

ПОСТРОЕНИЕ ТРАНЗИТИВНО – РЕФЛЕКСИВНЫХ ЗАМКНИЙ БИНАРНО - УНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕОРГРА- ФОВ

к.т.н. А.В. Кузнецов, В.Н. Бацамут
(представил д.т.н., проф. Ю.В. Стасев)

Предложены основанные на матричных массивах достижимостей и блочно - диагональном алгоритмизированные процедуры поиска транзитивности и рефлексивности соответственно бинарных и унарных отношений на неориентированных сетевых моделях объектов.

Поиск транзитивно - рефлексивных замыканий (ТРЗ) на графовых структурах имеет большое прикладное значение в задачах топологического контроля распределенных систем с сетевой схемой организации взаимодействия элементов.

В настоящее время известен ряд методов определения ТРЗ на графах [1, 2], однако, как правило, они функционально избыточны (формируют не требуемые в данном случае кратчайшие пути между всеми вершинами), не содержат компоненты выделения рефлексивности вершин графа, недостаточно алгоритмизированы. В статье предлагается алгоритм поиска ТРЗ в неорграфах, свободный от указанных недостатков.

Алгоритм основан на анализе блочно - диагональной матрицы $(\mathbf{R}_G \otimes \mathbf{Q}_G)'$ исходного неорграфа \mathbf{G} , при этом будем полагать заданными его матрицы смежности $\mathbf{S}_G = [s_{ij}]$ и достижимостей $\mathbf{R}_G = [r_{ij}]$, $i, j = \overline{1, n}$, где n - число вершин в \mathbf{G} , и учитывать известное утверждение о том, что матрица \mathbf{R}_G с обнуленными всеми главными диагональными элементами соответствует транзитивным замыканиям в \mathbf{G} [1].

Очевидно, что для любого неорграфа его матрица \mathbf{R}_G симметрична относительно главной диагонали и полностью совпадает с матрицей контрдостижимостей $\mathbf{Q}_G = [q_{ij}]$. Из данного утверждения следует, что матрица взаимных достижимостей $(\mathbf{R}_G \otimes \mathbf{Q}_G)$ графа \mathbf{G} также идентична массивам \mathbf{R}_G и \mathbf{Q}_G , поскольку образуется из них путем поэлементного позиционного умножения их элементов [3].

В связном неорграфе матрица \mathbf{R}_G есть единичная матрица. Следовательно, массив $(\mathbf{R}_G \otimes \mathbf{Q}_G)'$, образуемый из матрицы $(\mathbf{R}_G \otimes \mathbf{Q}_G)$ путем стя-

гивания в ней идентичных строк и столбцов [3], состоит из одного единичного блока, а граф \mathbf{G} - из одной сильной компоненты (СК). Все вершины такого \mathbf{G} транзитивно и рефлексивно замкнуты.

В случае несвязного неорграфа матрица $(\mathbf{R}_G \otimes \mathbf{Q}_G)'$ содержит несколько единичных блоков в главной диагонали. Число таких блоков указывает на число СК графа (соответствующих его компонентам связности), а вершины, входящие в состав каждого блока, на количественный и индексный состав СК. Если в блоках присутствуют два и более индекса, то все вершины в \mathbf{G} по – прежнему рефлексивны, однако транзитивность их справедлива лишь в пределах этих блоков. Если в $(\mathbf{R}_G \otimes \mathbf{Q}_G)'$ имеется единичный блок, включающий единственную I_i - ю вершину, это означает, что она в структуре графа является изолированной и, следовательно, не входит ни в одно бинарное, а значит по индукции и унарное, отношение связности в графе \mathbf{G} , разумеется, при условии отсутствия петли при I_i ($S_G \ni s_{ii} = \mathbf{0}$). Это, в свою очередь, свидетельствует, что в таком случае данной вершине не присущи не только транзитивность, но и рефлексивность связности в \mathbf{G} , что эквивалентно замене соответствующего ей главнodiагонального единичного элемента r_{ii} в \mathbf{R}_G на $\mathbf{0}$. Аналогично проанализировав все блоки в $(\mathbf{R}_G \otimes \mathbf{Q}_G)'$, получим измененную матрицу \mathbf{R}_G , представляющую собой искомую матрицу смежности \mathbf{A}_G^* графа \mathbf{G}^* , являющегося графом транзитивно - рефлексивных замыканий исходного графа \mathbf{G} .

