УДК 519.21

С.В. Гадецкая, В.Ю. Дубницкий

Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ, Харьков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУСТОРОННЕ УСЕЧЕННОГО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО И ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Введено понятие двусторонне усеченных вероятностных распределений, используемое при постановке задач, связанных с определением надежности систем, вычислением величины убытков, вызванных техногенными катастрофами и вычислением рисков финансовых операций. Поставлена и обоснована задача определения числовых характеристик двусторонне усеченных распределений, приведен общий метод ее решения. Определены математическое ожидание и дисперсия двусторонне усеченного экспоненциального распределения, математическое ожидание двусторонне усеченного гамма-распределения и распределения Вейбулла.

показательное распределение, гамма-распределение, распределение Вейбулла, усеченное распределение, усеченное показательное распределение, усеченное гамма-распределение, усеченное распределение Вейбулла

Введение

Во многих задачах, связанных с определением надежности систем, вычислением величины убытков, вызванных техногенными катастрофами и вычислением рисков финансовых операций возникает следующая задача.

Пусть на отрезке (A, B), возможно бесконечном, заданы функция распределения F(x) и плотность распределения f(x) случайной величины X. Примем, что двусторонне усеченное на интервале $A \le u \le w \le B$ распределение задано условием

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin (u, w); \\ CF(x), & \text{если} \quad x \in (u, w). \end{cases} \tag{1}$$

Плотность распределения в этом случае:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin (u, w); \\ cf(x), & \text{если} \quad x \in (u, w). \end{cases} \tag{2}$$

При этом

$$A \le u \le x \le w \le B . \tag{3}$$

Требуется при известном интервале (u, w) и заданных функциях F(x) и f(x) найти функции G(x), f(x), математическое ожидание $M[x_{u,w}]$ и дисперсию $D[x_{u,w}]$.

Анализ литературы. В работе [1], вышедшей в свет на языке оригинала в 1952 г., была поставлена и решена задача определения функций распределения и плотности случайной величины (СВ) X при условии нормальности исходного распределения и интервала усечения $x_0 \le x < \infty$.

В работе [2], опубликованной в 1962 г., но выполненной примерно в одно время с работой [1], приведена общая теория решения поставленной задачи.

В работе [3] дано подробное решение задачи определения числовых характеристик усеченного нормального распределения при условии, что интервал усечения имеет вид $0 \le x < \infty$.

В справочнике [4] приведен результат решения поставленной задачи для интервала усечения $-\infty < u \le x \le w < \infty$.

Следуя работе [2] изложим основные этапы решения поставленной задачи.

Нормирующий множитель C, присутствующий в равенствах (1) и (2), находят из выражения

$$C = \int_u^w f(x)dx = 1 \tag{4}$$

или

$$C = [F(w) - F(u)]^{-1} . \tag{5}$$

Функция усеченного распределения

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [u, w]; \\ C\int_u^x f(x)dx = C[F(x) - F(u)], & \text{если } x \in [u, w]. \end{cases} \tag{6}$$

Математическое ожидание определяют по формуле

$$M[X_{u,w}] = C\int_u^w xf(x)dx , \tag{7}$$

второй начальный момент

$$\alpha^2_{u,w} = C\int_u^w x^2 f(x)dx . \tag{8}$$

В этом случае дисперсия

$$D[X_{u,w}] = \alpha^2_{(u,w)} - \left(M[X_{u,w}]\right)^2 . \tag{9}$$

В частности, для исходного нормального распределения в случае его двустороннего усечения в работе [4] получены следующие результаты.

Функция распределения

$$G(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\notin[u,w];\\ CF\left[\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma_1}\right)-F\left(\dfrac{u-\mu}{\sigma_1}\right)\right], & \text{если } x\in[u,w].\end{cases} \quad (10)$$

Плотность распределения

$$g(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\notin[u,w];\\ \dfrac{C}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma_1^2}\right], & \text{если } x\in[u,w].\end{cases} \quad (11)$$

Нормирующий множитель

$$C=\left[F\left(\frac{w-\mu}{\sigma_1}\right)-F\left(\frac{v-\mu}{\sigma_1}\right)\right]^{-1}. \quad (12)$$

В выражениях (10)…(12) принято, что F(x), f(x) – соответственно функции распределения и плотности нормального распределения; μ, σ_1 – параметры исходного распределения.

Для усеченного на интервале [u, w] нормального распределения показано, что:

$$M[X_{u,w}]=\mu+A\sigma_1; \quad (13)$$

$$D[X_{u,w}]=\sigma_1^2\left(1-A^2-C\big((w-\mu)g(w)-(u-\mu)g(u)\big)\right); \quad (14)$$

при этом

$$A=C\left\{\exp\left[-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma_1^2}\right]-\exp\left[-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma_1^2}\right]\right\}. \quad (15)$$

Постановка задачи. Определить на интервале усечения $0<u\le x\le w<\infty$ функцию распределения, плотность распределения, математическое ожидание для показательного распределения, гамма-распределения и распределения Вейбулла.

