УДК 519.2

Т.В. Редькина[1], А.И. Карюк[1], Г.А. Лушникова[2]

[1]*Ставропольский государственный университет*
[2]*Филиал ГОУ ВПО «Московский государственный университет приборостроения и информатики», Ставрополь*

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ИМЕЮЩИЕ ОПЕРАТОРНУЮ СТРУКТУРУ ИЗОСПЕКТРАЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В статье продемонстрировано построение нелинейных уравнений имеющих в качестве операторов рассеяния L: оператор Дирака, оператор первого порядка с матричными коэффициентами 2×2 и 3×3. Получена новая система нелинейных уравнений в частных производных, имеющая уравнение на собственное значение с оператором Дирака. Получены 1+1 и 2+1-мерные уравнения, обладающие общей задачей на собственные значения и различными операторами A. Найдено нелинейное уравнение в частных производных с оператором рассеяния третьего порядка. Для рассмотренных в статье уравнений найдены точные решения специального вида.

нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, солитонные уравнения

Введение

Совокупность нелинейных уравнений, представляется чрезвычайно обширной для того, чтобы можно было бы надеяться найти общие методы для построения решений этих уравнений и исследования их свойств. Поэтому наибольший интерес с практической точки зрения представляют точно интегрируемые уравнения или уравнения, допускающие богатые классы точных решений. Число таких примеров заметно увеличилось в XX веке и особенно в последней его половине, во многом благодаря развитию новых математических методов анализа нелинейных систем уравнений в частных производных, и в частности, такому важному и замечательному открытию математической физики как теория солитонов и метод обратной задачи рассеяния.

С момента создания теории солитонов, при построении нелинейных уравнений в частных производных, часто используется операторная структура изоспектральной деформации

$$L_t = \left[L, A\right] = LA - AL \quad \text{или} \quad L_t - A_x + [L, A] = 0,$$

где L, A – линейные операторы.

В статье продемонстрировано построение нелинейных уравнений имеющих в качестве операторов рассеяния L: оператор Дирака (I), оператор первого порядка с матричными коэффициентами 2×2 и 3×3 (II).

Большинство известных солитонных уравнений описывает поведение функций, зависящих от двух пространственно – временных переменных. Попытка распространить солитонную теорию на 2+1, 3+1-мерную ситуацию привела к некоторым успехам [1].

Интересные результаты можно получить если оператор L параметрически зависит от дополнительных переменных, дифференцирование по которым входит в оператор A, но не входят в оператор L. Такая возможность использована в работе получены и исследованы два уравнения 1+1 и 2+1-мерное, обладающие одной и той же задачей на собственные значения, но имеющие различные операторы *A* (II).

I. Коммутационное представление в виде уравнения нулевой кривизны

Рассмотрим операторное уравнение нулевой кривизны

$$L_t - A_x + [L, A] = 0, \qquad (1.1)$$

являющееся условием совместности системы уравнений $\varphi_x = L\varphi$, $\varphi_t = A\varphi$. В качестве первого равенства рассмотрим соотношение

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} \lambda & p_1 \\ p_2 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \qquad (1.2)$$

где λ – произвольный параметр не зависящий от x, t; $p_j(x,t)$ – некоторые функции, j = 1, 2. Пусть A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} U & V \\ W & -U \end{pmatrix}, \qquad (1.3)$$

тогда (1.1) перепишется в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} U_x &= p_1 W - p_2 V; \\ p_{1t} - V_x + 2\lambda V - 2p_1 U &= 0; \qquad (1.4) \\ p_{2t} - W_x - 2\lambda W + 2p_2 U &= 0. \end{aligned}$$

Второе и третье равенства содержат параметр λ, для того чтобы полученные уравнения не содержали произвольных параметров, представим V, W, U в виде многочлена разложенного по возрастающим степеням λ, начиная с λ^{-1}

$$V = \frac{1}{\lambda} v_0(x,t) + \sum_{j=0}^{n} \lambda^j v_{j+1}(x,t);$$

$$W=\frac{1}{\lambda}w_0(x,t)+\sum_{j=0}^{n}\lambda^j w_{j+1}(x,t);$$

$$U=\frac{1}{\lambda}u_0(x,t)+\sum_{j=0}^{n}\lambda^j u_{j+1}(x,t). \qquad (1.5)$$

Выполним подстановку в систему (1.4) и распишем систему по степеням параметра λ:

$$\lambda^{-1}: \quad \begin{cases} u_{0x}=p_1w_0-p_2v_0; \\ v_{0x}+2p_1u_0=0; \\ w_{0x}+2p_2u_0=0; \end{cases} \qquad (1.6)$$

$$\lambda^{0}: \quad \begin{cases} u_{1x}=p_1w_1-p_2v_1; \\ p_{1t}-v_{1x}+2v_0-2p_1u_1=0; \\ p_{2t}-w_{1x}-2w_0+2p_2u_1=0; \end{cases} \qquad (1.7)$$

…

$$\lambda^{j}: \quad \begin{cases} u_{(j+1)x}=p_1w_{j+1}-p_2v_{j+1}; \\ v_{(j+1)x}-2v_j+2p_1u_{j+1}=0; \\ w_{(j+1)x}+2w_j-2p_2u_{j+1}=0; \end{cases} \qquad (1.8)$$

…

$$\lambda^{n+1}: \quad \begin{cases} v_{n+1}=0; \\ w_{n+1}=0. \end{cases} \qquad (1.9)$$

А. Рассмотрим частный случай, когда в разложении (1.5) присутствует одно слагаемое и

$$V=\frac{1}{\lambda}v_0(x,t),\ W=\frac{1}{\lambda}w_0(x,t),\ U=\frac{1}{\lambda}u_0(x,t),$$

при этом система (1.6) – (1.9) сводится к пяти уравнениям, из которых определяются

$$v_0=-\frac{1}{2}p_{1t};\ \ w_0=\frac{1}{2}p_{2t};\ \ u_0=\frac{1}{8}\left(\frac{p_{1xt}}{p_1}-\frac{p_{2xt}}{p_2}\right)$$

и система двух уравнений, связывающих функции $p_j(x,t)$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_{1xt}}{p_1}\right)_x=(p_1p_2)_t; \qquad (1.10)$$
$$p_1p_{2xt}+p_2p_{1xt}=0.$$

Легко заметить, что полученная система инвариантна относительно преобразования $x\to -x$. Если положить, что $p_1=f(x,t)$, а $p_2=f(-x,t)$, $p_{1x}=f_x(x,t)$, $p_{2x}=-f_x(-x,t)$, то система (1.10) примет вид

$$\left(\frac{f_{xt}(x,t)}{f(x,t)}\right)_x=2\big[f(-x,t)f(x,t)\big]_t; \qquad (1.11)$$
$$f_{xt}(-x,t)f(x,t)=f_{xt}(x,t)f(-x,t).$$

В результате проведенных исследований доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Система уравнений* (1.11) *имеет операторное представление в виде уравнения нулевой кривизны* $L_t-A_x+[L,A]=0$ *с операторами* L *и* A *в виде*

$$L=\begin{pmatrix}\lambda & f(x,t)\\ f(-x,t) & -\lambda\end{pmatrix},$$

$$A=\frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix}U & -f_t(x,t)\\ f_t(-x,t) & -U\end{pmatrix},\ \ \textit{где}\ \ U=\frac{f_{xt}(x,t)}{2f(x,t)}.$$

Б. Пусть в разложениях V, W (1.5) имеют вид

$$V=\frac{1}{\lambda}v_0(x,t);\quad W=\frac{1}{\lambda}w_0(x,t);$$

а $U=\frac{1}{\lambda}u_0(x,t)+k$, где k – функция только переменной *t* или параметр, при этом из системы (1.6) – (1.9) определяются

$$v_0=kp_1-\frac{1}{2}p_{1t};\quad w_0=\frac{1}{2}p_{2t}+kp_2;$$
$$u_0=(\ln p_1)_x\left(\frac{1}{4}(\ln p_{1x})_t-\frac{k}{2}\right),$$

оставшиеся равенства примут вид уравнений, связывающих функции $p_j(x,t)$:

$$\left(\frac{p_{1xt}}{2p_1}-k\frac{p_{1x}}{p_1}\right)_x=(p_1p_2)_t; \qquad (1.12)$$
$$p_1p_{2xt}+p_2p_{1xt}+2k(p_1p_{2x}-p_2p_{1x})=0.$$

Доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Система уравнений* (1.12) *имеет операторное представление в виде уравнения нулевой кривизны* $L_t-A_x+[L,A]=0$ *с операторами* L *и* A *в виде*

$$L=\begin{pmatrix}\lambda & p_1(x,t)\\ p_2(x,t) & -\lambda\end{pmatrix};$$

$$A=\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}(\ln p_1)_x\left(\frac{1}{4}(\ln p_{1x})_t-\frac{k}{2}\right) & kp_1-\frac{1}{2}p_{1t}\\ \frac{1}{2}p_{2t}+kp_2 & -(\ln p_1)_x\left(\frac{1}{4}(\ln p_{1x})_t-\frac{k}{2}\right)\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & -k\end{pmatrix}.$$

В. Боле общий случай, когда в разложении (1.5) V, W имеет вид

$$V=\frac{1}{\lambda}v_0(x,t)+v_1(x,t);\ W=\frac{1}{\lambda}w_0(x,t)+w_1(x,t),$$

а $U=\frac{1}{\lambda}u_0(x,t)+u_1(x,t)+k(t)\lambda$, где k – произвольная функция переменной t, при этом (1.6) – (1.9) сводится к системе

$$\begin{aligned} &u_{0x}=p_1w_0-p_2v_0; \quad u_{1x}=p_1w_1-p_2v_1;\\ &v_{0x}+2p_1u_0=0; \quad w_{0x}+2p_2u_0=0;\\ &-v_1+kp_1=0; \quad w_1-kp_2=0; \\ &p_{1t}-v_{1x}+2v_0-2p_1u_1=0;\\ &p_{2t}-w_{1x}-2w_0+2p_2u_1=0.\end{aligned} \qquad (1.13)$$

Функции v_0, w_0, u_0, v_1, w_1, u_1 определяются как:

$$u_1=\psi(t);\quad v_0=\psi p_1-\frac{1}{2}p_{1t}+\frac{k}{2}p_{1x};$$

$$w_0=\frac{1}{2}p_{2t}-\frac{k}{2}p_{2x}+\psi p_2;\ \ v_1=kp_1;\ \ w_1=kp_2$$

$$u_0 = (\ln p_1)_x \left(\frac{1}{4}(\ln p_{1x})_t - \frac{k}{4}(\ln p_{1x})_x - \frac{\psi}{2} \right). \quad (1.14)$$

а система, связывает только функции p_1, p_2:

$$\left[(\ln p_1)_x \left(\frac{1}{2}(\ln p_{1x})_z - \psi \right) \right]_x = (p_1 p_2)_z,$$
$$p_2 \left(\psi p_{1x} - \frac{1}{2} p_{1xz} \right) - p_1 \left(\psi p_{2x} + \frac{1}{2} p_{2xz} \right) = 0, \quad (1.15)$$

где для компактности записи введено обозначение $\frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}$.

ТЕОРЕМА 3. *Система* (1.15) *имеет операторное представление в виде уравнения нулевой кривизны* $L_t - A_x + [L, A] = 0$ *с операторами* L *и* A *в виде*

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & p_1(x,t) \\ p_2(x,t) & -\lambda \end{pmatrix};$$

$$A = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} (\ln p_1)_x \left(\frac{1}{4}(\ln p_{1x})_z - \frac{\psi(t)}{2} \right) & \psi(t) p_1 - \frac{1}{2} p_{1z} \\ \frac{1}{2} p_{2z} + \psi(t) p_2 & -(\ln p_1)_x \left(\frac{1}{4}(\ln p_{1x})_z - \frac{\psi(t)}{2} \right) \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} \psi(t) & k(t) p_1 \\ k(t) p_2 & -\psi(t) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} k(t) & 0 \\ 0 & -k(t) \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x}.$$

Система (1.15) при замене $z \to t$, $\psi \to k$ эквивалентна системе (1.12).

II. Коммутационное представление в виде уравнения Лакса

Распространим теорию построения солитонных уравнений на 2+1-мерную ситуацию. Рассмотрим класс функций, зависящих от трех переменных, а оператор L задает дифференцирование только по переменной x. Продемонстрируем возможность построения двух уравнений обладающих одной и той же задачей на собственные значения. Будем рассматривать операторы L и A, параметрически зависящие от *t*, и образующие пару Лакса

$$L_t = [L, A], \quad (2.1)$$

при этом коммутатор $[L, A] = LA - AL$ и производная $\frac{\partial L}{\partial t}$ являются операторами умножения на некоторые функции. Уравнение Лакса является условием совместности пары линейных уравнений

$$L\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi_t = -A\varphi, \quad (2.2)$$

где λ – произвольный параметр; φ – функция независимых переменных x, t.

ТЕОРЕМА 1. *Уравнение*

$$v_x = \frac{\beta}{2\alpha k}(\ln u)_{tx} + \frac{a}{2\alpha^2}\left[u_t + (\alpha k + \beta) u_x \right] + \left(\beta + \frac{\beta^2}{2\alpha k} \right)(\ln u)_{xx}$$

обладает парой Лакса с операторами L *и* A *вида*

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ a & -\alpha \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2k}(\ln u)_x & u \\ \frac{a}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha k} + 1 \right)(\ln u)_x + \left(\frac{a}{2\alpha} \right)^2 u & -\left(\alpha + \frac{\beta}{2k} \right)(\ln u)_x \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha k + \beta & 0 \\ ak & \beta \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} v & ku \\ k\left(\frac{a}{2\alpha} \right)^2 u - \frac{a}{2\alpha}(\ln u)_t & v + (\ln u)_t \end{pmatrix},$$

где $v(x,t)$ *– произвольная функция.*

Доказательство. Рассмотрим частный случай, когда операторное уравнения Лакса (2.1) с маточными коэффициентами 2×2

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix},$$

удовлетворяет дополнительным условиям

$$\alpha_{11} = -\alpha_{22} = \alpha; \quad \alpha_{12} = 0; \quad \alpha_{21} = a \neq 0;$$
$$\beta_{12} = 0; \quad \frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} = k; \quad 2\alpha_{11} k = \beta_{11} - \beta_{22}; \quad (2.3)$$
$$\beta_{22} = \beta; \quad v_{12} = k u_{12};$$
$$v_{21} = k u_{21} + \frac{a}{2\alpha}\left(v_{11} - v_{22} + k\left(u_{22} - u_{11} \right) \right),$$

где k – коэффициент пропорциональности. Учитывая ограничения, получим операторы:

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ a & -\alpha \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha k + \beta & 0 \\ ak & \beta \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} v_{11} & k u_{12} \\ k u_{21} + \frac{a}{2\alpha}\left(v_{11} - v_{22} + k\left(u_{22} - u_{11} \right) \right) & v_{22} \end{pmatrix}.$$

Выведем уравнение в частных производных, эквивалентное операторному уравнению Лакса. Для этого предварительно найдем элементы матричного уравнения $L_t = [L, A]$, используя обозначение $(\alpha k + \beta)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}$ и принимая условие $u_{12} \neq 0$:

$$\alpha(v_{11} - k u_{11})_x + \frac{a}{2\alpha} u_{12}(v_{11} - k u_{11} - v_{22} + k u_{22}) = u_{11z}; \quad (2.4)$$

$$k(u_{11} - u_{22}) - v_{11} + v_{22} = (\alpha k + \beta)(\ln u_{12})_x + (\ln u_{12})_t; \quad (2.5)$$

$$\frac{a}{2}(v_{11} - k(u_{11} + u_{22}) + v_{22})_x + \left(u_{21} + \frac{a}{2\alpha}(u_{22} - u_{11}) \right)(v_{11} - k(u_{11} - u_{22}) - v_{22}) = u_{21z}; \quad (2.6)$$

$$\alpha(v_{22} - k u_{22})_x + \frac{a}{2\alpha} u_{12}(v_{11} - k u_{11} - v_{22} + k u_{22}) = -u_{22z}. \quad (2.7)$$

С учетом равенства (2.5) определим дополнительные условия так чтобы

$$v_{22}=v_{11}+(\ln u_{12})_t\,; \qquad (2.8)$$

$$u_{11}=u_{22}+\left(\alpha+\frac{\beta}{k}\right)(\ln u_{12})_x\,. \qquad (2.9)$$

