

## ПОСТРОЕНИЕ ТРАНЗИТИВНО – РЕФЛЕКСИВНЫХ ЗАМКНИЙ БИНАРНО - УНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕОРГРА- ФОВ

к.т.н. А.В. Кузнецов, В.Н. Бацамут  
(представил д.т.н., проф. Ю.В. Стасев)

Предложены основанные на матричных массивах достижимостей и блочно - диагональном алгоритмизированные процедуры поиска транзитивности и рефлексивности соответственно бинарных и унарных отношений на неориентированных сетевых моделях объектов.

Поиск транзитивно - рефлексивных замыканий (ТРЗ) на графовых структурах имеет большое прикладное значение в задачах топологического контроля распределенных систем с сетевой схемой организации взаимодействия элементов.

В настоящее время известен ряд методов определения ТРЗ на графах [1, 2], однако, как правило, они функционально избыточны (формируют не требуемые в данном случае кратчайшие пути между всеми вершинами), не содержат компоненты выделения рефлексивности вершин графа, недостаточно алгоритмизированы. В статье предлагается алгоритм поиска ТРЗ в неорграфах, свободный от указанных недостатков.

Алгоритм основан на анализе блочно - диагональной матрицы  $(\mathbf{R}_G \otimes \mathbf{Q}_G)'$  исходного неорграфа  $\mathbf{G}$ , при этом будем полагать заданными его матрицы смежности  $\mathbf{S}_G = [s_{ij}]$  и достижимостей  $\mathbf{R}_G = [r_{ij}]$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , где  $n$  - число вершин в  $\mathbf{G}$ , и учитывать известное утверждение о том, что матрица  $\mathbf{R}_G$  с обнуленными всеми главными диагональными элементами соответствует транзитивным замыканиям в  $\mathbf{G}$  [1].

Очевидно, что для любого неорграфа его матрица  $\mathbf{R}_G$  симметрична относительно главной диагонали и полностью совпадает с матрицей контрдостижимостей  $\mathbf{Q}_G = [q_{ij}]$ . Из данного утверждения следует, что матрица взаимных достижимостей  $(\mathbf{R}_G \otimes \mathbf{Q}_G)$  графа  $\mathbf{G}$  также идентична массивам  $\mathbf{R}_G$  и  $\mathbf{Q}_G$ , поскольку образуется из них путем поэлементного позиционного умножения их элементов [3].

В связном неорграфе матрица  $\mathbf{R}_G$  есть единичная матрица. Следовательно, массив  $(\mathbf{R}_G \otimes \mathbf{Q}_G)'$ , образуемый из матрицы  $(\mathbf{R}_G \otimes \mathbf{Q}_G)$  путем стя-

гивания в ней идентичных строк и столбцов [3], состоит из одного единичного блока, а граф  $\mathbf{G}$  - из одной сильной компоненты (СК). Все вершины такого  $\mathbf{G}$  транзитивно и рефлексивно замкнуты.

В случае несвязного неорграфа матрица  $(\mathbf{R}_G \otimes \mathbf{Q}_G)'$  содержит несколько единичных блоков в главной диагонали. Число таких блоков указывает на число СК графа (соответствующих его компонентам связности), а вершины, входящие в состав каждого блока, на количественный и индексный состав СК. Если в блоках присутствуют два и более индекса, то все вершины в  $\mathbf{G}$  по – прежнему рефлексивны, однако транзитивность их справедлива лишь в пределах этих блоков. Если в  $(\mathbf{R}_G \otimes \mathbf{Q}_G)'$  имеется единичный блок, включающий единственную  $I_i$  - ю вершину, это означает, что она в структуре графа является изолированной и, следовательно, не входит ни в одно бинарное, а значит по индукции и унарное, отношение связности в графе  $\mathbf{G}$ , разумеется, при условии отсутствия петли при  $I_i$  ( $S_G \ni s_{ii} = \mathbf{0}$ ). Это, в свою очередь, свидетельствует, что в таком случае данной вершине не присущи не только транзитивность, но и рефлексивность связности в  $\mathbf{G}$ , что эквивалентно замене соответствующего ей главнодиagonalного единичного элемента  $r_{ii}$  в  $\mathbf{R}_G$  на  $\mathbf{0}$ . Аналогично проанализировав все блоки в  $(\mathbf{R}_G \otimes \mathbf{Q}_G)'$ , получим измененную матрицу  $\mathbf{R}_G$ , представляющую собой искомую матрицу смежности  $\mathbf{A}_G^*$  графа  $\mathbf{G}^*$ , являющегося графом транзитивно - рефлексивных замыканий исходного графа  $\mathbf{G}$ .

