \pm v_u = (u_1 \pm v_{u_1}, u_2 \pm v_{u_2}, \dots, u_n \pm v_{u_n}) \in R^{3n}$ , такой, чтобы параллелепипеды  $P_i(u_i \pm v_{u_i}), i \in J_n$ , принадлежали  $P_0(u_0 \pm v_{u_0})$  без взаимных пересечений, причем таким образом, чтобы высота  $h^*$  занятой части параллелепипеда  $P_0(u_0 \pm v_{u_0})$  и ее погрешность  $v_h^*$  достигли минимальных значений.

Очевидно, задание метрических характеристик объектов в виде (1), (2), а параметров размещения в виде (3) позволяет естественным образом создать пары вида  $(\alpha, v_\alpha) \in R^2$ , которые характеризуют некоторую величину  $\alpha \in R^1$  и погрешность  $v_\alpha \in R^1$  задания этой величины. Тогда вещественное число  $\alpha$  с учетом погрешности его задания можно представить двумя числами – оценкой снизу и оценкой сверху, образующими интервальное число  $\langle \alpha, v_\alpha \rangle = \langle A \rangle \in I_s R$ , где  $I_s R$  – расширенное пространство центрированных интервалов [8].

**Изложение результатов**

На основе гомеоморфизма [8] пространств  $I_s R$  и  $R^2$  зададим биекцию между исходными данными и элементами пространства  $I_s R$  ( $i \in \{0\} \cup J_n$ ):

$$R^2 \ni (a_i, v_{a_i}) \leftrightarrow \langle a_i, v_{a_i} \rangle = \langle A_i \rangle \in I_s R; R^2 \ni (b_i, v_{b_i}) \leftrightarrow \langle b_i, v_{b_i} \rangle = \langle B_i \rangle \in I_s R; R^2 \ni (c_i, v_{c_i}) \leftrightarrow \langle c_i, v_{c_i} \rangle = \langle C_i \rangle \in I_s R; R^2 \ni (x_i, v_{x_i}) \leftrightarrow \langle x_i, v_{x_i} \rangle = \langle X_i \rangle \in I_s R; R^2 \ni (y_i, v_{y_i}) \leftrightarrow \langle y_i, v_{y_i} \rangle = \langle Y_i \rangle \in I_s R; R^2 \ni (z_i, v_{z_i}) \leftrightarrow \langle z_i, v_{z_i} \rangle = \langle Z_i \rangle \in I_s R.$$

Тогда условию (2) соответствуют интервальные неравенства [8] вида:

$$\langle A_i \rangle \geq \mathbf{0}, \langle B_i \rangle \geq \mathbf{0}, \langle C_i \rangle \geq \mathbf{0}, i \in \{0\} \cup J_n, \mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle, \langle A_0 \rangle \geq \langle A_i \rangle, \langle B_0 \rangle \geq \langle B_i \rangle, \langle C_0 \rangle \geq \langle C_i \rangle, i \in J_n.$$

Рассмотрим интервальное отображение [8]  $f: I_s^3 R \rightarrow I_s R$  вида:

$$f(U_i) = \max_{k=1,2,\dots,6} \{f_i^k(U_i)\}, i \in \{0\} \cup J_n, \quad (4)$$

где  $f_i^1(U_i) = \langle \langle X \rangle - \overline{\langle X_i \rangle} \rangle - \overline{\langle A_i \rangle};$   
 $f_i^2(U_i) = -\langle \langle X \rangle - \overline{\langle X_i \rangle} \rangle - \overline{\langle A_i \rangle}; \quad (5)$

$$f_i^3(U_i) = \langle \langle Y \rangle - \overline{\langle Y_i \rangle} \rangle - \overline{\langle B_i \rangle}; f_i^4(U_i) = -\langle \langle Y \rangle - \overline{\langle Y_i \rangle} \rangle - \overline{\langle B_i \rangle};$$

$$f_i^5(U_i) = \langle \langle Z \rangle - \overline{\langle Z_i \rangle} \rangle - \overline{\langle C_i \rangle}; f_i^6(U_i) = -\langle \langle Z \rangle - \overline{\langle Z_i \rangle} \rangle - \overline{\langle C_i \rangle};$$

$U = \langle \langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle \rangle \in I_s^3 R, \overline{\langle X \rangle} = \langle x, v_x \rangle = \langle x, -v_x \rangle \in I_s R$  – элемент, сопряженный элементу  $\langle X \rangle = \langle x, v_x \rangle \in I_s R$  [9].