Подставим найденные значения в оставшуюся систему (2.3) – (2.6)

$$\begin{aligned}&\alpha\left(v_{11}-ku_{22}-(\alpha k+\beta)(\ln u_{12})_x\right)_x-\frac{a}{2\alpha}u_{12z}=\\&=u_{22z}+\left(\alpha+\frac{\beta}{k}\right)(\ln u_{12})_{xz}\,;\end{aligned} \qquad (2.10)$$

$$\begin{aligned}&\frac{a}{2}\left[2v_{11}-2ku_{22}+(\ln u_{12})_t-(\alpha k+\beta)(\ln u_{12})_x\right]_x-\\&-\left(u_{21}-\left(\frac{a}{2}+\frac{\beta a}{2\alpha k}\right)(\ln u_{12})_x\right)(\ln u_{12})_z=u_{21z}\,;\end{aligned} \qquad (2.11)$$

$$\alpha(v_{11x}+(\ln u_{12})_{tx}-ku_{22x})-\frac{a}{2\alpha}u_{12z}=-u_{22z}\,. \qquad (2.12)$$

Найдем разность (2.10) и (2.12):

$$u_{22z}=-\left(\alpha+\frac{\beta}{2k}\right)(\ln u_{12})_{xz}\,,$$

или

$$u_{22}=-\left(\alpha+\frac{\beta}{2k}\right)(\ln u_{12})_x\,,$$

при этом функция u_{11} примет вид

$$u_{11}=\frac{\beta}{2k}(\ln u_{12})_x\,.$$

Функцию u_{21} можно найти в явном виде, для этого найдем сумму (2.10) и (2.12)

$$\begin{aligned}&\alpha\left(2v_{11}-2ku_{22}+(\ln u_{12})_t-(\alpha k+\beta)(\ln u_{12})_x\right)_x-\\&-\frac{a}{\alpha}u_{12z}=\left(\alpha+\frac{\beta}{k}\right)(\ln u_{12})_{xz}\,,\end{aligned}$$

выразим $\left(2v_{11}-2ku_{22}\right)_x$ и подставим в (2.11)

$$\begin{aligned}&\left(2v_{11}-2ku_{22}\right)_x=\frac{a}{\alpha^2}u_{12z}+\left(1+\frac{\beta}{k\alpha}\right)(\ln u_{12})_{xz}-\\&-(\ln u_{12})_{xt}+(\alpha k+\beta)(\ln u_{12})_{xx}\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{a}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha k}+1\right)(\ln u_{12})_{xz}+\frac{a^2}{2\alpha^2}u_{12z}-\\&-\left(u_{21}-\left(\frac{a}{2}+\frac{\beta a}{2\alpha k}\right)(\ln u_{12})_x\right)(\ln u_{12})_z=u_{21z}.\end{aligned} \qquad (2.13)$$

Приведение подобных слагаемых и умножение на u_{12} позволяет выделить полную производную

$$\begin{aligned}&\frac{a}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha k}+1\right)(\ln u_{12})_{xz}u_{12}+\frac{a^2}{2\alpha^2}u_{12z}u_{12}-\\&-\left(u_{21}-\left(\frac{a}{2}+\frac{\beta a}{2\alpha k}\right)(\ln u_{12})_x\right)u_{12z}=u_{12}u_{21z}\,;\end{aligned}$$

$$\frac{a}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha k}+1\right)\left[(\ln u_{12})_x u_{12}\right]_z+\left(\frac{a}{2\alpha}\right)^2(u_{12}^2)_z=(u_{12}u_{21})_z\,,$$

выполнив интегрирование по z, найдем

$$u_{21}=\frac{a}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha k}+1\right)(\ln u_{12})_x+\left(\frac{a}{2\alpha}\right)^2u_{12}\,. \qquad (2.14)$$

В результате остается одно уравнение, связывающее две функции $u_{12}=u$ и $v_{11}=v$

$$v_x=\frac{\beta}{2\alpha k}(\ln u)_{tx}+\frac{a}{2\alpha^2}u_z+\left(\beta+\frac{\beta^2}{2\alpha k}\right)(\ln u)_{xx}\,, \qquad (2.15)$$

где $\left(\alpha k+\beta\right)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}$; v – произвольная функция. Операторы Лакса, порождающие уравнение (2.14) будут такими как указано в условии теоремы.

Получим 2+1-мерное дифференциальное уравнение в частных производных из операторного уравнения Лакса (2.1).

ТЕОРЕМА 2. *Уравнение*

$$\begin{aligned}&\alpha v_x+\frac{\alpha^2 k}{2}(\ln u)_{xx}-\frac{\gamma^2}{2k}(\ln u)_{yy}=\\&=\frac{a}{2\alpha}(u_z+\gamma u_y)+\frac{\gamma}{2k}(\ln u)_{yz}-\frac{\alpha}{2}(\ln u)_{xz}\end{aligned} \qquad (2.16)$$

обладает парой Лакса с операторами L *и* A *вида*

$$L=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ a & -\alpha\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+$$

$$+\begin{pmatrix}\frac{\gamma}{2k}(\ln u)_y-\frac{\alpha}{2}(\ln u)_x & u\\ \frac{a^2}{4\alpha^2}u+\frac{\gamma a}{2\alpha k}(\ln u)_y & -\frac{\gamma}{2k}(\ln u)_y-\frac{\alpha}{2}(\ln u)_x\end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix}2\alpha k+\beta & 0\\ ak & \beta\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}+$$

$$+\begin{pmatrix}v & ku\\ ku-\frac{a}{2\alpha}((\ln u)_z+\gamma(\ln u)_y) & v+(\ln u)_z\end{pmatrix},$$

где $\left(\alpha k+\beta\right)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}$; $v(x,t)$ – *произвольная функция.*

Доказательство. Рассмотрим частный случай, когда оператор L не содержит дифференцирования по x и имеет ту же структуру, используемую в первой теореме

$$L=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ a & -\alpha\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}; \qquad (2.17)$$

$$\begin{aligned}&A=\begin{pmatrix}2\alpha k+\beta & 0\\ ak & \beta\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}+\\&+\begin{pmatrix}v_{11} & ku_{12}\\ ku_{12}+\frac{a}{2\alpha}(v_{11}-v_{22}+k(u_{22}-u_{11})) & v_{22}\end{pmatrix},\end{aligned} \qquad (2.18)$$

где α, a, β, γ, k – произвольные постоянные; v_{ij}, u_{ij} – произвольные функции трех переменных x, y и t. Такой выбор операторов обуславливает равенство нулю коэффициентов при дифференциалах $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$; $\frac{\partial}{\partial x}$; $\frac{\partial}{\partial y}$.

Выведем уравнение в частных производных, эквивалентное операторному уравнению Лакса. Для этого найдем элементы матричного уравнения $L_t = [L, A]$, используя обозначение

$$\left(\alpha k+\beta\right)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}$$

и принимая во внимание условие $u_{12} \neq 0$:

$$\alpha(v_{22}-ku_{11})_x-\gamma u_{11y}= \\ =-\frac{\alpha}{2\alpha}u_{12}(v_{11}-ku_{11}-v_{22}+ku_{22})+u_{11z}; \qquad (2.19)$$

$$v_{22}+ku_{11}-v_{11}-ku_{22}=\gamma(\ln u_{12})_y+(\ln u_{12})_z; \qquad (2.20)$$

$$\frac{\alpha}{2}(v_{22}+v_{11}-ku_{11}-ku_{22})_x-\gamma u_{21y}+ \qquad (2.21)$$
$$+\left[u_{21}+\frac{\alpha}{2\alpha}(u_{22}-u_{11})\right](v_{11}-ku_{11}-v_{22}+ku_{22})=u_{21z};$$

$$\alpha(v_{22}-ku_{22})_x+\gamma u_{22y}+ \\ +\frac{a}{2\alpha}u_{12}(v_{11}-ku_{11}-v_{22}+ku_{22})=-u_{22z}. \qquad (2.22)$$

С учетом равенства (2.20) определим дополнительные условия так чтобы

$$v_{22}=v_{11}+(\ln u_{12})_z; \qquad (2.23)$$

$$u_{11}=u_{12}+\frac{\gamma}{k}(\ln u_{12})_y. \qquad (2.24)$$

Подставим найденные значения в оставшуюся систему (2.19) – (2.22)

$$\alpha(v_{11x}-ku_{22x}-\gamma(\ln u_{12})_{xy})- \\ -\gamma u_{22y}-\frac{\gamma^2}{k}(\ln u_{12})_{yy}= \qquad (2.25) \\ =\frac{\alpha}{2\alpha}(u_{12z}+\gamma u_{12y})+u_{22z}+\frac{\gamma}{k}(\ln u_{12})_{yz};$$

$$\frac{\alpha}{2}(2v_{11x}-2ku_{22x}-(\ln u_{12})_z-\gamma(\ln u_{12})_y)_x- \\ -\gamma u_{21y}-\left[u_{21}-\frac{\alpha\gamma}{2\alpha k}(\ln u_{12})_y\right]\times \qquad (2.26) \\ \times\left[(\ln u_{12})_z+\gamma(\ln u_{12})_y\right]=u_{21z};$$

$$\alpha(v_{11x}+(\ln u_{12})_{xz}-ku_{22x})+ \\ +\gamma u_{22y}-\frac{a}{2\alpha}(u_{12z}+\gamma u_{12y})=-u_{22z}. \qquad (2.27)$$

