УДК 519.2

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ В УПРОЩЕННОЙ ЗАПИСИ

к.т.н. В.Ю. Дубницкий, к.т.н. Н.А. Цейтлин
(представил д.ф - м.н. С.В. Смеляков)

Для уменьшения объема обрабатываемой информации и повышения ее помехозащищенности предложен способ упрощенного представления корреляционной матрицы (КМ).

Максимального сокращения записи корреляционной матрицы (КМ) с сохранением достаточной для практики точности ее элементов можно добиться следующим образом. Отрезок **(-I, I)** области значений элементов $\mathbf{r_{ij}}$ КМ можно разделить на ряд интервалов статистической неразличимости (СН). Значения $\mathbf{r_{ij}}$, попадающие в соответствующий интервал, можно считать равными соответствующему значению $\boldsymbol{\rho_{ni}}$ и закодировать его соответствующим символом, подлежащим передаче. Коды модулей значений $\mathbf{r_{ij}}$, учитывая, что $\mathbf{r_{ij} = r_{ji}}$, располагают над главной диагональю КМ, а знаки $\mathbf{r_{ij}}$ под ней.

Первый интервал СН $(-\rho_1, \rho_1)$ в окрестности нуля рассчитывается на основании статистического критерия проверки гипотезы о том, что коэффициент корреляции $\rho = 0$ против альтернативы $\rho \neq 0$ на уровне значимости α_1. Границы $(-\rho_1)$ и ρ_1 первого интервала СН являются верхней и нижней границами второго и третьего интервалов $(-\rho_2, -\rho_1]$ и $[\rho_1, \rho_2)$, характеризующих неразличимость оценок $\mathbf{r_{ij}}$, попадающих в эти интервалы на уровне значимости α_2. Аналогично строятся следующие интервалы СН.

Учитывая симметрию относительно нуля распределений двух оценок коэффициентов корреляции $(-r)$ и r с математическими ожиданиями $(-\rho)$ и ρ, равными по абсолютной величине, будем рассматривать только половину $(0, 1)$ области значений величины ρ. На области $(0, 1)$ строятся интервалы СН $(0, \rho_1)$, $[\rho_1, \rho_2),\dots,[\rho_n,1)$.

Распределение оценки r величины коэффициента корреляции $\rho \neq 0$ асимметрично относительно математического ожидания так, что при одинаковых уровнях значимости α_i каждый следующий интервал СН $[\rho_i, \rho_{i+1})$ уже предыдущего $[\rho_{i-1}, \rho_i)$ ($i = \overline{2, n-1}$). При большом числе N опытов, по результатам которых рассчитывают оценки $\mathbf{r_{ij}}$ из КМ, таких интервалов может оказаться слишком много, что неудобно для анализа. Для уменьшения числа интервалов используем два приема:

1) задаемся верхним пределом ρ_m дробления отрезка **(0, 1)** интервалами так, что интервал $[\rho_{n-1}, \rho_n)$, накрывающий значение ρ_m, является предпоследним; последним является интервал $[\rho_n, 1)$. Рекомендуется принимать величину $\rho_m = 0{,}999$;

2) первый интервал СН $(0, \rho_1)$ строится на «обычном» уровне значимости α_1 (например, $\alpha_1 = 0{,}05$), а предпоследний интервал $[\rho_{n-1}, \rho_n)$ – на очень малом уровне значимости α_m (например, $\alpha_m = 0{,}001$). Промежуточные интервалы строятся на уровнях значимости $\alpha_i \in (\alpha_n, \alpha_1)$, которые предлагается определять по формуле:

$$\alpha_i = \alpha_1 \left(\frac{\alpha_m}{\alpha_1} \right)^{\frac{\rho_{i-1}}{\rho_m}}; \quad i = \overline{2, n}. \tag{1}$$

Для дальнейшего изложения, следуя [1], введем оценку $\hat{\alpha}$ уровня значимости $\hat{\alpha} = P(U \in \Omega \mid H)$, где: **P** – вероятность события; $\Omega \subseteq W$; **W** – пространство всех возможных значений статистики **U**, причем $\Omega = \left(-\infty, \hat{U} \right]$ при сложной левосторонней альтернативе (H_1: $\rho<\rho_i$); $\Omega = \left[\hat{U}, -\infty \right)$ при сложной правосторонней альтернативе (H_1: $\rho>\rho_i$); $\Omega = \left(-\infty, \hat{U}_\Lambda \right] \cup \left[\hat{U}_\Pi, -\infty \right)$ при сложной двухсторонней альтернативе (H_1: $\rho\neq\rho_i$), где $\hat{U} \in W$ – значение статистики **U** в эксперименте; $P\left(U < \hat{U}_\Lambda \right) = P\left(U > \hat{U}_\Pi \right)$.