Сделаем ряд важных выводов:

1. Для всех связных неорграфов справедливы равенства  $\mathbf{A}_G^* = \mathbf{R}_G$  и  $\forall r_{ij} = 1$ .
2. Для вершин, входящих в блоки матрицы  $(\mathbf{R}_G \otimes \mathbf{Q}_G)'$  размерности  $2 \times 2$  и более, присущи рефлексивные и внутриблочные транзитивные замыкания.
3. Между СК неорграфа транзитивных замыканий нет.
4. Изолированная вершина неорграфа транзитивных замыканий не имеет.
5. Для изолированной вершины  $I_i$  неорграфа, содержащей петлю ( $I_i \in \mathbf{G}, s_{ii} = 1$ ), существует рефлексивное замыкание.
6. Измененная по главной диагонали матрица  $\mathbf{R}_G$  несвязного неорграфа  $\mathbf{G}$ , включающего изолированные безпетельные вершины  $I_i$ , ( $\forall r_{ii} := \mathbf{0} \mid I_i \in \mathbf{G}, s_{ii} = \mathbf{0}$ ) соответствует искомой матрице  $\mathbf{A}_G^*$ .

С учетом выше сказанного представим общую схему алгоритма синтеза матрицы  $\mathbf{A}_G^*$  (рис.1), однозначно определяющей ТРЗ произвольных неорграфов.

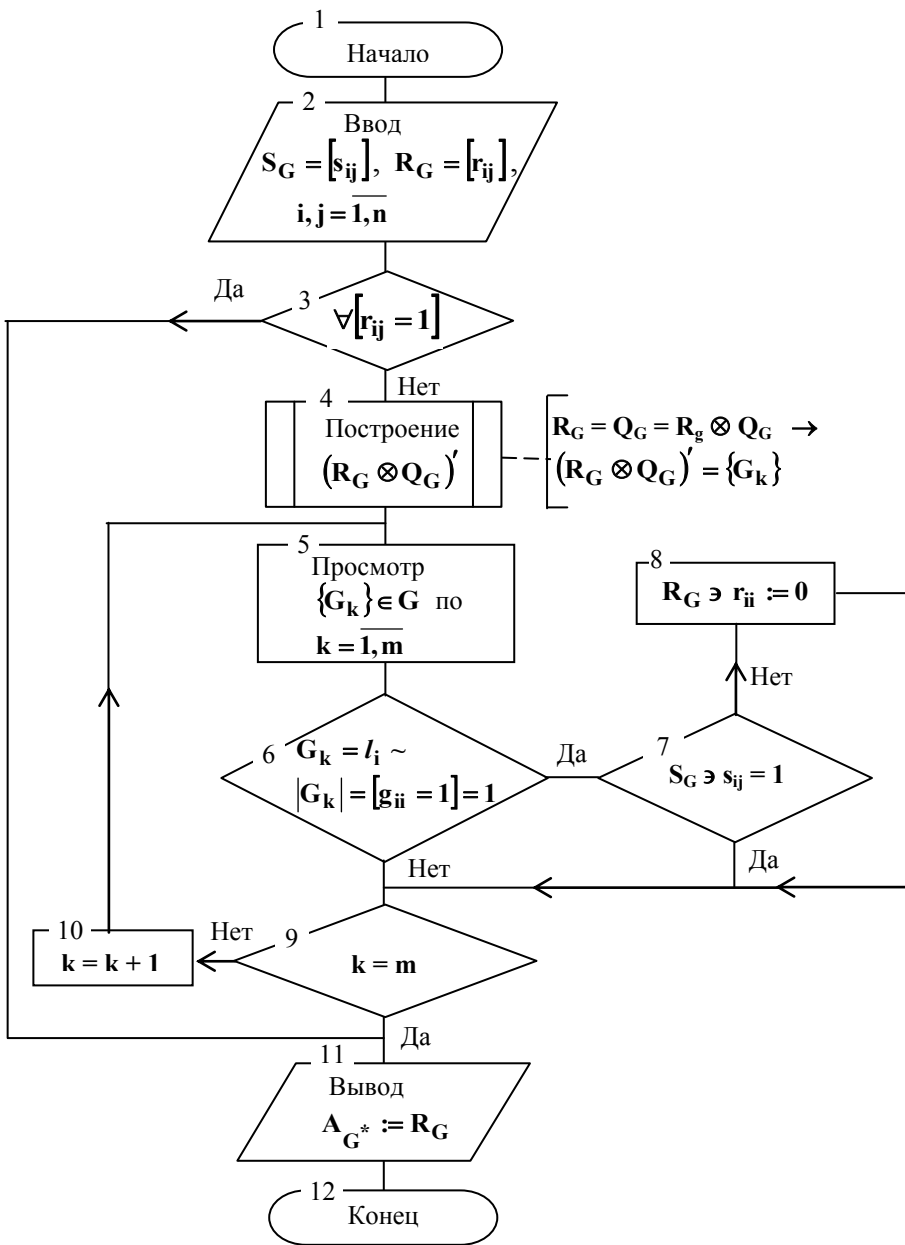


Рис.1. Схема алгоритма поиска ТРЗ в неорграфе G

Проиллюстрируем примером поэтапное решение задачи.  
 Блок 2. Задан неорграф  $G$  (рис. 2) и его матрицы  $S_G(1)$  и  $R_G(2)$ .