Найдем разность (2.25) и (2.27):

$$-\alpha\gamma(\ln u_{12})_{xy}-2\gamma u_{22y}-\frac{\gamma^2}{k}(\ln u_{12})_{yy}- \\ -\alpha(\ln u_{12})_{xz}=2u_{22z}+\frac{\gamma}{k}(\ln u_{12})_{yz}$$

или

$$\gamma\left[\alpha(\ln u_{12})_x+2u_{22}+\frac{\gamma}{k}(\ln u_{12})_y\right]_y+ \\ +\left[\alpha(\ln u_{12})_x+2u_{22}+\frac{\gamma}{k}(\ln u_{12})_y\right]_z=0,$$

что позволяет определить функцию u_{22}

$$u_{22}=-\frac{\gamma}{2k}(\ln u_{12})_y-\frac{\alpha}{2}(\ln u_{12})_x. \qquad (2.28)$$

Выразим $v_{11x}-ku_{22x}$ из (2.27)

$$v_{11x}-ku_{22x}=\frac{a}{2\alpha^2}(u_{12z}+\gamma u_{12y})- \\ -\frac{1}{\alpha}u_{22z}-(\ln u_{12})_{xz}-\frac{\gamma}{\alpha}u_{22y} \qquad (2.29)$$

и выполним подстановку найденной функции (2.28)

$$v_{11x}-ku_{22x}=\frac{a}{2\alpha^2}(u_{12z}+\gamma u_{12y})+\frac{\gamma}{2\alpha k}(\ln u_{12})_{yz}- \\ -\frac{1}{2}(\ln u_{12})_{xz}+\frac{\gamma^2}{2\alpha k}(\ln u_{12})_{yy}+\frac{\gamma}{2}(\ln u_{12})_{xy}.$$

Найденное соотношение (2.29) подставим в (2.26)

$$\frac{a^2}{2\alpha^2}(u_{12z}+\gamma u_{12y})+\frac{\gamma a}{2\alpha k}(\ln u_{12})_{yz}+\frac{\gamma^2 a}{2\alpha k}(\ln u_{12})_{yy}- \\ -\gamma u_{21y}-\left[u_{21}-\frac{a\gamma}{2\alpha k}(\ln u_{12})_y\right]\times \\ \times\left[(\ln u_{12})_z+\gamma(\ln u_{12})_y\right]=u_{21z}$$

и умножим все члены на u_{12}

$$\frac{a^2}{2\alpha^2}u_{12}(u_{12z}+\gamma u_{12y})+\frac{\gamma a}{2\alpha k}u_{12}(\ln u_{12})_{yz}+ \\ +\frac{\gamma^2 a}{2\alpha k}u_{12}(\ln u_{12})_{yy}-\gamma u_{12}u_{21y}- \\ -u_{21}(u_{21z}+\gamma u_{21y})+ \\ +\frac{a\gamma}{2\alpha k}(\ln u_{12})_y(u_{21z}+\gamma u_{21y})=u_{12}u_{21z},$$

тогда выделяя полные производные, имеем

$$\left(\frac{a^2}{4\alpha^2}\right)\left[\left(u_{12}^2\right)_z+\gamma\left(u_{12}^2\right)_y\right]_z+ \\ \frac{\gamma a}{2\alpha k}\left[u_{12}(\ln u_{12})_y\right]_z+\frac{\gamma a}{2\alpha k}\left[u_{12}(\ln u_{12})_y\right]_y- \\ -\gamma(u_{12}u_{21})_y=(u_{12}u_{21})_z$$

или

$$\left[\frac{a^2}{4\alpha^2}u_{12}^2+\frac{\gamma a}{2\alpha k}u_{12}(\ln u_{12})_y-u_{12}u_{21}\right]_z+ \\ +\gamma\left[\frac{a^2}{4\alpha^2}u_{12}^2+\frac{\gamma a}{2\alpha k}u_{12}(\ln u_{12})_y-u_{12}u_{21}\right]_y=0,$$

в результате можно найти функцию u_{21}

$$u_{21}=\frac{a^2}{4\alpha^2}u_{12}+\frac{\gamma a}{2\alpha k}(\ln u_{12})_y. \qquad (2.30)$$

И так, в ходе преобразований системы (2.25) – (2.27) из (2.26) наедена функция u_{21}, а из (2.27) – u_{22}, поэтому осталось единственное уравнение (2.25), связывающее две функции $u_{12}=и$, $v_{11}=v$ и дающее равенство (2.16):

$$\alpha v_x + \frac{\alpha^2 k}{2}(\ln u)_{xx} - \frac{\gamma^2}{2k}(\ln u)_{yy} =$$
$$= \frac{a}{2\alpha}(u_z + \gamma u_y) + \frac{\gamma}{2k}(\ln u)_{yz} - \frac{\alpha}{2}(\ln u)_{xz},$$

где $(\alpha k + \beta)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}$.

Полученное уравнение (2.16) в частных производных имеет вид локального закона сохранения, при этом функция v является произвольной и может описывать некоторое возмущение уравнения. При подстановке в (2.17), (2.18) найденные значения v_{22}, u_{11}, u_{21}, u_{22} из равенств (2.23), (2.24), (2.30), (2.28) получим операторы Лакса указанные в теореме 2 этого раздела.

Уравнения (2.15) и (2.31) имеют общей оператор рассеяния L, а, следовательно, уравнения на собственные значения совпадают формально, но при этом собственное значение оператора L в одном случае являются постоянными, а во втором представляют собой некоторые функции, зависящие от дополнительной переменной *y*.

ТЕОРЕМА 3. *Операторное уравнение Лакса* $L_t = LA - AL$ *эквивалентно нелинейному уравнению в частных производных*

$$\frac{1}{\alpha_{11}}\left(\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}}\right)u_z - \frac{k}{2}\left(\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\right)u_x + \frac{1}{k}(\ln u)_{zz} - \alpha_{11}^2 k(\ln u)_{xx} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}u_z \ln u = 0; \qquad (2.31)$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = 2k\alpha_{11}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$, *и операторы*

$$L = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + u, \quad A = \beta\frac{\partial}{\partial x} + v,$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & -\alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & -\alpha_{11} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 3k\alpha_{11} & 0 & 0 \\ k\alpha_{21} & k\alpha_{11} & 0 \\ k\alpha_{31} & k\alpha_{32} & k\alpha_{11} \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{22} + \frac{2}{k}v_{11} \end{pmatrix};$$

$$v = \begin{pmatrix} v_{11} & ku_{12} & ku_{13} \\ ku_{21} + \frac{\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\left(2v_{11} + k(u_{22} - u_{11})\right) & -v_{11} & ku_{23} \\ ku_{31} + \frac{\alpha_{31}}{2\alpha_{11}}\left(2v_{11} + k(u_{22} - u_{11})\right) & ku_{32} + \frac{\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}\left(2v_{11} + k(u_{22} - u_{11})\right) & v_{11} \end{pmatrix},$$