Здесь и в дальнейшем максимум в (4) понимаем следующим образом:

$$\langle X^* \rangle = \langle x^*, v_x^* \rangle = \langle X_j \rangle = \max \{ \langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle \}, j \in J_n,$$

где с учетом отношения линейного порядка в  $I_s R$  [8]:

$$\langle X^* \rangle = \begin{cases} \langle x^* = x_j = \max_{i=1,2,\dots,n} \{x_i\}, v_x^* = v_{x_j} \rangle, \\ x_i \neq x_j, i \neq j, i \in J_n; \\ \langle x^* = x_j, v_x^* = v_{x_j} = \max_{i=1,2,\dots,n} \{v_{x_i}\} \rangle, \\ x_1 = x_2 = \dots = x_n = x^*; \\ \langle x^* = x_j, v_x^* = v_{x_j} = \max_{t=1,2,\dots,m} \{v_{x_{i_t}}\} \rangle, \\ x_{i_1} = \dots = x_{i_m} = x^*, i_t \in J_n, m \leq n. \end{cases}$$

Интервальным параллелепипедом  $P_i \subset I_s^3 R$  с центром собственной системы координат  $U_i = \langle \langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle, \langle Z_i \rangle \rangle$  называется точечное интервальное множество вида:

$$P_i(U_i) \subset I_s^3 R = I_s R \times I_s R \times I_s R,$$

$$P_i(U_i) = \text{int } P_i(U_i) \cup \text{fr } P_i(U_i), i \in \{0\} \cup J_n,$$

интервальная граница  $\text{fr } P_i(U_i)$  которого определяется уравнением  $f(U_i) = \mathbf{0}, \mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$ .

При этом  $f_i^k(U_i) = \mathbf{0}, k \in J_6$ , являются уравнениями интервальных гиперплоскостей [8], принимающими участие в формировании  $\text{fr } P_i(U_i)$ .

Исходя из биекции между исходными данными и элементами  $I_s R$ , с учетом (3), интервальное направленное множество [9]

$$U_i = \langle \langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle, \langle Z_i \rangle \rangle \in I_s^3 R, \langle X_i \rangle = \langle x_i, v_{x_i} \rangle \in I_s R, \langle Y_i \rangle = \langle y_i, v_{y_i} \rangle \in I_s R, \langle Z_i \rangle = \langle z_i, v_{z_i} \rangle \in I_s R, i \in \{0\} \cup J_n,$$

назовем интервальными параметрами размещения интервального объекта  $P_i$ . Объект  $P_i$ , транслируемый на интервальное направленное множество  $U_i$ , обозначим  $P_i(U_i)$ .

Тогда оптимизационную задачу размещения объектов  $P_i(u_i)$ , метрические характеристики (1)-(2) и параметры размещения (3) которых заданные с некоторыми погрешностями, можно представить как оптимизационную задачу размещения интервальных параллелепипедов  $P_i(U_i) \subset I_s^3 R, i \in J_n$ , в интервальной области  $P_0(U_0) \subset I_s^3 R$ .

Математическую модель оптимизационной задачи размещения интервальных параллелепипедов в интервальный параллелепипед назовем интервальной математической моделью задачи 3DBIP (3D Bin Interval Packing). Для аналитического описания взаимодействия объектов трехмерного интервального пространства  $I_s^3 R$ , на основе определения Ф-функции пары объектов евклидова пространства [10], введено понятие интервального Ф-отображения пар объектов интервального пространства  $I_s^3 R$ .

Интервальное отображение [8]  $\Phi: I_s^6 R \rightarrow I_s R$ , называется интервальным Ф-отображением объектов  $T_1(U_1) \subset I_s^3 R$  и  $T_2(U_2) \subset I_s^3 R$ , если оно удовлетворяет условиям:

1.  $\Phi(U_1, U_2) > \mathbf{0}$ , если  $T_1(U_1) \cap T_2(U_2) = \emptyset$ ,
2.  $\Phi(U_1, U_2) = \mathbf{0}$ , если  $\begin{cases} \text{int } T_1(U_1) \cap \text{int } T_2(U_2) = \emptyset; \\ \text{fr } T_1(U_1) \cap \text{fr } T_2(U_2) \neq \emptyset, \end{cases}$
3.  $\Phi(U_1, U_2) < \mathbf{0}$ , если  $\text{int } T_1(U_1) \cap \text{int } T_2(U_2) \neq \emptyset$ .

Понятие интервального Ф-отображения позволяет сформулировать задачу размещения интервальных объектов как задачу математического программирования.

Условием размещения интервального объекта  $P_i(U_i)$ ,  $i \in J_n$ , в интервальной области  $P_0(U_0)$  есть выполнение интервального неравенства

$$\Phi_{0i}(U_0, U_i) \geq 0,$$

где  $\Phi_{0i}(U_0, U_i) = \min_{k=1,2,\dots,6} \{f_{0i}^k(U_0, U_i)\}$ ; (6)

$$f_{0i}^1(U_0, U_i) = -(\langle X_i \rangle - \langle \bar{X}_0 \rangle) + \langle A \rangle + \langle v_{a_0} - v_{a_i}, v_{a_0} - v_{a_i} \rangle;$$

$$f_{0i}^2(U_0, U_i) = \langle X_i \rangle - \langle \bar{X}_0 \rangle + \langle A \rangle + \langle -v_{a_0} - v_{a_i}, v_{a_0} - v_{a_i} \rangle;$$

$$f_{0i}^3(U_0, U_i) = -(\langle Y_i \rangle - \langle \bar{Y}_0 \rangle) + \langle B \rangle + \langle -v_{b_0} - v_{b_i}, v_{b_0} - v_{b_i} \rangle;$$

