

## РАССЛОЕНИЯ НАД ТОЧКАМИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

А.А. Кузнецов, к.т.н. Н.В. Пастухов, к.т.н. А.В. Северинов, Н.Э. Рязанцев  
(представил д.т.н., проф. В.И. Долгов)

Рассматривается многообразие точек конечномерного пространства и его отображение в проективную область. Приводится оценка количества точек проективного конечномерного пространства как количество расслоений.

Пусть  $X_0, X_1, \dots, X_n$  - евклидовы координаты на  $C^{n+1}$ , а также соответствующие однородные координаты на  $P^n$ . Универсальное расслоение – это подрасслоение  $J \rightarrow P^n$  тривиального расслоения  $C^{n+1} \times P^n \rightarrow P^n$ , слоем которого над точкой  $X \in P^n$  является прямая  $\{\lambda X\}_{\lambda \in C^{n+1}}$ , соответствующая точке  $X$  [1]. Двойственным к  $J$  будет расслоение гиперплоскости  $H \rightarrow P^n$ , т.е. расслоение, слоем которого над  $X \in P^n$  является пространство линейных функционалов на прямой  $\{\lambda X\}$ .

В общем случае слой расслоения  $H^d$  над точкой  $X \in P^n$  совпадает с пространством линейных форм на прямой  $\{\lambda X\}_{\lambda \in C^{n+1}}$ , а поэтому любая  $d$  - линейная форма  $F$  на  $C^{n+1}$  индуцирует глобальное сечение расслоения  $H^d$  посредством ограничения

$$\sigma_F(X) = F|_{\{\lambda X\}}, \quad (1)$$

где  $\sigma_F(X)$  - сечение расслоения  $H^d$ , соответствующее произвольному однородному многочлену  $F(X_0, X_1, \dots, X_n)$  [2].

Рассмотрим евклидово конечномерное пространство, где  $X_0, X_1, \dots, X_n$  - евклидовы координаты на  $C^{n+1}$ , а  $(q - 1)$  – мультипликативный порядок конечного поля  $GF(q)$ . Общее число точек из  $C^{n+1}$  равно  $q^{n+1}$ . Однако, все множество таких точек распадается на подмножества точек, принадлежащих различным слоям над точками из  $P^n$ . Количество таких расслоений, а значит и точек проективного конечномерного пространства  $P^n$  конечно, и зависит как от размерности

пространства так и от мультипликативного порядка конечного поля. Рассмотрим различные подмножества множества точек конечномерного евклидова пространства, соответствующие им расслоения над точками проективного конечномерного пространства и определим количество слоев и их размерность.

Множество точек вида  $(X_0, X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) \in C^{n+1}$  с  $X_i \neq 0$  при любом  $i$  отображается в множество точек  $(X_0, X_1, \dots, \text{Const}, \dots, X_n) \in P^n$ , причем отображение совпадает с пространством линейных форм на прямой  $\{\lambda(X_0, X_1, \dots, \text{Const}, \dots, X_n)\} \in C^{n+1}$  при любом  $\lambda$ . В общем случае любая такая форма индуцирует глобальное сечение, совпадающее с гиперплоскостью, которой принадлежат соответствующие точки  $(X_0, X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) \in C^{n+1}$ .

Количество точек  $(X_0, X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) \in C^{n+1}$  с  $X_i \neq 0$  при любом  $i$  определяется как  $(q-1)^{(n+1)}$ . Количество линейных форм на прямой  $\{\lambda(X_0, X_1, \dots, \text{Const}, \dots, X_n)\} \in C^{n+1}$  при любом  $\lambda$  равно  $\lambda$  в общем случае, а в конечномерном пространстве равно мультипликативному порядку поля. Следовательно, множество точек вида  $(X_0, X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) \in C^{n+1}$  с  $X_i \neq 0$  при любом  $i$ , количество которых равно

$$N_{\text{еск1}} = (q-1)^{n+1}, \quad (2)$$

отображается в множество точек из проективного конечномерного пространства  $(X_0, X_1, \dots, \text{Const}, \dots, X_n) \in P^n$ , количество которых равно количеству прямых  $\{\lambda(X_0, X_1, \dots, \text{Const}, \dots, X_n)\} \in C^{n+1}$ , а именно

$$N_{\text{пск1}} = \frac{(q-1)^{(n+1)}}{\lambda} = \frac{(q-1)^{(n+1)}}{q-1} = (q-1)^n. \quad (3)$$