Сделаем ряд важных выводов:

1. Для всех связных неорграфов справедливы равенства $\mathbf{A}_G^* = \mathbf{R}_G$ и $\forall r_{ij} = 1$.
2. Для вершин, входящих в блоки матрицы $(\mathbf{R}_G \otimes \mathbf{Q}_G)'$ размерности 2×2 и более, присущи рефлексивные и внутриблочные транзитивные замыкания.
3. Между СК неорграфа транзитивных замыканий нет.
4. Изолированная вершина неорграфа транзитивных замыканий не имеет.
5. Для изолированной вершины I_i неорграфа, содержащей петлю ($I_i \in \mathbf{G}, s_{ii} = 1$), существует рефлексивное замыкание.
6. Измененная по главной диагонали матрица \mathbf{R}_G несвязного неорграфа \mathbf{G} , включающего изолированные безпетельные вершины I_i , ($\forall r_{ii} := \mathbf{0} \mid I_i \in \mathbf{G}, s_{ii} = \mathbf{0}$) соответствует искомой матрице \mathbf{A}_G^* .

С учетом выше сказанного представим общую схему алгоритма синтеза матрицы \mathbf{A}_G^* (рис.1), однозначно определяющей ТРЗ произвольных неорграфов.

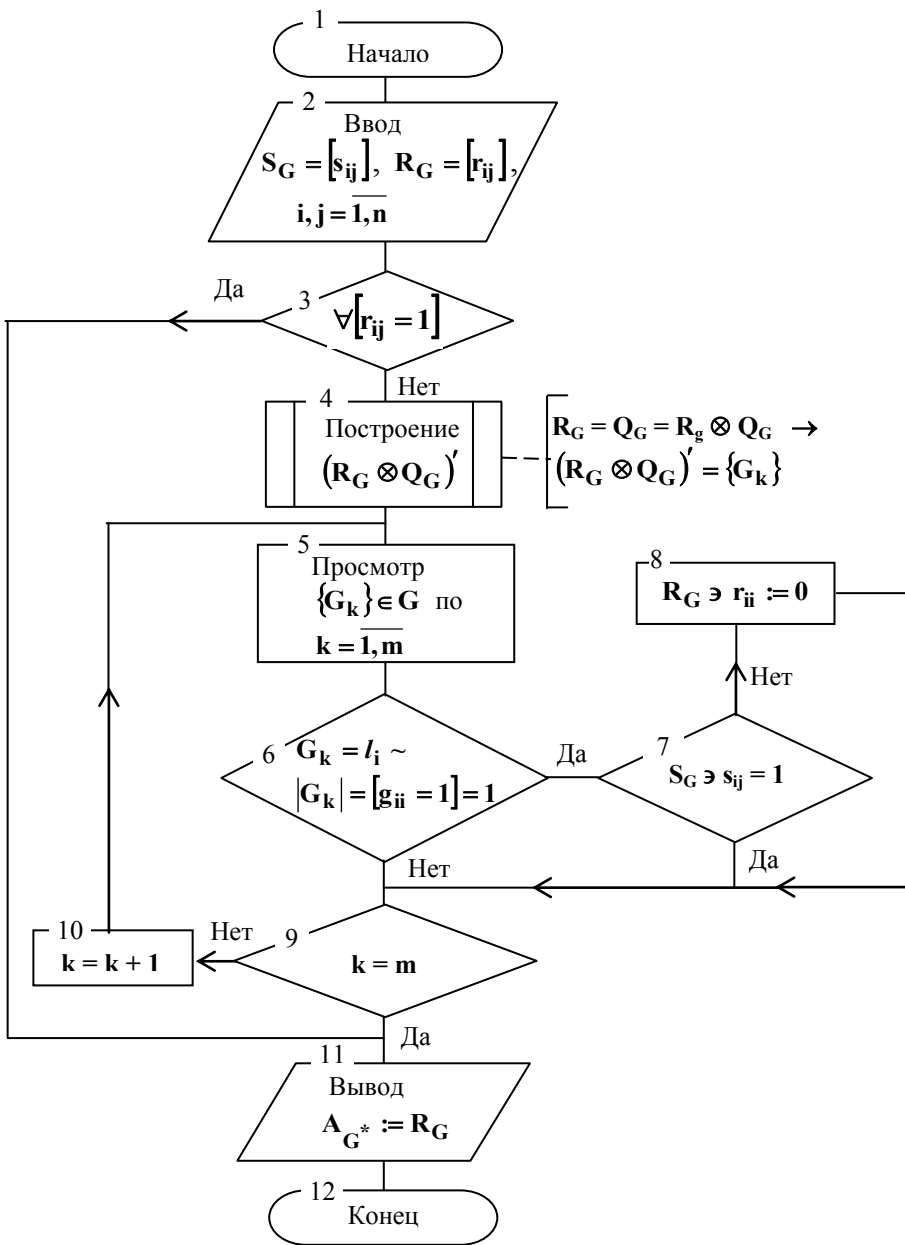


Рис.1. Схема алгоритма поиска ТРЗ в неорграфе G

Проиллюстрируем примером поэтапное решение задачи.
 Блок 2. Задан неорграф G (рис. 2) и его матрицы $S_G(1)$ и $R_G(2)$.