$$f_{0i}^4(U_0, U_i) = \langle Y_i \rangle - \langle \bar{Y}_0 \rangle + \langle B \rangle + \langle -v_{b_0} - v_{b_i}, v_{b_0} - v_{b_i} \rangle;$$

$$f_{0i}^5(U_0, U_i) = -(\langle Z_i \rangle - \langle \bar{Z}_0 \rangle) + \langle C \rangle + \langle -v_{c_0} - v_{c_i}, v_{c_0} - v_{c_i} \rangle;$$

$$f_{0i}^6(U_0, U_i) = \langle Z_i \rangle - \langle \bar{Z}_0 \rangle + \langle C \rangle + \langle -v_{c_0} - v_{c_i}, v_{c_0} - v_{c_i} \rangle;$$

где  $\Phi_{0i}(U_0, U_i)$ ,  $i \in J_n$ , – интервальное  $\Phi$ -отображение объектов  $P_i(U_i)$  и  $P_0^*(U_0)$ .

Условием непересечения интервальных параллелепипедов  $P_i(U_i)$  и  $P_j(U_j)$ ,  $i \in J_n$ ,  $j \in J_n$ ,  $i < j$ , есть выполнение интервального неравенства

$$\Phi_{ij}(U_i, U_j) \geq 0,$$

где  $\Phi_{ij}(U_i, U_j) = \max_{k=1,2,\dots,6} \{f_{ij}^k(U_i, U_j)\}$ , (7)

$$f_{ij}^1(U_i, U_j) = \langle X_j \rangle - \langle \bar{X}_i \rangle - \langle \bar{A}' \rangle - \langle v_{a_i} + v_{a_j}, v_{a_i} - v_{a_j} \rangle;$$

$$f_{ij}^2(U_i, U_j) = -(\langle X_j \rangle - \langle \bar{X}_i \rangle) - \langle \bar{A}' \rangle - \langle v_{a_i} + v_{a_j}, v_{a_i} - v_{a_j} \rangle;$$

$$f_{ij}^3(U_i, U_j) = (\langle Y_j \rangle - \langle \bar{Y}_i \rangle) - \langle \bar{B}' \rangle - \langle v_{b_i} + v_{b_j}, v_{b_i} - v_{b_j} \rangle;$$

$$f_{ij}^4(U_i, U_j) = -(\langle Y_j \rangle - \langle \bar{Y}_i \rangle) - \langle \bar{B}' \rangle - \langle v_{b_i} + v_{b_j}, v_{b_i} - v_{b_j} \rangle;$$

$$f_{ij}^5(U_i, U_j) = (\langle Z_j \rangle - \langle \bar{Z}_i \rangle) - \langle \bar{C}' \rangle - \langle v_{c_i} + v_{c_j}, v_{c_i} - v_{c_j} \rangle;$$

$$f_{ij}^6(U_i, U_j) = -(\langle Z_j \rangle - \langle \bar{Z}_i \rangle) - \langle \bar{C}' \rangle - \langle v_{c_i} + v_{c_j}, v_{c_i} - v_{c_j} \rangle;$$

$$\langle \bar{A}' \rangle = \langle A_i \rangle + \langle A_j \rangle; \langle \bar{B}' \rangle = \langle B_i \rangle + \langle B_j \rangle; \langle \bar{C}' \rangle = \langle C_i \rangle + \langle C_j \rangle;$$

где  $\Phi_{ij}(U_i, U_j)$  – интервальное  $\Phi$ -отображение

пары объектов  $P_i(U_i)$  и  $P_j(U_j)$ , а  $\langle X_j \rangle - \langle \bar{X}_i \rangle$ ,

$\langle Y_j \rangle - \langle \bar{Y}_i \rangle$ ,  $\langle Z_j \rangle - \langle \bar{Z}_i \rangle$  – координаты интервального

направленного множества

$$U_{ij} = U_j - \bar{U}_i, U_i = (\langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle, \langle Z_i \rangle), i < j, \forall i, j \in J_n.$$

В соответствии с постановкой задачи, на основании гомеоморфизма пространств  $I_s \mathbf{R}$  [8] и  $\mathbf{R}^2$ , за интервальное целевое отображение принимаем "интервальную высоту"  $\langle H \rangle = \langle h, v_h \rangle$  занятой части интервального параллелепипеда  $P_0(U_0)$  как результат размещения в нем интервальных параллелепипедов  $P_i(U_i)$ ,  $i \in J_n$ .

$$\text{Очевидно } \langle H \rangle = \max_{j \in J_n} \rho(P_0, P_j),$$

где  $\rho(P_0, P_j)$  – интервальное расстояние [11] между интервальной гиперплоскостью вида

$\Pi_0 : f_0^6(U_0) = 0$ , интервально параллельной координатной плоскости  $\langle X \rangle O \langle Y \rangle$  и такой, которая принимает участие в формировании интервальной границы  $\mathbf{fr} P_0(U_0)$ , и интервальными гиперплоскостями  $\Pi_j : f_j^5(U_j) = 0$ ,  $j \in J_n$ , принимающими участие в формировании  $\mathbf{fr} P_i(U_i)$ .