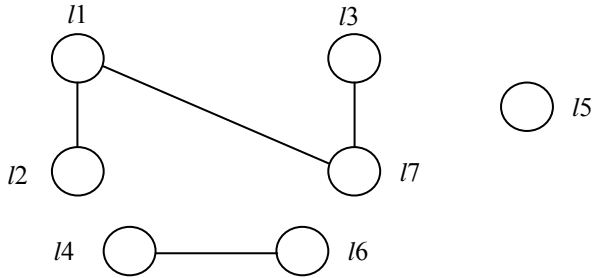


Рис.2. Исходный неорграф  $G$

$$S_G = \begin{array}{c|ccccccc} & I1 & I2 & I3 & I4 & I5 & I6 & I7 \\ \hline I1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ I2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ I4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ I5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ I7 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (1) \quad R_G = \begin{array}{c|ccccccc} & I1 & I2 & I3 & I4 & I5 & I6 & I7 \\ \hline I1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ I2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ I3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ I4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ I5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ I6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ I7 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (2)$$

Блок 3. Так как не все элементы в (2) равны 1, строим матрицу  $(R_G \otimes Q_G)'$ .

Блок 4. Так как  $R_G = Q_G = (R_G \otimes Q_G)$ , матрицу  $(R_G \otimes Q_G)'$  определяем путем стягивания в сторону старших индексов идентичных строк и столбцов матрицы  $R_G$  (3).

$$(R_G \otimes Q_G)' = \begin{array}{c|cccccc} & I1 & I2 & I3 & I7 & I4 & I6 & I5 \\ \hline I1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ I2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ I3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ I7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline I4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ I6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline I5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (3)$$

Производим анализ матрицы  $(R_G \otimes Q_G)'$ , он показывает, что в графе  $G$  имеются три СК  $\{G_k\}$  ( $k = \overline{1, m}, m = 3$ ):

$$G_1 = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_7, \quad G_2 = I_4 \cup I_6, \quad G_3 = I_5.$$

Блок 5. Выполняем последовательный просмотр  $\{G_k\}$  по  $k = \overline{1,3}$  (блоки 9 и 10).

Блок 6. Только одна СК  $G_3$  состоит из одной изолированной вершины  $l_5$ .

Блок 7. При вершине  $l_5$  в  $G$  петли нет, ибо, согласно (1),  $S_G \ni s_{55} = 0$ .

Блок 8. В матрице  $R_G$  элемент  $r_{55} := 0$ .

Блок 11. Измененную таким образом матрицу  $R_G$  полагаем искомой матрицей  $A_G^*$  (4) графа  $G^*$  (рис. 3).

$$A_{G^*} = \begin{array}{c|cccccc} & l1 & l2 & l3 & l4 & l5 & l6 & l7 \\ \hline l1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ l2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ l3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ l4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ l5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ l7 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (4)$$

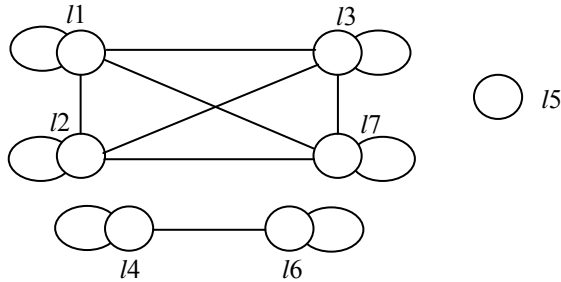


Рис. 3. Граф  $G^*$  ТРЗ исходного неорграфа  $G$

Кроме приведенных выше преимуществ, предложенный алгоритм характеризуется полиномиальной, не превышающей  $O(n^3)$ , вычислительной сложностью, определяемой трудоемкостью этапа синтеза матрицы  $(R_G \otimes Q_G)'$ , следовательно он может найти применение в реальных прикладных задачах построения ТРЗ неорграфов, а также анализа их связности путем поиска числа и индексного состава соответствующих компонент связности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. - М.: Мир, 1978. - 432 с.
2. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. - 213 с.

3. Войтенко В.Я., Кузнецов А.В. Синтез технической структуры АСУ ТП на основе конденсации графовой функциональной модели системы // Приборы и системы управления. - 1991. - № 4. – С. 6 – 8.

---