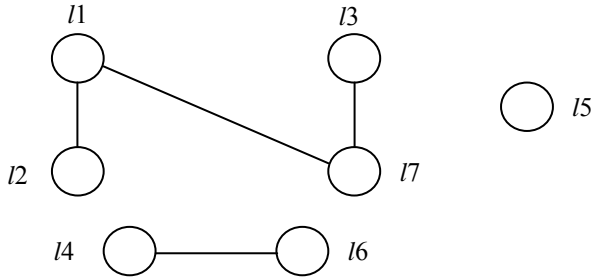


Рис.2. Исходный неорграф G

$$S_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} I1 & I2 & I3 & I4 & I5 & I6 & I7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} I1 \\ I2 \\ I3 \\ I4 \\ I5 \\ I6 \\ I7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

$$R_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} I1 & I2 & I3 & I4 & I5 & I6 & I7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} I1 \\ I2 \\ I3 \\ I4 \\ I5 \\ I6 \\ I7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2)$$

Блок 3. Так как не все элементы в (2) равны 1, строим матрицу $(R_G \otimes Q_G)'$.

Блок 4. Так как $R_G = Q_G = (R_G \otimes Q_G)$, матрицу $(R_G \otimes Q_G)'$ определяем путем стягивания в сторону старших индексов идентичных строк и столбцов матрицы R_G (3).

$$(R_G \otimes Q_G)' = \begin{matrix} & \begin{matrix} I1 & I2 & I3 & I7 & I4 & I6 & I5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} I1 \\ I2 \\ I3 \\ I7 \\ I4 \\ I6 \\ I5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3)$$

Производим анализ матрицы $(R_G \otimes Q_G)'$, он показывает, что в графе G имеются три СК $\{G_k\}$ ($k = \overline{1, m}, m = 3$):

$$G_1 = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_7, G_2 = I_4 \cup I_6, G_3 = I_5.$$

Блок 5. Выполняем последовательный просмотр $\{G_k\}$ по $k = \overline{1,3}$ (блоки 9 и 10).

Блок 6. Только одна СК G_3 состоит из одной изолированной вершины l_5 .

Блок 7. При вершине l_5 в G петли нет, ибо, согласно (1), $S_G \ni s_{55} = 0$.

Блок 8. В матрице R_G элемент $r_{55} := 0$.

Блок 11. Измененную таким образом матрицу R_G полагаем искомой матрицей A_G^* (4) графа G^* (рис. 3).

$$A_{G^*} = \begin{array}{c|cccccc} & l1 & l2 & l3 & l4 & l5 & l6 & l7 \\ \hline l1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ l2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ l3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ l4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ l5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ l7 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (4)$$

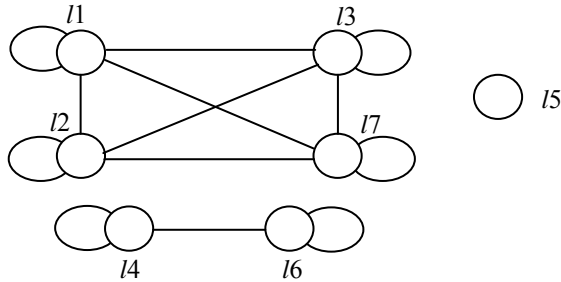


Рис. 3. Граф G^* ТРЗ исходного неорграфа G

Кроме приведенных выше преимуществ, предложенный алгоритм характеризуется полиномиальной, не превышающей $O(n^3)$, вычислительной сложностью, определяемой трудоемкостью этапа синтеза матрицы $(R_G \otimes Q_G)'$, следовательно он может найти применение в реальных прикладных задачах построения ТРЗ неорграфов, а также анализа их связности путем поиска числа и индексного состава соответствующих компонент связности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. - М.: Мир, 1978. - 432 с.
2. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. - 213 с.

3. Войтенко В.Я., Кузнецов А.В. Синтез технической структуры АСУ ТП на основе конденсации графовой функциональной модели системы // Приборы и системы управления. - 1991. - № 4. – С. 6 – 8.