На основе введенных выше понятий и соотношений, интервальную математическую модель оптимизационной задачи упаковки интервальных параллелепипедов  $P_i(U_i)$ ,  $i \in J_n$ , в интервальной области  $P_0(U_0)$  представим в виде:

$$\text{найти } \inf_{(U, \langle H \rangle) \in D \subset I_s^{3n+1} \mathbf{R}} \langle H \rangle \quad (8)$$

$$\text{где } D : \begin{cases} \Phi_{0i}(U_0, U_i) \geq 0, i \in J_n; \\ \Phi_{ij}(U_i, U_j) \geq 0, i \in J_n, j \in J_n, i < j, \end{cases} \quad (9)$$

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_n) \in I_s^{3n} \mathbf{R},$$

$$U_i = (\langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle, \langle Z_i \rangle) \in I_s^3 \mathbf{R}, i \in J_n,$$

а интервальные отображения  $\Phi_{0i}(U_0, U_i)$  и  $\Phi_{ij}(U_i, U_j)$  определяются выражениями (6) и (7) соответственно.

Если положить все погрешности исходных данных равными нулю, то (8)-(9) будет математической моделью идеализированной задачи упаковки параллелепипедов в параллелепипед.

Осуществим погружение интервальной математической модели (8)-(9) в евклидово пространство с помощью интервального отображения вида:

$$\psi : I_s \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \psi(\langle X \rangle) = \mathbf{H}(\langle X \rangle) = (x, v_x),$$

где  $\mathbf{H}$  – гомеоморфизм [8].

В результате получим векторную функцию цели

$$\psi(\langle H \rangle) = \mathbf{H}(\langle H \rangle) = (h, v_h)$$

и множество  $D = \mathbf{H}_{3n+1}(D) \subset \mathbf{R}^{6n+2}$ , которое, исходя из операций и отношения порядка в интервальных пространствах, можно представить в виде структуры линейных уравнений и неравенств:

$$D = \bigcap_{t=1}^6 \left( \left( \bigcap_{i=1}^n \chi_{0i}^k \right) \cap \left( \bigcap_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \chi_{ij}^k \right) \right); \quad (10)$$

$$\chi_{ij}^1 : \begin{cases} -(x_j - x_i) - (a' + v_{a_j} + v_{a_i}) > 0; \\ -(x_j - x_i) - (a' + v_{a_j} + v_{a_i}) = 0; \\ -(v_{x_j} - v_{x_i}) - (v_{a_j} + v_{a_i}) \geq 0; \end{cases} \quad (11)$$

$$\chi_{ij}^2 : \begin{cases} (x_j - x_i) - (a' + v_{a_i} + v_{a_j}) > 0; \\ (x_j - x_i) - (a' + v_{a_i} + v_{a_j}) = 0; \\ (v_{x_j} - v_{x_i}) - (v_{a_i} + v_{a_j}) \geq 0; \end{cases}$$

$$\chi_{ij}^3 : \begin{cases} -(y_j - y_i) - (b' + v_{b_j} + v_{b_i}) > 0; \\ -(y_j - y_i) - (b' + v_{b_j} + v_{b_i}) = 0; \\ -(v_{y_j} - v_{y_i}) - (v_{b_j} + v_{b_i}) \geq 0; \end{cases}$$

$$\chi_{ij}^4 : \begin{cases} (y_j - y_i) - (b' + v_{b_j} + v_{b_i}) > 0; \\ (y_j - y_i) - (b' + v_{b_j} + v_{b_i}) = 0; \\ (v_{y_j} - v_{y_i}) - (v_{b_j} + v_{b_i}) \geq 0; \end{cases}$$

$$\chi_{ij}^5 : \begin{cases} -(z_j - z_i) - (c' + v_{c_i} + v_{c_j}) > 0; \\ -(z_j - z_i) - (c' + v_{c_i} + v_{c_j}) = 0; \\ -(v_{z_j} - v_{z_i}) - (v_{c_i} + v_{c_j}) \geq 0; \end{cases}$$

$$\chi_{ij}^6 : \begin{cases} (z_j - z_i) - (c' + v_{c_i} + v_{c_j}) > 0; \\ (z_j - z_i) - (c' + v_{c_i} + v_{c_j}) = 0; \\ (v_{z_j} - v_{z_i}) - (v_{c_i} + v_{c_j}) \geq 0; \end{cases}$$

$$\chi_{0i}^1 : \begin{cases} (x_i - x_0) - a - v_{a_0} - v_{a_i} > 0; \\ (x_i - x_0) - a - v_{a_0} - v_{a_i} = 0; \\ (v_{x_i} - v_{x_0}) + v_{a_0} - v_{a_i} \geq 0; \end{cases}$$

$$\chi_{0i}^2 : \begin{cases} -(x_i - x_0) - a - v_{a_0} - v_{a_i} > 0; \\ -(x_i - x_0) + a - v_{a_0} - v_{a_i} - a_i = 0; \\ -(v_{x_i} - v_{x_0}) + v_{a_0} - v_{a_0} \geq 0; \end{cases}$$