Для практических расчетов использованы такие $U_{\alpha/n}$, которые удовлетворяют условию $P\left(U > \hat{U}_{\alpha/k} \right) = \hat{\alpha}/k$, где: **k** – число альтернатив, $k \in \left\{ \overline{1,2} \right\}$.

Интервалы СН строят с помощью следующих преобразований. Используется аппроксимация для верхнего $\alpha/2$ – предела нормированного нормального распределения величины $U \sim N(0,1)$, причем [1]

$$U_{\alpha/2} = 1{,}94\left(-\lg\left(\alpha\left(2-\alpha\right)\right)\right)^{0,5}; U_{\alpha/2} \in U; \tag{2}$$

аппроксимация для верхнего $\alpha/2$ – предела $t_{f,\alpha/2}$ $(f = N - 2)$ распределения Стьюдента t_f с f степенями свободы [1]:

$$t_{f,\alpha/2} = U_{\alpha/2}\left(1 + U_{\alpha/2} / \left(N + 1 - 1{,}5U_{\alpha/2}\right)\right); \; t_{f,\alpha/2} \in T_f. \tag{3}$$

При числе опытов $N > 9$ используется преобразование [1]

$$\rho_i = \mathrm{th} z_i = \left(e^{z_i} - e^{-z_i}\right) / \left(e^{z_i} + e^{-z_i}\right), \; z_i \in R^1, \tag{4}$$

где $z_i \sim N\left(\nu_i, \sigma_z^2\right)$ с центром υ_i и дисперсией σ_z^2; $i \in I$, причем

$$\sigma_z = (n-3)^{-0,5}; \tag{5}$$

при малом числе опытов ($4 \le N \le 9$) – из распределения Стьюдента [2]:

$$\rho_i = t_i \Big/ \left(t_i^2 + N - 2\right)^{0,5}; \; t_i \in T_f. \tag{6}$$

Определим границы $\rho_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ интервалов СН для абсолютных величин коэффициентов корреляции на области $(0, 1)$. Пусть $N > 9$. Найдем верхнюю границу ρ_1 первого интервала СН $(0, \rho_1)$. Для проверки гипотезы $\rho = 0$ против альтернативы $\rho \neq 0$ используется статистика $\hat{U} = z_1 / \sigma_z$. Заменив статистику $\hat{U}$ критическим значением $U_{\alpha_1/2}$ и выразив σ_z через N, получим значение

$$z_1 = U_{\alpha_1/2}\left(N - 3\right)^{-0,5}, \tag{7}$$

которое по формуле (4) приводит к границе ρ_1.

Границы ρ_i второго и следующих интервалов СН $\left(\rho_{i-1}, \rho_i\right]$ $\left(i = \overline{2,n}\right)$ строим, исходя из гипотезы $\rho_i = \rho_{i-1}$ против альтернативы против $\rho_i \neq \rho_{i-1}$.

Определив по формуле (1) критическое значение уровня значимости α_{2i}, используем выражение для критерия значимости [2]

$$U\alpha_i/2 = \left(z_i - z_{i-1}\right) / \left(\sigma_z \sqrt{2}\right),$$

откуда

$$z_i = z_{i-1} + U_{\alpha_i/2}\left(2/(N-3)\right)^{0,5}; \; i = \overline{2,n}, \tag{8}$$

и по формуле (5) находим ρ_i.

Для расчета принятых значений $\rho_{\Pi i}\,(i = \overline{2,n})$ коэффициентов корреляции берутся середины интервалов $\left(z_{i-1}, z_i\right]$: $z_{\Pi i} = \left(z_{i-1} + z_i\right)/2$, а затем по формуле (4) определяют $\rho_{\Pi i} = \mathrm{th} z_{\Pi i}$ (значение $\rho_{п1} = 0$).

При $4 \le N \le 9$ для построения границ ρ_i интервалов СН используется распределение Стьюдента.

Значение ρ_1 вычисляется по формуле (6), где величина t_1 определяется при заданном α_1 по формуле (2) и (3). Следующие границы ρ_i определяются по формуле (6), где

$$t_i = t_{i-1} + t_{f,\alpha_i/2}\sqrt{2}\,;\ \ i = \overline{2,n}\,, \tag{9}$$

а значения α_i – по формуле (1); $t_{f,\alpha_i/2}$ - по формулам (2) и (3).