Изложение результатов

Рассмотрим получение перечисленных выше выражений для показательного распределения. Функция показательного распределения, как известно, имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{если} \quad 0\le x<\infty.\end{cases} \quad (16)$$

Далее, если это не будет вызывать недоразумений, будем в целях экономии места рассматривать только ту область значений, где соответствующие функции отличны от нуля.

Плотность показательного распределения

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}, \quad x\ge 0. \quad (17)$$

Пусть интервал усечения $0<u\le x\le w<\infty$.

В соответствии с условием (4) для нормирующего множителя получим, что:

$$C=[F(w)-F(u)]^{-1}=[(1-e^{-\lambda w})-(1-e^{-\lambda u})]^{-1}=\frac{e^{\lambda(u+w)}}{e^{w\lambda}-e^{u\lambda}}. \quad (18)$$

Тогда, согласно (6), плотность усеченного на $[u,w]$ показательного распределения примет вид:

$$G(x)=C[F(w)-F(u)]=\frac{e^{\lambda(u+w)}}{e^{w\lambda}-e^{u\lambda}}\left[(1-e^{-\lambda x})-(1-e^{-\lambda u})\right]=\frac{e^{\lambda(w-x)}(e^{\lambda x}-e^{u\lambda})}{e^{w\lambda}-e^{u\lambda}}. \quad (19)$$

Согласно (7) математическое ожидание усеченного на интервале $[u,w]$ показательного распределения будет

$$M[X_{u,w}]=C\int_u^w xf(x)dx=\frac{e^{\lambda(u+w)}}{e^{w\lambda}-e^{u\lambda}}\int_u^w x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{e^{u\lambda}(w\lambda+1)-e^{w\lambda}(u\lambda+1)}{x\left(e^{u\lambda}-e^{w\lambda}\right)}. \quad (20)$$

Второй начальный момент

$$\alpha_{2(u,w)}=C\int_u^w x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{e^{u\lambda}(w^2\lambda^2+2w\lambda+2)-e^{w\lambda}(u^2\lambda^2+2u\lambda+2)}{\lambda^2\left(e^{u\lambda}-e^{w\lambda}\right)}. \quad (21)$$

Дисперсия такого распределения

$$D[X_{u,w}]=\alpha_{2(u,\mu)}-\left(M[X_{u,w}]\right)^2=\frac{e^{2u}-e^{u\lambda+w\lambda}(u^2\lambda^2-2uw\lambda^2+w^2\lambda^2+2)+e^{2u\lambda}}{\lambda^2\left(e^{u\lambda}-e^{w\lambda}\right)^2}. \quad (22)$$

Рассмотрим далее получение приведенных в выражениях (6)…(9) характеристик для усеченного на интервале $[u,w]$ гамма-распределения. Для упрощения дальнейшего изложения приведем некоторые, нужные в дальнейшем, свойства гамма-функции [3, 6].

Гамма-функцией называют интеграл вида:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx. \quad (23)$$

Для него справедливо равенство [7, С. 322]:

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx. \quad (24)$$

Неполной гамма-функцией называют выражение вида [8]:

$$\gamma(\alpha,x)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx. \quad (25)$$

Дополнительной неполной гамма-функцией называют выражение вида [8]:

$$\Gamma(\alpha,x)=\int_x^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx. \quad (26)$$

Из (23), (25), (26) следует, что

$$\Gamma(\alpha)=\gamma(\alpha,x)+\Gamma(\alpha,x). \quad (27)$$

В [7, С. 137] показано, что

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda^{\alpha}}\gamma(\alpha,\lambda x). \quad (28)$$

Как известно [3, 4, 5], плотность гамма-распределения имеет вид

$$f(x)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, \quad x>0. \quad (29)$$

Функция гамма-распределения, с учетом (25), (28) примет вид:

$$F(x)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\gamma(\alpha,\lambda x)}{\Gamma(\alpha)}, \ x>0. \quad (30)$$

Тогда, в соответствии с (5), нормирующий множитель

$$C=[F(w)-F(u)]^{-1}=\frac{\Gamma(\alpha)}{\gamma(\alpha,\lambda w)-\gamma(\alpha,\lambda u)}. \quad (31)$$