$$\chi_{0i}^3 : \begin{cases} (y_i - y_0) - b - v_{b_0} - v_{b_i} > 0; \\ (y_i - y_0) - b - v_{b_0} - v_{b_i} = 0; \\ (v_{y_i} - v_{y_0}) + v_{b_0} - v_{b_i} \geq 0; \end{cases}$$

$$\chi_{0i}^4 : \begin{cases} -(y_i - y_0) - b - v_{b_0} - v_{b_i} > 0; \\ -(y_i - y_0) - b - v_{b_0} - v_{b_i} = 0; \\ -(v_{y_i} - v_{y_0}) + v_{b_0} - v_{b_0} \geq 0; \end{cases}$$

$$\chi_{0i}^5 : \begin{cases} (z_i - z_0) - c - v_{c_0} - v_{c_i} > 0; \\ (z_i - z_0) - c - v_{c_0} - v_{c_i} = 0; \\ (v_{z_i} - v_{z_0}) + v_{c_0} - v_{c_i} \geq 0; \end{cases}$$

$$\chi_{0i}^6 : \begin{cases} -(z_i - z_0) - c - v_{c_0} - v_{c_i} > 0; \\ -(z_i - z_0) - c - v_{c_0} - v_{c_i} = 0; \\ (v_{z_i} - v_{z_0}) + v_{c_0} - v_{c_i} \geq 0, \end{cases}$$

где  $a = a_0 - a_i$ ,  $b = b_0 - b_i$ ,  $c = c_0 - c_i$ ,  $a' = a_i + a_j$ ,  $b' = b_i + b_j$ ,  $c' = c_i + c_j$ .

Используя соотношения (10) – (11), в дальнейшем вместо задачи (8) – (9) будем рассматривать двухкритериальную оптимизационную задачу вида:

$$\inf_{(U_n, h, v_h) \in D \subset \mathbb{R}^{6n+2}} (h, v_h), \quad (12)$$

$$U_n = (x_1, v_{x_1}, y_1, v_{y_1}, z_1, v_{z_1}, x_2, v_{x_2}, \dots, x_n, v_{x_n}, y_n, v_{y_n}, z_n, v_{z_n}) \in \mathbb{R}^{6n},$$

где область  $D$  определяется выражениями (10) – (11).

Аналогично [12], рассмотрим математические модели таких однокритериальных задач:

$$h_1 = \min_{(U_n, h, v_h) \in D \subset \mathbb{R}^{6n+2}} h \quad (13)$$

$$v_h^{(1)} = \min_{(U_n, h, v_h) \in D \subset \mathbb{R}^{6n+2}} v_h; \quad (14)$$

$$h_2 = \min_{(U_n, h, v_h) \in D^* \subset \mathbb{R}^{6n+2}} h, \quad (15)$$

где  $D^* = \{(U_n, h, v_h) \in D \mid v_h = v_h^{(1)}\}$ .

Как известно [13], точка множества  $D$  тогда и только тогда является решением двухкритериальной задачи (12), когда она является единственным с точностью до эквивалентности [13] решением такой оптимизационной задачи

$$\text{найти } \min_{(U_n, h, v_h) \in D' \subset \mathbb{R}^{6n+2}} v_h, \quad (16)$$

где  $D' = \{(U_n, h, v_h) \in D \mid h \leq h'\}$ ,  $h' \in [h_1, h_2]$ .

В данном исследовании для оптимизационной задачи (16) разработана стратегия решения, которую можно представить следующим образом:

1. Решаем задачу (13):

1) генерируем последовательности объектов, которые размещаются, модифицированным методом сужающихся окрестностей [5, 14];

2) строим начальные точки методом оптимизации по группам переменных [1, 6] согласно сгенерированным последовательностям;

3) осуществляем поиск точек локального минимума методом возможных направлений (например, [14]);

2. Решаем задачу (14) аналогично (13).

3. Находим множество Парето [13] методом прямоугольников.

4. Находим решение задачи (16) методом последовательной оптимизации.

Выбираем минимальное значение векторной функции цели  $(h^*, v_{h^*})$  как приближение к глобальному минимуму задачи.

Разработано программное обеспечение “Packing interval parallelepipeds” (INTPAR), реализующее данную стратегию упаковки интервальных параллелепипедов. Проведены численные эксперименты.

Рассмотрим пример решения задачи упаковки параллелепипедов в параллелепипед с учетом погрешностей метрических характеристик данных геометрических объектов и параметров их размещения.