Принятые значения $\rho_{пi}$ ($i = \overline{2,n}$) определяют по формуле (6), где вместо t_i используется полусумма $(t_{i-1} + t_i)/2$, $\rho_{n1} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цейтлин Н.А. Применение методов математической теории эксперимента в содовой промышленности. Обзорная информация // Серия «Содовая промышленность». – М.: НИИТЭХИМ, 1984. – 36 с.
2. Закс Л. Статистическое оценивание. – М.: Статистика, 1976. - 598с.

УДК 621.391.1

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОЙ ПОЛОСЫ СПЕКТРА СИГНАЛОВ ШИРОКОПОЛОСНЫХ СИСТЕМ КОСМИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

проф. В.П. Пашинцев, Р.П. Гахов, М.Э. Солчатов, А.А. Смирнов[*]

В статье приводится методика определения оптимальной ширины спектра широкополосных сигналов для обеспечения минимальной вероятности ошибочного приема в системах космической связи, функционирующих в условиях комплексного воздействия узкополосных активных помех и искусственных возмущений ионосферы.

Известно [1 – 3], что повышение помехоустойчивости приема широкополосных сигналов (ШПС) оптимальной схемой их обработки на фоне флуктуационных шумов при воздействии сосредоточенной по спектру активной помехи (АП) достигается путем увеличения базы сигнала $B_c = T_c \cdot F_c$, где T_c – длительность сигнала, F_c – ширина его спектра. В системах космической связи (СКС) для обеспечения требуемой вероятности ошибочного приема информационного символа $P_{ош} \le 10^{-3}$ используются ШПС с базами $B_c = 10^4 \div 10^5$ и полосами спектра $F_c = 10^6 \div 10^7$ Гц. Однако в условиях искусственных возмущений ионосферы (ИВИ) при указанных значениях F_c может выполняться условие $F_c \ge F_к$ возникновения частотно - селективных замираний (ЧСЗ) в каналах космической связи, поскольку при ИВИ значение полосы когерентности ионосферы сужается до величины $F_к < 10^5$ Гц [4]. При этом помехоустойчивость приема ШПС будет существенно ухудшаться, и может характеризоваться величиной вероятности ошибки $P_{ош} \sim 10^{-1}$ [4]. При комплексном воздействии на СКС активных узкополосных помех и ИВИ возникает противоречие в выборе ширины спектра ШПС. С одной стороны, помехоустойчивость приемника ШПС при воздействии сосредоточенных по спектру АП с увеличением базы сигнала возрастает за счет увеличения ширины его спектра F_c при постоянной длительности сигнала T_c, а с другой стороны, при наличии ИВИ, она уменьшается. Очевидна задача оптимизации ширины спектра ШПС по критерию минимума вероятности ошибки в условиях комплексного воздействия АП и ИВИ.

Целью статьи является получение аналитической зависимости оптимальной ширины спектра ШПС от значений мощности помехи $P_п$ и полосы когерентности ионосферы $F_к$ для указанных выше условий.

Известно [1], что $P_{ош}$ при некогерентной схеме обработки ШПС в условиях воздействия АП определяется как

$$P_{ош} = \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{E_c}{2\left(N_0 + P_п / F_c\right)}\right], \quad (1)$$

где $E_c = P_c \cdot T_c$ – энергия принимаемого сигнала; P_C – мощность принимаемого сигнала, N_0 – спектральная плотность мощности флуктуационного шума. Данное выражение можно представить в виде

$$P_{ош} = \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{h_0^2}{2\left(1 + P_п / \left(N_0 F_c\right)\right)}\right] = \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{h_0^2 \eta_п}{2}\right], \quad (2)$$

где $h_0^2 = E_c / N_0 = P_c T_c / N_0$ – энергетическое отношение сигнал / шум на входе схемы обработки, а коэффициент энергетических потерь при обработке сигнала из-за воздействия АП равен

$$\eta_{п} = \left[1 + P_{п} / \left(N_0 \cdot F_c\right)\right]^{-1} \tag{3}$$

Известно [5, 6] выражение для оценки помехоустойчивости некогерентного приема ШПС при ИВИ, вызывающих ЧСЗ

$$P_{ош} = \frac{1}{2 + h_0^2 \eta_{ч}} \ , \tag{4}$$

где коэффициент энергетических потерь при обработке сигнала из-за ЧСЗ равен

$$\eta_{ч} = \left[1 + 4F_c^2 \Big/ \left(\pi F_{к}^2\right)\right]^{-1/2} \ . \tag{5}$$