В этом случае функция усеченного на $[u,w]$ гамма-распределения в соответствии с (6) примет вид:

$$C[F(x)-F(u)]=\frac{\gamma(\alpha,\lambda x)-\gamma(\alpha,\lambda u)}{\gamma(\alpha,\lambda w)-\gamma(\alpha,\lambda u)}. \quad (32)$$

Плотность $g(x)$ усеченного на $[u,w]$ гамма-распределения с учетом (2), (29) и (32) составит:

$$g(x)=Cf(x)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\gamma(\alpha,\lambda w)-\gamma(\alpha,\lambda u)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, \ x>0.$$

Математическое ожидание

$$M[X_{u,w}]=\int_u^w \frac{\lambda^{\alpha}}{\gamma(\alpha,\lambda w)-\gamma(\alpha,\lambda u)}x\cdot x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx. \quad (33)$$

Пусть

$$R=\frac{\lambda^{\alpha}}{\gamma(\alpha,\lambda w)-\gamma(\alpha,\lambda u)}. \quad (34)$$

Тогда

$$M[X_{u,w}]=R\int_u^w x^{\alpha}e^{-\lambda x}dx. \quad (35)$$

Очевидно, что

$$\int_u^w x^{\alpha}e^{-\lambda x}dx=\int_0^w x^{\alpha}e^{-\lambda x}dx-\int_0^u x^{\alpha}e^{-\lambda x}dx. \quad (36)$$

Рассмотрим более подробно интеграл вида

$$I=\int_0^b x^{\alpha}e^{-\lambda x}dx.$$

Из [7, 1.3.2.1, С. 137] следует, что

$$I=\frac{\alpha}{\lambda}\int_0^b x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx-\frac{b^{\alpha}e^{-\lambda b}}{\lambda}. \quad (37)$$

В свою очередь [7, 1.2.2.3, С. 137]:

$$\int_0^b x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda^{\alpha}}\gamma(\alpha,\lambda x). \quad (38)$$

Подставив выражение (38) в (37), получим

$$I=\frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+1}}\gamma(\alpha,\lambda b)-\frac{b^{\alpha}e^{-\lambda b}}{\lambda}. \quad (39)$$

Иными словами, показано, что

$$\gamma(\alpha+1,\lambda x)=\frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+1}}\gamma(\alpha,\lambda x)-\frac{x^{\alpha}e^{-\lambda x}}{\lambda}, \quad (40)$$

при λ=1 условие (40) совпадает с выражением, приведенным в [8, С. 139]. Используя выражения (34), (35), (39), (40) получим, что

$$M[X_{u,w}]= \\ =\frac{\lambda^{\alpha}}{\gamma(\alpha,\lambda w)-\gamma(\alpha,\lambda u)}\cdot\left(\gamma(\alpha+1,\lambda b)-\gamma(\alpha+1,\lambda u)\right). \quad (41)$$

Используя условие (40), можно получить выражение для

$$\alpha_2=C\int_u^w x^{\alpha+1}e^{-\lambda x}dx, \quad (42)$$

а следовательно, и дисперсии для двусторонне усеченного гамма-распределения. С целью сохранения изложения рассмотрим выражение вида

$$\alpha_2=R\int_u^w x^2x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx \quad (43)$$

или

$$\alpha_2=R[\gamma(\alpha+2,\lambda w)-\gamma(\alpha+2,\lambda u)]. \quad (44)$$

Рассмотрим интеграл вида

$$I=\int_0^b x^{\alpha+1}e^{-\lambda x}dx=\gamma(\alpha+2,\lambda b). \quad (45)$$

Используя выражение (40) в качестве рекуррентного, получим, что

$$\gamma(\alpha+2,\lambda b)= \\ =\frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+2}}\gamma(\alpha+1,\lambda b)-\frac{b^{\alpha+1}e^{-\lambda b}}{\lambda}= \\ =\frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+2}}\left[\frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+1}}\gamma(\alpha,\lambda b)-\frac{b^{\alpha}e^{-\lambda b}}{\lambda}\right]-\frac{b^{\alpha+1}e^{-\lambda b}}{\lambda}= \\ =\frac{\alpha^2}{\lambda^{2\alpha+3}}\gamma(\alpha,\lambda b)-\frac{\alpha b^{\alpha}e^{-\lambda b}}{\lambda^{\alpha+3}}-\frac{b^{\alpha+1}e^{-\lambda b}}{\lambda}. \quad (46)$$

Подставляя в (46) вместо верхнего предела интегрирования величины w, u, и используя уравнения (44), (41), (9), получим выражение для дисперсии усеченного на $[u,w]$ гамма-распределения.

Полученные результаты можно также использовать для получения аналогичных характеристик распределения Вейбулла. Вследствие громоздкости полученных выражений приведен способ их получения в сокращенном виде.