Дано  $n = 60$  параллелепипедов с метрическими характеристиками  $2(a_i \pm v_{a_i})$ ,  $2(b_i \pm v_{b_i})$ ,  $2(c_i \pm v_{c_i})$ . Значения  $a_i, b_i, c_i$ ,  $i \in J_{60} \cup \{0\}$ , представлены в таблице 1, а погрешности  $v_{a_i}, v_{b_i}, v_{c_i}$  принимаем равными 1% от значений соответствующих метрических характеристик, т.е.

$$v_{a_i} = 0.01 \cdot a_i, v_{b_i} = 0.01 \cdot b_i, v_{c_i} = 0.01 \cdot c_i.$$

Таблица 1

Значения  $(a_i, b_i, c_i)$

| i  | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ | i  | $a_i$ | $b_i$ | $c_i$ |
|----|-------|-------|-------|----|-------|-------|-------|
| 0  | 11.9  | 10.20 |       |    |       |       |       |
| 1  | 1.00  | 2.00  | 7.00  | 31 | 1.00  | 2.00  | 7.00  |
| 2  | 4.00  | 1.00  | 2.00  | 32 | 4.00  | 1.00  | 2.00  |
| 3  | 2.00  | 1.00  | 2.00  | 33 | 2.00  | 1.00  | 2.00  |
| 4  | 3.00  | 1.00  | 1.00  | 34 | 3.00  | 1.00  | 1.00  |
| 5  | 5.00  | 1.00  | 4.00  | 35 | 5.00  | 1.00  | 4.00  |
| 6  | 4.00  | 1.00  | 2.00  | 36 | 4.00  | 1.00  | 2.00  |
| 7  | 1.00  | 1.00  | 2.00  | 37 | 1.00  | 1.00  | 2.00  |
| 8  | 4.00  | 2.00  | 2.00  | 38 | 4.00  | 2.00  | 2.00  |
| 9  | 5.00  | 4.00  | 2.00  | 39 | 5.00  | 4.00  | 2.00  |
| 10 | 2.00  | 3.00  | 4.00  | 40 | 2.00  | 3.00  | 4.00  |
| 11 | 3.00  | 2.00  | 8.00  | 41 | 3.00  | 2.00  | 8.00  |
| 12 | 4.00  | 1.00  | 3.00  | 42 | 4.00  | 1.00  | 3.00  |
| 13 | 2.00  | 2.00  | 2.00  | 43 | 2.00  | 2.00  | 2.00  |
| 14 | 2.00  | 1.00  | 1.00  | 44 | 2.00  | 1.00  | 1.00  |
| 15 | 5.00  | 3.00  | 4.00  | 45 | 5.00  | 3.00  | 4.00  |
| 16 | 4.00  | 3.00  | 2.00  | 46 | 4.00  | 3.00  | 2.00  |
| 17 | 1.00  | 1.00  | 1.00  | 47 | 1.00  | 1.00  | 1.00  |
| 18 | 2.00  | 2.00  | 2.00  | 48 | 2.00  | 2.00  | 2.00  |
| 19 | 3.00  | 4.00  | 3.00  | 49 | 3.00  | 4.00  | 3.00  |
| 20 | 4.00  | 3.00  | 4.00  | 50 | 4.00  | 3.00  | 4.00  |
| 21 | 2.00  | 5.00  | 4.00  | 51 | 2.00  | 5.00  | 4.00  |
| 22 | 1.00  | 1.00  | 4.00  | 52 | 1.00  | 1.00  | 4.00  |
| 23 | 4.00  | 1.00  | 2.00  | 53 | 4.00  | 1.00  | 2.00  |
| 24 | 2.00  | 1.00  | 3.00  | 54 | 2.00  | 1.00  | 3.00  |
| 25 | 1.00  | 1.00  | 1.00  | 55 | 1.00  | 1.00  | 1.00  |
| 26 | 2.00  | 2.00  | 1.00  | 56 | 2.00  | 2.00  | 1.00  |
| 27 | 1.00  | 2.00  | 4.00  | 57 | 1.00  | 2.00  | 4.00  |
| 28 | 7.00  | 5.00  | 3.00  | 58 | 7.00  | 5.00  | 3.00  |
| 29 | 1.00  | 8.00  | 2.00  | 59 | 1.00  | 8.00  | 2.00  |
| 30 | 4.00  | 3.00  | 4.00  | 60 | 4.00  | 3.00  | 4.00  |

Таблица 2

Значение центров интервалов, которым принадлежат координаты векторов параметров размещения