Множество точек вида  $(X_0, X_1, \dots, X_i = 0, \dots, X_n) \in C^{n+1}$  распадается на  $C_{n+1}^n$  подмножеств точек, полностью определенных в пространстве  $C^n$ , где  $C_{n+1}^n$  - выборка из  $(n+1)$  по  $n$ . Другими словами, точка  $(X_0, X_1, \dots, X_i = 0, \dots, X_n) \in C^{n+1}$  совпадает с точкой

$$(X_0, X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \in C^n.$$

Количество таких точек равно

$$N_{\text{еск2}} = C_{n+1}^n (q-1)^n. \quad (4)$$

Множество точек  $(X_0, X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \in C^n$  отображается в множество точек  $(X_0, X_1, \dots, \text{Const}, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \in P^{n-1}$ , причем отображение совпадает с пространством линейных форм на прямой  $\{\lambda(X_0, X_1, \dots, \text{Const}, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)\} \in C^n$  при любом  $\lambda$ . Количество линейных форм на прямой

$$\{\lambda(X_0, X_1, \dots, \text{Const}, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)\} \in C^n$$

при любом  $\lambda$  равно мультипликативному порядку поля. Следовательно,  $C_{n+1}^n$  - множеств точек вида  $(X_0, X_1, \dots, X_i = 0, \dots, X_n) \in C^{n+1}$ , отображается в  $C_{n+1}^n$  - множеств точек из проективного конечномерного пространства  $(X_0, X_1, \dots, \text{Const}, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \in P^{n-1}$ , общее количество которых равно  $\{\lambda(X_0, X_1, \dots, \text{Const}, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)\} \in C^n$ , а именно

$$N_{\text{пек2}} = \frac{(q-1)^n}{q-1} = (q-1)^{(n-1)}. \quad (5)$$

Множество точек вида  $(X_0, X_1, \dots, X_i = 0, \dots, X_j = 0, \dots, X_n) \in C^{n+1}$  распадается на  $C_{n+1}^{n-1}$  подмножеств точек, полностью определенных в пространстве  $C^{n-1}$ , где  $C_{n+1}^{n-1}$  - выборка из  $(n+1)$  по  $(n-1)$ . Другими словами, точка  $(X_0, X_1, \dots, X_i = 0, \dots, X_j = 0, \dots, X_n) \in C^{n+1}$  совпадает с точкой  $(X_0, X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n) \in C^{n-1}$ . Количество таких точек равно

$$N_{\text{екк3}} = C_{n+1}^{n-1}(q-1)^{(n-1)}. \quad (6)$$

Множество точек

$$(X_0, X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n) \in C^{n-1}$$

отображается в множество точек

$$(X_0, X_1, \dots, \text{Const}, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n) \in P^{n-2},$$

причем отображение совпадает с пространством линейных форм на прямой

$$\{\lambda(X_0, X_1, \dots, \text{Const}, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n)\} \in C^{n-1}$$

при любом  $\lambda$ . Количество линейных форм на прямой

$$\{\lambda(X_0, X_1, \dots, \text{Const}, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n)\} \in C^{n-1}$$

при любом  $\lambda$  равно мультипликативному порядку поля. Следовательно,  $C_{n+1}^{n-1}$  - множество точек вида  $(X_0, X_1, \dots, X_i = 0, \dots, X_j = 0, \dots, X_n) \in C^{n+1}$ , отображается в  $C_{n+1}^{n-1}$  - множество точек из проективного конечномерного пространства  $(X_0, X_1, \dots, \text{Const}, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n) \in P^{n-2}$ , общее количество которых равно количеству прямых

$$\{\lambda(X_0, X_1, \dots, \text{Const}, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n)\} \in C^{n-1},$$

а именно

$$N_{\text{пскз}} = \frac{(q-1)^{(n-1)}}{q-1} = (q-1)^{(n-2)}. \quad (7)$$

Рассуждая подобным образом, можно записать аналитическую форму, выражающую размерность различных подмножеств однородных координат и их отображений в проективное пространство. Исключением является одна точка – начало координат. Эта точка отображается в саму себя.

Суммируя полученные аналитические формы, выражающие размерность различных подмножеств однородных координат, получим выражение, определяющее общее количество точек  $X \in C^{n+1}$ :

$$N_{\text{еск}} = (q-1)^{(n+1)} + \sum_{i=1}^n C_{n+1}^i (q-1)^i + 1 \quad (8)$$

и выражение, определяющее общее количество точек  $X \in P^n$ :

$$N_{\text{пск}} = (q-1)^n + \sum_{i=1}^n C_{n+1}^i (q-1)^{(i-1)} + 1. \quad (9)$$

Проверяем достоверность выражений. Общее число  $X \in C^{n+1}$ , равное  $q^{n+1}$ , соответствует выражению (8). Поскольку количество точек  $X \in P^n$  соответствует числу прямых  $\{\lambda X\}_\lambda \in C^{n+1}$ , то общее число точек  $X \in P^n$  кратно мультипликативному порядку поля, а с учетом точки начала координат равно  $(q^{n+1} - 1/q - 1) + 1$  и соответствует выражению (9).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. Т.1. – М.: Мир, 1982. – 366 с.
2. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. Т.1. – М.: Мир, 1988. – 430 с.