где k – некоторый параметр, $u(x,t) = (u_{ij})$, $v(x,t) = (v_{ij})$ - *матрицы 3×3 с функциями:*

$$u_{13} = u(x,t);$$

$$u_{11} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2}u\ln u + \frac{1}{2k}(\ln u)_z - \frac{\alpha_{11}}{2}(\ln u)_x;$$

$$u_{23} = \frac{\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}u;$$

$$u_{33} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2}u\ln u - \frac{\alpha_{11}}{2}(\ln u)_x - \frac{1}{2k}(\ln u)_z;$$

$$u_{21} = \frac{\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}\left(\alpha_{31} + \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}\right)u + \frac{\alpha_{21}}{2k\alpha_{11}}(\ln u)_z;$$

$$u_{22} = -\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2}u\ln u - \frac{1}{2k}(\ln u)_z - \frac{\alpha_{11}}{2}(\ln u)_x - \left(\frac{\alpha_{31}}{2\alpha_{11}} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}\right)u;$$

$$u_{12} = -\frac{\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}u\ln u;$$

$$u_{31} = k\frac{\alpha_{32}^2\alpha_{21}^2}{32\alpha_{11}^4}\frac{u_{13}}{2}\ln u - k\frac{\alpha_{32}^2\alpha_{21}^2}{16\alpha_{11}^3}\frac{1}{u}\int u_z \int u_x \ln u\, dz dz + \frac{\alpha_{31}}{2k\alpha_{11}}(\ln u)_z -$$
$$- k\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4}\frac{1}{u}\int u_z \int (\ln u)_{xx}\, dz dz - k\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^3}(4\alpha_{31}\alpha_{11} + 3\alpha_{32}\alpha_{21}) \times$$
$$\times \frac{1}{u}\int u_z \int u_x dz dz - \frac{\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}\left((\ln u)_x - \frac{1}{u}\int (\ln u)_x\, du\right) + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4k\alpha_{11}^2}\frac{1}{u}\int (\ln u)_z\, du +$$
$$+ \left(\frac{\alpha_{31}^2}{2\alpha_{11}^2} + (k+2)\frac{\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{21}}{16\alpha_{11}^3} + \frac{\alpha_{32}^2\alpha_{21}^2}{16\alpha_{11}^4} - k\frac{\alpha_{32}^2\alpha_{21}^2}{2^6\alpha_{11}^4}\right)\frac{u}{2};$$

$$v_{11} = \frac{k}{2}(u_{11} - u_{22}) - \frac{1}{2}(\ln u)_z;$$

$$u_{32} = \frac{\alpha_{32}}{4\alpha_{11}^2}\left(\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}}k\right)u(1 - \ln u) - \frac{\alpha_{32}}{8\alpha_{11}^2}k\left(\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\right)u +$$
$$+ \frac{\alpha_{32}^2\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2}k\int u_x \ln u\, dz + \frac{\alpha_{11}\alpha_{32}}{2}k\int (\ln u)_{xx}\, dz + \frac{\alpha_{32}k}{8\alpha_{11}^2}(4\alpha_{11}\alpha_{31} + 3\alpha_{32}\alpha_{21})\int u_x dz.$$

III. Интегрируемость нелинейных уравнений

Рассмотрим некоторые свойства полученных нелинейных уравнений.

ТЕОРЕМА 1. *Нелинейное уравнение в частных производных*

$$v_x = \frac{\beta}{2\alpha k}(\ln u)_{tx} + \frac{a}{2\alpha^2}\left[u_t + (\alpha k + \beta)u_x\right] + \left(\beta + \frac{\beta^2}{2\alpha k}\right)(\ln u)_{xx}$$

имеет следующее решение

$$u(\zeta) = \frac{e^{\mu\int(v+C_1)d\zeta}}{C_2 + \frac{a\mu}{2\alpha^2}\left[\delta + \alpha k + \beta\right]\int e^{\mu\int(v+C_1)d\zeta}d\zeta},$$

где $\zeta = x + \delta t$, *а* δ, $\mu = \dfrac{2\alpha k}{\beta(2\alpha k + \beta + \delta)}$ *– постоянные,* C_1, C_2 *– постоянные интегрирования.*

ТЕОРЕМА 2. *Уравнение* (2.16), *при* $k > 0$, $\alpha, \gamma, a \in R$ *сводится к параболическому квазилинейному уравнению вида*

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = \frac{ak}{\alpha\gamma^2}e^v(\gamma v_\eta + v_\zeta), \qquad (3.1)$$

где $u(x,t,z) = e^v$, $v = v(\xi,\eta,\zeta)$, $\xi = \pm\dfrac{\gamma}{\alpha k}x$, $\eta = y$, $\zeta = -\dfrac{1}{\alpha k}x - \dfrac{1}{\gamma}y + 2z$.

Доказательство. ***1. Использование квадратичных форм.*** Сделаем в уравнении (2.16) подстановку $\ln u = v(x,y,z)$.

$$\frac{\alpha^2 k}{2}v_{xx} - \frac{\gamma^2}{2k}v_{yy} - \frac{\gamma}{2k}v_{yz} + \frac{\alpha}{2}v_{xz} = \frac{a}{2\alpha}e^v(v_z + \gamma v_y). \qquad (3.2)$$

Приведение уравнения к каноническому виду с помощью квадратичных форм. Рассмотрим левую часть уравнения (3.2). Ей соответствует квадратичная форма вида

$$Q = \frac{\alpha^2 k}{2}\lambda_1^2 - \frac{\chi^2}{2k}\lambda_2^2 - \frac{\chi}{2k}\lambda_2\lambda_3 + \frac{\alpha}{2}\lambda_1\lambda_3. \qquad (3.3)$$

Методом Лагранжа приведем квадратичную форму (3.3) к каноническому виду $Q = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2$, где

$$\mu_1 = m_1\lambda_1 + n_1\lambda_2 + p_1\lambda_3,$$

$$\mu_2 = m_2\lambda_1 + n_2\lambda_2 + p_2\lambda_3, \quad \mu_3 = p_3\lambda_3,$$

тогда

$$Q = (m_1\lambda_1 + p_1\lambda_3)^2 - (n_2\lambda_2 + p_2\lambda_3)^2 - p_3^2\lambda_3^2. \qquad (3.4)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим:

$$Q = m_1^2\lambda_1^2 - n_2^2\lambda_2^2 - 2n_2p_2\lambda_2\lambda_3 + 2m_1p_1\lambda_1\lambda_3 - (p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)\lambda_3^2. \qquad (3.5)$$

Для того чтобы квадратичная форма (3.5) имела такую же структуру, как и левая часть уравнения (3.2), необходимо, чтобы соблюдалось условие $p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = 0$, или $p_3^2 = p_1^2 - p_2^2$, тогда (3.4) перепишется в виде

$$Q = (m_1\lambda_1 + p_1\lambda_3)^2 - (n_2\lambda_2 + p_2\lambda_3)^2 - (p_1^2 - p_2^2)\lambda_3^2 \qquad (3.6)$$

Раскрыв скобки и выполнив элементарные преобразования, получим

$$Q = m_1^2\lambda_1^2 - n_2^2\lambda_2^2 - 2n_2p_2\lambda_2\lambda_3 + 2m_1p_1\lambda_1\lambda_3. \qquad (3.7)$$

Сравнивая коэффициенты при λ_1, λ_2, λ_3 с коэффициентами в формулах (3.3) и (3.7), получим систему:

$$2n_2p_2 = \frac{\gamma}{2k}; \quad m_1^2 = \frac{\alpha^2 k}{2};$$
$$2m_1p_1 = \frac{\alpha}{2}; \quad n_2^2 = \frac{\gamma^2}{2k}, \qquad (3.8)$$

откуда находим $m_1 = \dfrac{\alpha\sqrt{k}}{\sqrt{2}}$; $n_2 = \dfrac{\gamma}{\sqrt{2k}}$; $p_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k}}$; $p_2 = \dfrac{\sqrt{2k}}{4k}$; $p_1^2 - p_2^2 = 0$, а равенство (3.4) принимает вид

$$Q = \left(\frac{\alpha\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\lambda_1 + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k}}\lambda_3\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2k}}\lambda_2 + \frac{\sqrt{2k}}{4k}\lambda_3\right)^2. \qquad (3.9)$$

Для построения матрицы невырожденного аффинного преобразования необходимо выразить λ_1, λ_2, λ_3 через μ_1, μ_2, μ_3, но так как имеется только два соотношения вида: $\mu_1 = \dfrac{\alpha\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\lambda_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k}}\lambda_3$, $\mu_2 = \dfrac{\gamma}{\sqrt{2k}}\lambda_2 + \dfrac{\sqrt{2k}}{4k}\lambda_3$, что не позволяет выразить λ_i через μ_j. Исследование показало, что квадратичная форма Q имеет вырожденный вид (квадратичная форма от трех переменных сводится к разности двух, а не трех полных квадратов).

2. Приведение уравнения к каноническому виду с помощью специальной замены. Проведем замену так, чтобы смешанные производные уничтожились. Так как в исследуемом уравнении отсутствует смешанная производная v_{xy}, то предположим, что две переменные не зависят от *z*, а третья зависит от всех трех переменных исходного уравнения, новые переменные будут иметь вид:

$$о = px;$$
$$з = by; \qquad (3.10)$$
$$ж = cx + dy + mz,$$

где $\{p,\ b,\ c,\ d,\ m\} \in R$. Определим частные производные новых переменных по старым, тогда

$$\xi_x = p, \quad \eta_x = 0, \quad \zeta_x = c,$$
$$\xi_y = 0, \quad \eta_y = b, \quad \zeta_y = d,$$
$$\xi_z = 0, \quad \eta_z = 0, \quad \zeta_z = m.$$

Частные производные от неизвестной функции будут иметь вид.

$$v_y = bv_\eta + dv_\zeta; \quad v_z = mv_\zeta;$$

$$v_{xx} = p^2 v_{\xi\xi} + c^2 v_{\zeta\zeta} + 2pcv_{\xi\zeta};$$
$$v_{yy} = b^2 v_{\eta\eta} + d^2 v_{\zeta\zeta} + 2bdv_{\eta\zeta}; \qquad (3.11)$$
$$v_{yz} = dmv_{\zeta\zeta} + bmv_{\eta\zeta}; \quad v_{xz} = cmv_{\zeta\zeta} + pmv_{\xi\zeta}.$$

Подставляя (3.11) в (3.2), получим:

$$\frac{\alpha^2 k}{2}\left[p^2 v_{\xi\xi} + c^2 v_{\zeta\zeta} + 2pcv_{\xi\zeta}\right] -$$
$$-\frac{\gamma^2}{2k}\left[b^2 v_{\eta\eta} + d^2 v_{\zeta\zeta} + 2bdv_{\eta\zeta}\right] -$$
$$-\frac{\gamma}{2k}\left[dmv_{\zeta\zeta} + bmv_{\eta\zeta}\right] + \frac{\alpha}{2}\left[cmv_{\zeta\zeta} + amv_{\xi\zeta}\right] =$$
$$= \frac{a}{2\alpha} e^{v}(mv_{\zeta} + \gamma[bv_{\eta} + dv_{\zeta}]).$$

Выполнив группировку элементов со старшими производными, будем иметь

$$\frac{\alpha^2 k}{2} p^2 v_{\xi\xi} + \left[\frac{\alpha^2 k}{2} c^2 - \frac{\gamma^2}{2k} d^2 - \frac{\gamma}{2k} dm + \frac{\alpha}{2} cm\right] v_{\zeta\zeta} +$$
$$+\left[2\frac{\alpha^2 k}{2} pc + \frac{\alpha}{2} am\right] v_{\xi\zeta} - \left[\frac{\gamma}{2k} bm + 2\frac{\gamma^2}{2k} bd\right] v_{\eta\zeta} - \qquad (3.12)$$
$$-\frac{\gamma^2}{2k} b^2 v_{\eta\eta} = \frac{a}{2\alpha} e^{v}(\gamma bv_{\eta} + [m + \gamma d]v_{\zeta}).$$

Для того чтобы (3.12) имело канонический вид, необходимо, чтобы коэффициенты при смешанных производных обращались в нуль, что дает следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\alpha^2 k}{2} 2pc + \frac{\alpha}{2} pm = 0, \\ \frac{\gamma^2}{2k} 2bd + \frac{\gamma}{2k} bm = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2p}(2\alpha kc + m) = 0, \\ \frac{\gamma}{2k}(2\gamma d + m) = 0, \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha kc = -\frac{m}{2}, \\ \gamma d = -\frac{m}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{m}{2\alpha k}, \\ d = -\frac{m}{2\gamma}. \end{cases}$$

При этом исходное уравнение принимает вид:

$$\frac{\alpha^2 k}{2} p^2 v_{\xi\xi} - \frac{\gamma^2}{2k} b^2 v_{\eta\eta} +$$
$$+\left[\frac{\alpha^2 k}{2} c^2 - \frac{\gamma^2}{2k} d^2 - \frac{\gamma}{2k} dm + \frac{\alpha}{2} cm\right] v_{\zeta\zeta} = \qquad (3.13)$$
$$= \frac{a}{2\alpha} e^{v}(mv_{\zeta} + \gamma(bv_{\eta} + dv_{\zeta})).$$

Подставив значения c и d в уравнение (3.13), получим:

$$\frac{\alpha^2 k}{2} p^2 v_{\xi\xi} - \frac{\gamma^2}{2k} b^2 v_{\eta\eta} = \frac{a}{2\alpha} e^{v}\left(\gamma bv_{\eta} + \frac{m}{2} v_{\zeta}\right). \qquad (3.14)$$

Модули коэффициентов при вторых производных должны быть равны, т.е.

$$\frac{\alpha^2 k}{2} p^2 = \frac{\gamma^2}{2k} b^2, \text{ следовательно } \quad p = \pm\frac{\gamma b}{\alpha k}.$$

Подставив значение *p* в уравнение (3.14), получим:

$$\frac{\gamma^2}{2k} b^2 v_{\xi\xi} - \frac{\gamma^2}{2k} b^2 v_{\eta\eta} = \frac{a}{2\alpha} e^{v}\left(\gamma bv_{\eta} + \frac{m}{2} v_{\xi}\right),$$

или

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = \frac{ak}{\alpha\gamma^2 b^2} e^{v}\left(\gamma bv_{\eta} + \frac{m}{2} v_{\xi}\right). \qquad (3.15)$$

Коэффициенты a, k, α, γ – параметры уравнения, а коэффициенты b, m – параметры преобразования, поэтому можно положить $b = 1$, тогда $p = \pm\frac{\gamma}{\alpha k}$, а $m = 2$, и уравнение (3.15) примет вид

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = \frac{ak}{\alpha\gamma^2} e^{v}\left(\gamma v_{\eta} + v_{\xi}\right), \qquad (3.16)$$

при этом преобразования координат имеют вид: $\xi = \pm\frac{\gamma}{\alpha k} x$, $\eta = y$, $\zeta = -\frac{1}{\alpha k} x - \frac{1}{\gamma} y + 2z$.

Замена (3.10) приводит уравнение к параболическому виду (отсутствует вторая производная $v_{\zeta\zeta}$, но первая производная v_{ζ} входит в правую часть уравнения (3.16)).

ТЕОРЕМА 3. *Уравнение* (2.16)*, при* $k > 0$*,* $\alpha, \gamma, a \in R$ *имеет решение вида* $u(x,y,z) = e^{v\left(\left(z - \frac{1}{\alpha k} x\right);\ \frac{\gamma}{1+\gamma}\left(sz - \frac{1}{\gamma} y\right)\right)}$, *где* v *– произвольная функция.*

Доказательство. Сделаем в уравнении (2.16) подстановку $\ln u = v$, тогда уравнение принимает вид (3.2).

Проведем следующую замену переменных

$$\vartheta = mx + nz, \qquad \tau = py + sz,$$

где m, n, p, s – произвольные неизвестные постоянные. Определим частные производные новых переменных по старым, тогда

$$\vartheta_x = m, \quad \vartheta_y = 0, \quad \vartheta_z = n,$$
$$\tau_x = 0, \quad \tau_y = p, \quad \tau_z = s.$$

Частные производные от неизвестной функции будут иметь вид:

$$v_z = nv_{\vartheta} + sv_{\tau}; \qquad v_y = pv_{\tau};$$
$$v_{xx} = m^2 v_{\vartheta\vartheta}; \qquad v_{yy} = p^2 v_{\tau\tau}; \qquad (3.17)$$
$$v_{xz} = mnv_{\vartheta\vartheta} + msv_{\vartheta\tau}; \quad v_{yz} = spv_{\tau\tau} + npv_{\vartheta\tau}.$$

Подставив выражения (3.17) в (3.2), и сгруппировав подобные слагаемые, получим:

$$\left[\frac{\alpha^2 k}{2} m^2 + \frac{\alpha}{2} mn\right] v_{\vartheta\vartheta} - \left[\frac{\gamma^2}{2k} p^2 + \frac{\gamma}{2k} sp\right] v_{\tau\tau} +$$
$$+\left[\frac{\alpha}{2} ms - \frac{\gamma}{2k} np\right] v_{\vartheta\tau} = \qquad (3.18)$$
$$= \frac{a}{2\alpha} e^{v}(nv_{\vartheta} + sv_{\tau}(1+\gamma)).$$

Определим, при каких параметрах m, n, p, s

коэффициенты при смешанных производных обращаются в нуль, то есть имеет место равенство

$$\frac{\alpha}{2}ms-\frac{\gamma}{2k}np=0,$$

откуда находим параметр p

$$p=\frac{\alpha k}{\gamma n}ms. \qquad (3.19)$$

Приведем уравнение (3.18) к такому виду, чтобы модули коэффициентов при $v_{\vartheta\vartheta}$ и $v_{\tau\tau}$ совпали

$$\frac{k\alpha^2m^2s^2}{2n^2}+\frac{\alpha ms^2}{2n}=\pm\left(\frac{\alpha^2km^2}{2}+\frac{\alpha mn}{2}\right). \qquad (3.20)$$

Если положим значение параметра $m=-\frac{n}{\alpha k}$, то, подставляя полученные значения m и p, в (3.18), получим, что коэффициенты при старших производных обращаются в нуль, следовательно, уравнение преобразовалось к линейному виду первого порядка

$$e^v(nv_\vartheta+sv_\tau(1+\gamma))=0, \qquad (3.21)$$

где $\vartheta=-\frac{n}{бk}x+nz$, $\tau=-\frac{s}{г}y+sz$. Положив оставшиеся параметры n, s равными 1 (n = 1, s = 1), и учитывая, что $e^v\neq 0$, получим, что (3.21) принимает вид линейного уравнения первого порядка

$$v_\vartheta=\frac{(1+\gamma)}{\gamma}v_\tau. \qquad (3.22)$$

Решение этого уравнения имеет вид $u=e^{v\left(\vartheta;\,\frac{\gamma}{1+\gamma}\tau\right)}$ или в старых переменных $u(x,y,z)=e^{v\left(\left(z-\frac{1}{\alpha k}x\right);\,\frac{\gamma}{1+\gamma}\left(sz-\frac{1}{\gamma}y\right)\right)}$, где v – произвольная функция.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Уравнение* (2.16), *при* $k>0$, $\alpha,\gamma,a\in R$ *сводится к гиперболическому квазилинейному уравнению вида*

$$v_{\vartheta\vartheta}-v_{\tau\tau}=\frac{a}{\alpha^2(\alpha k+1)}e^v(v_\vartheta\pm(1+\gamma)v_\tau), \qquad (3.23)$$

где

$$u(x,t,z)=e^v;\quad v=v(\vartheta,\tau);$$

$$\vartheta=mx+nz;\qquad \tau=\pm\frac{\alpha k}{\gamma}y\pm z.$$

Доказательство. Положим в (3.20) $s^2\pm n^2=0$, возможны варианты $s=\pm n$ или $s=\pm in$. В первом случае, когда все параметры могут быть действительными, уравнение примет вид

$$v_{\vartheta\vartheta}-v_{\tau\tau}=\frac{an}{\alpha^2m(\alpha km+n)}e^v(v_\vartheta\pm v_\tau(1+\gamma)),$$

положив неопределенные параметры $m=n=1$, получим следующие преобразования координат

$$\vartheta=x+z,\qquad \tau=\pm\frac{\alpha k}{\gamma}y\pm z,$$

и уравнение вида:

$$v_{\vartheta\vartheta}-v_{\tau\tau}=\frac{a}{\alpha^2(\alpha k+1)}e^v(v_\vartheta\pm(1+\gamma)v_\tau).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Уравнение* (3.23), *при* $k>0$, $\alpha,\gamma,a\in R$ *имеет решение вида*

$$v(\vartheta,\tau)=-\ln\left[e^{-C_1[\vartheta\mp(1+\gamma)\tau]}-\frac{\beta}{C_1}\right],$$

где $\beta=\frac{a}{\alpha^2(\alpha k+1)}$; C_1 *– постоянная.*

Доказательство. Преобразуем уравнение (3.23) выделив полные производные

$$\left(v_\vartheta-\beta e^v\right)_\vartheta=\left(v_\tau\pm\beta(1+\gamma)e^v\right)_\tau;\quad \beta=\frac{a}{\alpha^2(\alpha k+1)}.$$

Равенство эквивалентно системе

$$\begin{aligned}&v_\vartheta-\beta e^v=C_1;\quad C_1=\text{const};\\&v_\tau\pm\beta(1+\gamma)e^v=C_2;\quad C_2=\text{const}.\end{aligned} \qquad (3.24)$$

С помощью преобразования $e^v=w(\vartheta,\tau)$ система (3.24) приводится к системе уравнений Бернулли

$$\begin{aligned}&w_\vartheta-\beta w^2=C_1w;\quad C_1=\text{const};\\&w_\tau\pm\beta(1+\gamma)w^2=C_2w;\quad C_2=\text{const}.\end{aligned} \qquad (3.25)$$

Решение первого и второго уравнения соответственно имеют вид

$$w_1(\vartheta,\tau)=\left[\varphi(\tau)e^{-C_1\vartheta}-\frac{\beta}{C_1}\right]^{-1};$$

$$w_2(\vartheta,\tau)=\left[\psi(\vartheta)e^{-C_2\tau}\pm\frac{\beta(1+\gamma)}{C_2}\right]^{-1},$$

где $\varphi(\tau)$, $\psi(\vartheta)$ – постоянные интегрирования. Доопределим функции $\varphi(\tau)$, $\psi(\vartheta)$ и постоянные C_1, C_2 так чтобы функции $w_1(\vartheta,\tau)$, $w_2(\vartheta,\tau)$ совпали, тогда

$$\varphi(\tau)=e^{-C_2\tau};\quad \psi(\vartheta)=e^{-C_1\vartheta};\quad C_2=\mp C_1(1+\gamma),$$

следовательно $w(\vartheta,\tau)=\left[e^{-C_1[\vartheta\mp(1+\gamma)\tau]}-\frac{\beta}{C_1}\right]^{-1}$. Решение уравнения (3.23) будет иметь вид $v(\vartheta,\tau)=-\ln\left[e^{-C_1[\vartheta\mp(1+\gamma)\tau]}-\frac{\beta}{C_1}\right]$.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Уравнение* (2.16), *при* $k>0$, $\alpha,\gamma,a\in R$ *имеет решение вида*

$$u(x,y,z)=\left[e^{-C_1\left[x-\frac{\alpha k}{\gamma}(1+\gamma)y-\gamma z\right]}-\frac{\beta}{C_1}\right]^{-1},$$

где $\beta=\frac{a}{\alpha^2(\alpha k+1)}$; C_1 *– произвольная постоянная.*

ТЕОРЕМА 4. *Уравнение* (2.31) *является квазилинейным уравнением гиперболического типа и с помощью следующей замены переменных:* $\tilde{x} = -\alpha_{11}kz + x$, $\tilde{z} = \alpha_{11}kz + x$, $u(\tilde{x},\tilde{z}) = e^{w(\tilde{x},\tilde{z})}$ *приводится к виду*

$$w_{\tilde{x}\tilde{z}} = e^{w}\left[\frac{\alpha_{31}}{8\alpha_{11}^2}w_{\tilde{z}} - \frac{1}{8\alpha_{11}^2}\left(3\alpha_{31} + \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{\alpha_{11}}\right)w_{\tilde{x}} + \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{16\alpha_{11}^3}\left(w_{\tilde{x}} - w_{\tilde{z}}\right)w\right]. \quad (3.26)$$

СЛЕДСТВИЕ. *Уравнение* (3.26) *имеет решение в виде функции* $w = f(\xi)$, *где* $\xi = \alpha_{31}\tilde{x} + \left(3\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\right)\tilde{z}$, *а* f *определяется из обращения интеграла*

$$\int \frac{df}{C_1 + e^f(1-f)} = \frac{1}{m}\left[\alpha_{31}\tilde{x} + \left(3\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\right)\tilde{z}\right] + C_2;$$

$$m = 16\frac{\alpha_{11}^3\alpha_{31}}{\alpha_{32}\alpha_{21}}\left(1 + \frac{\alpha_{31}\alpha_{11}}{2\alpha_{31}\alpha_{11} + \alpha_{32}\alpha_{21}}\right);$$

C_1, C_2 *– произвольные постоянные.*

Доказательство. Выразим частные производные функции w через $f(\xi)$, где связь между переменными $\tilde{x}$ и $\tilde{z}$ указаны в условии теоремы:

$$w_{\tilde{x}} = \alpha_{31}f'; \quad w_{\tilde{z}} = \left(3\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\right)f';$$

$$w_{\tilde{x}\tilde{z}} = \alpha_{31}\left(3\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\right)f'',$$

и подставим их в уравнение (3.26):

$$8\alpha_{11}^2\alpha_{31}\left(3\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\right)f'' = -\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\left[2\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\right]e^f ff'$$

или

$$mf'' = -e^f ff', \quad (3.27)$$

где $m = 16\frac{\alpha_{11}^3\alpha_{31}}{\alpha_{32}\alpha_{21}}\left(1 + \frac{\alpha_{31}\alpha_{11}}{2\alpha_{31}\alpha_{11} + \alpha_{32}\alpha_{21}}\right)$.

Полученное уравнение не содержит независимой переменной ξ, а, следовательно, его можно понизить, рассмотрев f в качестве новой независимой переменной, $f' = p(f)$ - новая неизвестная функция, тогда $f'' = p_f'(f)f' = pp_f'$. Равенство (3.27) преобразуется к обыкновенному уравнению первого порядка:

$$mpp_f' = -e^f fp \quad \text{или} \quad mp_f' = -e^f f.$$

Интегрируя последнее равенство по переменной f, имеем:

$$mp = -\int e^f f\,df = -\begin{vmatrix} u = f & du = df \\ dv = e^f df & v = e^f \end{vmatrix} = -\left(fe^f - \int e^f df\right) = e^f(1-f) + C_1,$$

C_1 – произвольная постоянная. Возвращаясь к обозначениям функции p, получим новое уравнение первого порядка

$$m\frac{df}{d\xi} = e^f(1-f) + C_1.$$

После разделения переменных искомую функцию можно получить из интеграла

$$m\int \frac{df}{C_1 + e^f(1-f)} = \int d\xi. \quad (3.28)$$

Таким образом, решение исходного уравнения в виде $w = f(\xi)$, можно получить из обращения интеграла

$$\int \frac{df}{C_1 + e^f(1-f)} = \frac{1}{m}\left[\alpha_{31}\tilde{x} + \left(3\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\right)\tilde{z}\right] + C_2,$$

где C_2 – произвольная постоянная.

ТЕОРЕМА 5. *Уравнение* (3.26) *имеет решение, записанное в квадратурах*

$$\int \frac{e^{-w}dw}{(1-\lambda)w + B(\lambda - 3) + C_1e^{-w}} = \frac{1}{A\lambda}\tilde{x} + \frac{1}{A}\tilde{z} + C_2,$$

где $A = \frac{16\alpha_{11}^3}{\alpha_{32}\alpha_{21}}$; $B = 1 + \frac{2\alpha_{11}\alpha_{31}}{\alpha_{32}\alpha_{21}}$; C_1, C_2 – *произвольные постоянные.*

Доказательство. Преобразуем (3.26) к более симметричному виду, выделив полные производные

$$8\alpha_{11}^2 w_{\tilde{z}\tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}e^w w - 3\left[\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\right]e^w\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}e^w w - \left[\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\right]e^w\right).$$

Как видно из полученного равенства имеется определенная симметрия в коэффициентах, поэтому можно не ограничивая общности переписать уравнение в виде

$$Aw_{\tilde{z}\tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^w w - 3Be^w\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(e^w w - Be^w\right), \quad (3.29)$$

где $A = \frac{16\alpha_{11}^3}{\alpha_{32}\alpha_{21}}$; $B = 1 + \frac{2\alpha_{11}\alpha_{31}}{\alpha_{32}\alpha_{21}}$.

Уравнение (3.29) подстановкой $\xi = \tilde{x} + a\tilde{z}$ сводится к обыкновенному уравнению второго порядка вида

$$Aaw'' = (1-a)(e^w w)' + B(a-3)e^w w'.$$

Так как в явном виде выделены полные производные, то, выполнив интегрирование, понизим на порядок

$$Aaw' = (1-a)e^w w + B(a-3)e^w + C_1,$$

C_1 – произвольная постоянная. Разделяя переменные, получим

$$Aa\int\frac{e^{-w}dw}{(1-a)w+B(a-3)+C_1e^{-w}}=\int d\xi\ ;$$

$$\int\frac{e^{-w}dw}{(1-a)w+B(a-3)+C_1e^{-w}}=\frac{1}{Aa}\tilde{x}+\frac{1}{A}\tilde{z}+C_2\ ,\ (3.30)$$

где C_2 – произвольная постоянная. Таким образом, решение исходного уравнения в виде w, можно получить из обращения интеграла (3.30).

Выводы

1. Получена новая система нелинейных уравнений в частных производных (1.11), имеющая уравнение на собственное значение с оператором Дирака

$$\varphi_{1x}-f(x,t)\varphi_2=\lambda\varphi_1;$$
$$-\varphi_{2x}+f(-x,t)\varphi_1=\lambda\varphi_2,$$

свойства которого подробно изучены в [4] и, следовательно, могут быть использованы в методе обратной задачи рассеяния.

2. Системы (1.12) и (1.15) являются обобщением системы уравнений (1.11).

3. Получены 1+1 и 2+1-мерные уравнения, обладающие общей задачей рассеяния второго порядка

$$\alpha\varphi_{1x}+\varphi_1\left[\frac{\gamma}{2k}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right]\ln u+u\varphi_2=\lambda\varphi_1;$$

$$a\varphi_{1x}-\alpha\varphi_{2x}+\left[\frac{a^2}{4\alpha^2}u+\frac{\gamma a}{2\alpha k}(\ln u)_y\right]\varphi_1-$$

$$-\varphi_2\left[\frac{\gamma}{2k}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right]\ln u=\lambda\varphi_1,$$

где для двумерного случая $u=u(x,y,t)$, а для получения одномерного случая достаточно положить $y=x$ и $\gamma=\beta+\alpha k$.

4. Найдено нелинейное уравнение в частных производных (2.32) с оператором рассеяние третьего порядка.

5. Проведены исследования полученных нелинейных уравнений и доказано, что

- (2.16) – сводится к квазилинейному уравнению параболического типа (3.1) на функцию трех переменных $v=v(\xi,\eta,\zeta)$;
- (2.16) – с помощью специальной замены переменных сводится к квазилинейному уравнению гиперболического типа (3.23) на функцию двух переменных $v=v(\vartheta,\tau)$;
- (2.31) – приводится к квазилинейному уравнению гиперболического типа (3.26) на функцию двух переменных $w=w(\tilde{x},\tilde{z})$.

6. Для уравнений (2.16), (3.1), (3.23), (3.26) найдены точные решения специального вида.

Список литературы

1. Богоявленский О.И. Опрокидывающиеся солитоны в новых двумерных интегрируемых уравнениях // Изв. АН СССР Сер. матем. – 1989. – Т. 53, № 2. – С. 243-258.

2. Редькина Т.В., Карюк А.И. Нелинейное уравнение, обладающее оператором рассеяния третьего порядка // Труды международной конференции «Современные методы ф. – м. наук» – Орел, 2006. – Т. I. – С. 70-76.

3. Редькина Т.В. Возможность построения солитонных 1+1 и 2+1-мерных уравнений, имеющих общую задачу рассеяния // Вестник СГУ. – Ставрополь, 2005. – № 43. – С. 47-52.

4. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. – М.: Наука, 1988. – 340 с.

Поступила в редколлегию 22.02.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Бильчук, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

НЕЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ В ЧАСТКОВИХ ПОХІДНИХ, ЩО МАЮТЬ ОПЕРАТОРНУ СТРУКТУРУ ІЗОСПЕКТРАЛЬНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Редькіна Т.В., Карюк А.І., Лушнікова Г.О.

У статті продемонстрована побудова нелінійних рівнянь що мають як оператори розсіяння L: оператор Дірака, оператор першого порядку з матричними коефіцієнтами 2×2 і 3×3. Отримана нова система нелінійних рівнянь в часткових похідних, що має рівняння на власне значення з оператором Дірака. Отримані 1+1 і 2+1-мірні рівняння, що мають загальне завдання на власні значення і різними операторами A. Знайдено нелінійне рівняння в часткових похідних з оператором розсіяння третього порядку. Для розглянутих в статті рівнянь знайдені точні рішення спеціального вигляду.

Ключові слова: *Нелінійні диференціальні рівняння в часткових похідних, солітонні рівняння.*

NONLINEAR EQUALIZATIONS IN PRIVATE DERIVATIVE, HAVING AN OPERATOR STRUCTURE OF ISOSPECTRAL DEFORMATION

Redkina T.V., Karyuk A.I., Lushnikova G.A.

The construction of non-linear equations, which have as the operator of diffusement L : Dirac's operator, the first-rate operator with matrix factors 2x2 and 3x3 is demonstrated in the article. The new system of non-linear in private derivatives, which has an equation on its own value with Dirac's operator, is got 1+1 and 2+1-dimensional equations, which possess common task on their own values and different operators A are got. Non-linear equation in private derivatives with the third-rate diffusement operator is found. For the equations given in the article the precise solutions of special kind are found.

Keywords: *non-linear equations in private derivatives, soliton equations.*