| n  | x     | y    | z     | n  | x     | y     | z     |
|----|-------|------|-------|----|-------|-------|-------|
| 21 | 8.31  | 3.71 | 10.79 | 39 | 5.76  | 3.17  | 13.83 |
| 6  | 9.38  | 8.32 | 0.56  | 13 | 10.35 | 2.16  | 9.765 |
| 43 | 10.36 | 3.17 | 10.78 | 9  | 5.27  | 8.31  | 0.56  |
| 38 | 2.68  | 7.79 | 0.56  | 51 | 3.69  | 1.65  | 3.61  |
| 16 | 2.69  | 7.29 | 8.74  | 2  | 2.69  | 2.16  | 11.83 |
| 59 | 2.19  | 8.32 | 1.59  | 45 | 10.40 | 2.16  | 3.63  |
| 20 | 5.26  | 7.80 | 1.57  | 40 | 7.81  | 4.20  | 0.56  |
| 25 | 4.22  | 1.12 | 13.35 | 31 | 1.14  | 2.15  | 13.35 |
| 56 | 9.37  | 6.79 | 2.11  | 12 | 9.32  | 2.69  | 8.24  |
| 19 | 9.89  | 2.16 | 1.07  | 47 | 10.42 | 2.15  | 5.67  |
| 46 | 1.65  | 4.22 | 4.16  | 33 | 4.25  | 1.64  | 1.08  |
| 37 | 1.67  | 6.28 | 12.81 | 36 | 2.19  | 1.65  | 2.59  |
| 10 | 5.26  | 3.17 | 6.21  | 8  | 5.26  | 6.26  | 12.33 |
| 29 | 0.63  | 8.31 | 0.56  | 18 | 3.19  | 7.79  | 2.612 |
| 41 | 6.84  | 2.17 | 3.66  | 11 | 9.39  | 6.78  | 4.68  |
| 3  | 5.78  | 5.23 | 1.08  | 50 | 6.27  | 7.32  | 9.77  |
| 44 | 6.81  | 7.79 | 0.56  | 54 | 3.69  | 8.83  | 0.56  |
| 52 | 5.27  | 8.30 | 12.33 | 49 | 5.25  | 1.13  | 6.21  |
| 58 | 2.18  | 1.63 | 6.68  | 53 | 5.79  | 6.29  | 3.63  |
| 34 | 9.33  | 7.28 | 12.81 | 24 | 9.34  | 7.31  | 8.75  |
| 30 | 2.19  | 6.79 | 14.36 | 48 | 9.34  | 2.68  | 12.32 |
| 15 | 4.24  | 8.85 | 3.61  | 32 | 3.70  | 5.249 | 3.627 |
| 1  | 10.40 | 2.16 | 2.60  | 26 | 9.39  | 6.26  | 0.56  |
| 55 | 1.67  | 3.67 | 6.19  | 4  | 5.77  | 8.85  | 2.09  |
| 27 | 1.651 | 8.82 | 0.56  | 22 | 2.67  | 8.82  | 0.56  |
| 14 | 10.36 | 1.12 | 10.78 | 17 | 1.15  | 8.31  | 2.61  |
| 57 | 8.31  | 2.16 | 9.77  | 35 | 10.39 | 2.15  | 13.83 |
| 60 | 3.71  | 2.68 | 9.78  | 7  | 3.72  | 6.80  | 6.69  |
| 28 | 8.32  | 4.23 | 6.71  | 5  | 6.27  | 3.19  | 14.83 |
| 23 | 2.19  | 7.30 | 10.77 | 42 | 2.20  | 5.24  | 1.60  |

Пусть для параметров размещения

$$u_i \pm v_{u_i} = (x_i \pm v_{x_i}, y_i \pm v_{y_i}, z_i \pm v_{z_i}) \in R^3$$

параллелепипеда  $P_i(u_i)$ ,  $i \in J_{60} \cup \{0\}$ , справедливы

соотношения:

$$v_{x_i} = 0.01 \cdot a_i, v_{y_i} = 0.01 \cdot b_i, v_{z_i} = 0.01 \cdot c_i \quad i \in J_{60} \cup 0.$$

При решении двухкритериальной задачи высота занятой части области размещения и погрешность высоты принимают минимальные значения оптимальные значения  $h = 14.35, v_h = 0.12$  на перестановке  $\pi^* = (21 \ 6 \ 43 \ 38 \ 16 \ 59 \ 20 \ 25 \ 56 \ 19 \ 46 \ 37 \ 10 \ 29 \ 41 \ 3 \ 44 \ 52 \ 58 \ 34 \ 30 \ 15 \ 1 \ 55 \ 27 \ 14 \ 57 \ 60 \ 28 \ 23 \ 39 \ 13 \ 9 \ 51 \ 2 \ 45 \ 40 \ 31 \ 12 \ 47 \ 33 \ 36 \ 8 \ 18 \ 11 \ 50 \ 54 \ 49 \ 53 \ 24 \ 48 \ 32 \ 26 \ 4 \ 22 \ 17 \ 35 \ 7 \ 5 \ 42)$ .

Таким образом, получили интервал  $[14.23, 14.47]$ , в который с учетом погрешностей метрических характеристик и параметров размещения гарантированно попадает значение функции цели поставленной задачи.

На основе изоморфизма [8] данному решению соответствует точка

$$H^{-1}([14.23, 14.47]) = \langle 14.35, 0.24 \rangle \in I_S R.$$

Соответствующая упаковка изображена на рис. 1. При этом центры  $(x_i, y_i, z_i)$  интервалов  $(\langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle, \langle Z_i \rangle)$  полюсов параллелепипедов  $P_i, i \in J_n$ , представлены в табл. 2.

Для анализа точности полученного результата найдены нижняя и верхняя оценки значения функции цели поставленной задачи: верхняя оценка  $h^+ = 14.93$  получена как результат решения задачи упаковки параллелепипедов  $P_i^-, i \in J_n$ , в параллелепипед  $P_0^+$ , нижняя оценка  $h^- = 11.38$  – задачи упаковки параллелепипедов  $P_i^+, i \in J_n$ , в параллелепипед  $P_0^-$ , где  $P_0^+$  и  $P_0^-$ ,  $i \in J_n$ , является геометрическими объектами евклидова пространства, все метрические характеристики которых увеличены на соответствующие погрешности, а  $P_0^-$  и  $P_0^+$ ,  $i \in J_n$  – геометрические объекты с уменьшенными на погрешности метрическими характеристиками.