Известна [3] методика оценки вероятности ошибки при некогерентном приеме ШПС в каналах связи с рэлеевскими замираниями (когда $F_c << F_{к}$ и $\eta_{ч} = 1$), узкополосной АП и флуктуационными шумами. Теоретическое обобщение данной методики на случай приема сигналов с ЧСЗ позволяет получить выражение для $P_{ош}$ некогерентного приема ШПС в условиях комплексного воздействия АП и ИВИ с учетом (1) – (5) в виде

$$P_{ош} = \frac{1}{2 + h_0^2 \eta_{п} \eta_{ч}} = \frac{1}{2 + h_0^2 / q} \ , \tag{6}$$

где энергетический проигрыш, учитывающий воздействие АП и ЧСЗ на обработку принимаемого сигнала, равен

$$q = 1/\left(\eta_{п}\eta_{ч}\right) = \left[1 + P_{п} / \left(N_0 \cdot F_c\right)\right] \cdot \left[1 + 4F_c^2 \Big/ \left(\pi F_{к}^2\right)\right]^{1/2} . \tag{7}$$

Очевидно, что $P_{ош}$ будет минимальной при наименьшем значении q. В условиях отсутствия АП ($P_{п} = 0$) и ЧСЗ принимаемого сигнала ($F_c << F_{к}$) значение $q = 1$. При комплексном воздействии АП ($P_{п} > 0$) и ИВИ по мере увеличения ширины спектра ШПС (F_c) вклад первого сомножителя (7) в значение $q > 1$ будет уменьшаться, а второго сомножителя – возрастать, и наоборот.

Искомое выражение для оптимальной ширины спектра ШПС может быть получено путем нахождения минимума функции $q(F_c)$. Для этого необходимо найти первую производную $q(F_c)$ по F_c, приравнять ее к нулю и решить уравнение для переменной F_c. В результате получим:

$$q(F_c)' = \frac{4F_c}{\pi F_к^2}\left[1 + P_п /(N_0 \cdot F_c)\right]\cdot\left[\frac{1+4F_c^2}{\left(\pi F_к^2\right)}\right]^{1/2} - \frac{P_п}{N_0 F_c}\left[1 + 4F_c^2/\left(\pi F_к^2\right)\right]^{1/2}, \quad (8)$$

$$F_{c.опт} = \left(\frac{\pi P_п F_к^2}{4N_0}\right)^{1/3}, \quad (9)$$

где $F_{c.опт}$ - оптимальная ширина спектра ШПС для указанных выше условий. Полученное выражение (9) может быть приведено к виду

$$F_{c.опт} = \left(\frac{\pi}{4} h_п^2 \frac{F_к^2}{T_c}\right)^{1/3}, \quad (10)$$

где $h_п^2 = E_п/N_0 = P_п T_c/N_0$ - отношение энергии сосредоточенной помехи $E_п$ на длительности полезного сигнала T_c к спектральной плотности флуктуационного шума на входе схемы обработки [3].

Выражения (9,10) позволяют по заданным значениям $F_к, N_0$ и $P_п$ (или $h_п^2, T_c$) рассчитать оптимальную ширину спектра ШПС, передаваемых в условиях комплексного воздействия АП и ИВИ. Очевидно, что использование ШПС с $F_c = F_{c.опт}$ позволит минимизировать энергетический проигрыш q, а следовательно, согласно выражению (6), обеспечить минимальную $P_{ош}$ приема ШПС в указанных выше условиях функционирования СКС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шумоподобные сигналы в системах передачи информации / Под ред. В.Б. Пестрякова. - М.: Сов. радио, 1973. - 424 с.

2. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. - М.: Радио и связь, 1985. - 384 с.

3. Сикарев А.А., Фалько А.И.. Оптимальный прием дискретных сообщений. - М.: Связь, 1978. - 328 с.

4. Богуш Р.Л. и др. // ТИИЭР. - 1983. - № 6. - С. 78 - 94.

5. Пашинцев В.П. и др. // Радиотехника. - 1991. - № 11. - С.80 - 83.

6. Пашинцев В.П. // Радиотехника и электроника. - 1998. - № 4. - С. 410 – 414.