Пусть функция распределения Вейбулла имеет вид, приведенный в [3]:

$$F(x)=1-\exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right), \ x\ge 0. \quad (47)$$

Тогда плотность этого распределения:

$$f(x)=\left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right). \qquad (48)$$

Нормирующий множитель

$$C=[F(w)-F(u)]^{-1}=\frac{\exp\left(\left(\frac{u}{\theta}\right)^{\beta}+\left(\frac{w}{\theta}\right)^{\beta}\right)}{\exp\left(\left(\frac{w}{\theta}\right)^{\beta}\right)-\exp\left(\left(\frac{u}{\theta}\right)^{\beta}\right)}. \qquad (49)$$

Математическое ожидание в этом случае будет равно

$$M[X_{u,w}]=C\int_{u}^{w}x\left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1}\exp\left(\left(-\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right)dx. \qquad (50)$$

Следуя работе [3], можно показать, что при замене переменной $\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}=z$, $dx=\frac{\theta}{\beta}z^{\frac{1}{\beta}-1}dz$ можно получить, что

$$M[X_{u,w}]=C\theta\int_{\left(\frac{u}{\theta}\right)^{\beta}}^{\left(\frac{w}{\theta}\right)^{\beta}}z^{\frac{1}{\beta}}e^{-z}dz. \qquad (51)$$

Приняв, что

$$\frac{1}{\beta}=\alpha,\ \left(\frac{u}{\theta}\right)^{\beta}=g,\ \left(\frac{w}{\theta}\right)^{\beta}=q$$

получим, что

$$M[X_{u,w}]= =C\theta\left(\int_{0}^{q}z^{\alpha}e^{-z}dz-\int_{0}^{g}z^{\alpha}e^{-z}dz\right)= \qquad (52)$$

$$=C\theta\left(\gamma(\alpha+1,q)-\gamma(\alpha+1,g)\right).$$

Выводы

1. Поставлена и обоснована задача определения числовых характеристик двусторонне усеченных распределений.

2. Определены математическое ожидание и дисперсия двусторонне усеченного экспоненциального распределения, математическое ожидание двусторонне усеченного гамма-распределения и распределения Вейбулла.

Список литературы

1. Хольд А. Математическая статистика с техническими приложениями. – М.: Иностр. лит., 1956. – 595 с.

2. Шор Я.Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. – М.: Сов. радио, 1962. – 527 с.

3. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. Ч.1. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.

4. Случайные сигналы в задачах оценки состояния технических систем / Е.С. Переверзев, Ю.Ф. Даниев и др. – К.: Наук. думка, 1992. – 252 с.

5. Хастингс Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям. – М.: Статистика, 1980. – 94 с.

6. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука-ФМЛ, 1973. – 296 с.

7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука-ФМЛ, 1981. – 800 с.

8. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука-ФМЛ, 1974. – 296 с.

Поступила в редколлегию 3.01.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Кононенко, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

ВИЗНАЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВОСТОРОННЬО УСІЧЕНОГО ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО І ГАММА-РОЗПОДІЛУ

Гадецька С.В., Дубницький В.Ю.

Введено поняття двосторонньо усічених імовірнісних розподілів, яке використовується при постановці завдань, пов'язаних з визначенням надійності систем, обчисленням величини збитків, викликаних техногенними катастрофами і обчисленням ризиків фінансових операцій. Поставлена і обґрунтована задача визначення числових характеристик двосторонньо усічених розподілів, наведений загальний метод її рішення. Визначено математичне очікування і дисперсію двосторонньо усіченого експоненціального розподілу, математичне сподівання двосторонньо усіченого гамма-розподілу і розподілу Вейбулла.

Ключові слова: *показовий розподіл, гамма-розподіл, розподіл Вейбулла, усічений розподіл, усічений показовий розподіл, усічений гамма-розподіл, усічений розподіл Вейбулла.*

DETERMINATION OF NUMERICAL DESCRIPTIONS BILATERALLY TRUNCATED EXPONENTIAL AND A GAMMA DENSITY

Gadetskaya S.V., Dubnitsky V.Ju.

The concept of the bilaterally truncated probabilistic distributing is entered, used is entered at statement of the problems connected to definition of reliability of systems, by calculation of size of the losses caused man-caused by accidents and calculation of risks of financial operations. Put and grounded task of determination of numerical descriptions of the bilaterally truncated distributing, the general method of its decision is resulted. The expected value and dispersion of the bilaterally truncated exponential distributing is certain, expected value bilaterally truncated gamma density and distributing of Weibull.

Keywords: *indicative distribution, gamma density, distributing of Weibull, truncated distributing, truncated indicative distribution, truncated gamma density, truncated distributing of Weibull.*