Для идеализированной задачи  $h_0 = 12.00$ . Результат упаковки без учета погрешностей изображен на рис. 2. Длина интервала  $2v_h = 0.48$ , в которой гарантированно попадает решение поставленной задачи, меньше длины интервала  $[h^-, h^+] = [11.38, 14.93]$ .

Таким образом, использование при моделировании задачи элементов интервального анализа позволяет получить более узкий интервал, в который гарантированно попадает решение поставленной задачи, которая предоставляет возможности за значениями и погрешностями входных данных прогнозировать значения исходные данных.

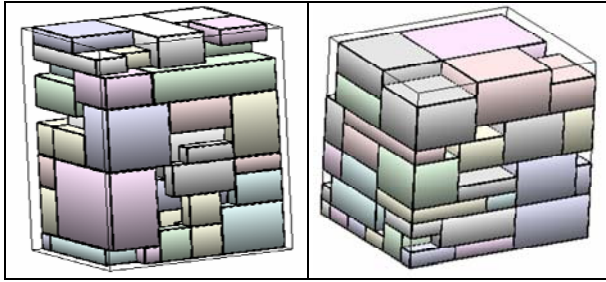


Рис. 1. Результат размещения параллелепипедов с учетом погрешностей

Рис. 2. Результат решения идеализированной задачи

### Выводы

Построена интервальная математическая модель задачи упаковки параллелепипедов в параллелепипеде с учетом погрешностей на основе применения элементов интервальной геометрии. Кроме того, данная задача рассматривается как двухкритериальная оптимизационная задача. Интервальная математическая модель задачи реализована в евклидовом пространстве. Для решения задачи предложена стратегия, основанная на комбинации таких методов оптимизации, как: метод оптимизации по группам переменных, метод сужающихся окрестностей, и метод возможных направлений.

Разработана программа упаковки параллелепипедов "Packing interval parallelepipeds" предназначенная для автоматизации решения задачи оптимального упаковывания параллелепипедов в параллелепипеде с учетом погрешностей метрических характеристик и параметров размещения может быть использована при проектировании карт трехмерного раскроя промышленных материалов, при создании малоотходных технологий, в задачах минимизации транспортных расходов, при прогнозировании результатов упаковки грузов и других задач, которые моделируются как задачи упаковки параллелепипедов с учетом погрешностей.

### Список литературы

1. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 267 с.

2. Terno J., Lindemann R., Scheithauer G. Cutting Problems and Their Practical Solution. – Verlag Harri Deutsch, Thun and Frankfurt/Main (in German). – 1987. – 288 p.

3. Fekete Sandor P., Guhrer A. Neumann, Ulla; van der Veen, Jan C. Packing a trunk – repeatedly // 3<sup>rd</sup> ESICUP Meeting Euro.Special.Interest. Portugal, March. 16/18. 2006.

4. Moura, Ana; Oliveira, Hose Fernando. A heuristic approach to container loading problem with load bearing strength considerations // 3<sup>rd</sup> ESICUP Meeting Euro. Special. Interest. Portugal, March. 16/18. 2006.

5. Стоян Ю.Г., Соколовский В.З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. – К.: Наук. думка, 1980. – 208 с.

6. Стоян Ю.Г., Пономаренко Л.Д., Панкратов А.В., Лойко А.Ф. Программная система КТС автоматической компоновки бокса сложной технической системы блочной конструкции / НАН Украины. ИПМаш; 264. – X.: 1987. – 37 с.

7. Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space  $IR$  // Comp.Suppl. – 1980. – P.33-49.

8. Стоян Ю. Г. Введення в інтервальну геометрію: Навчальний посібник. – X.: ХНУРЕ, 2006. – 98 с.

9. Евсеева Л.Г., Романова Т.Е., Шеховцов С.Б. Интервальные направленные множества в многомерных интервальных пространствах // Искусственный интеллект. – 2005. – № 4. – С.169-176.

10. Stoyan Yu. G.  $\Phi$ -function and its basic properties // Докл. АН Украины. Сер. А. – 2001. – № 8. – С. 112-117.

11. Евсеева Л.Г. Интервальная метрика на  $n$ -мерном множестве centered интервалов // АСУ и приборы автоматики. – 2006. – Вып. 136. – С. 50-56.

12. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Сысоева Ю.Г. Оптимизационная задача размещения правильных интервальных многоугольников // Доп. НАН України. – 1998. – No. 9. – С. 114-120.

13. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

14. Чугай А.М. Решение задачи упаковки кругов в выпуклый многоугольник с помощью модифицированного метода сужающихся окрестностей // Радиоэлектроника и информатика. – 2005. – № 1. – С.58-63.

Поступила в редколлегию 27.11.2007

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Т.Е. Романова, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков.