УДК 621.39

РАССЛОЕНИЯ НАД ТОЧКАМИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

А.А. Кузнецов, к.т.н. Н.В. Пастухов, к.т.н. А.В. Северинов, Н.Э. Рязанцев
(представил д.т.н., проф. В.И. Долгов)

Рассматривается многообразие точек конечномерного пространства и его отображение в проективную область. Приводится оценка количества точек проективного конечномерного пространства как количество расслоений.

Пусть $\mathbf{X_0, X_1, ..., X_n}$ - евклидовы координаты на $\mathbf{C^{n+1}}$, а также соответствующие однородные координаты на $\mathbf{P^n}$. Универсальное расслоение – это подрасслоение $\mathbf{J \to P^n}$ тривиального расслоения $\mathbf{C^{n+1} \times P^n \to P^n}$, слоем которого над точкой $\mathbf{X \in P^n}$ является прямая $\{\lambda\mathbf{X}\}_\lambda \in \mathbf{C^{n+1}}$, соответствующая точке $\mathbf{X}$ [1]. Двойственным к $\mathbf{J}$ будет расслоение гиперплоскости $\mathbf{H \to P^n}$, т.е. расслоение, слоем которого над $\mathbf{X \in P^n}$ является пространство линейных функционалов на прямой $\{\lambda\mathbf{X}\}$.

В общем случае слой расслоения $\mathbf{H^d}$ над точкой $\mathbf{X \in P^n}$ совпадает с пространством линейных форм на прямой $\{\lambda\mathbf{X}\} \in \mathbf{C^{n+1}}$, а поэтому любая $\mathbf{d}$ - линейная форма $\mathbf{F}$ на $\mathbf{C^{n+1}}$ индуцирует глобальное сечение расслоения $\mathbf{H^d}$ посредством ограничения

$$\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}\big|_{\{\lambda \mathbf{X}\}}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{F}(\mathbf{X})$ - сечение расслоения $\mathbf{H^d}$, соответствующее произвольному однородному многочлену $\mathbf{F(X_0, X_1, ..., X_n)}$ [2].

Рассмотрим евклидовое конечномерное пространство, где $\mathbf{X_0, X_1, ..., X_n}$ - евклидовые координаты на $\mathbf{C^{n+1}}$, а $\mathbf{(q - 1)}$ – мультипликативный порядок конечного поля $\mathbf{GF(q)}$. Общее число точек из $\mathbf{C^{n+1}}$ равно $\mathbf{q^{n+1}}$. Однако, все множество таких точек распадается на подмножества точек, принадлежащих различным слоям над точками из $\mathbf{P^n}$. Количество таких расслоений, а значит и точек проективного конечномерного пространства $\mathbf{P^n}$ конечно, и зависит как от размерности пространства так и от мультипликативного порядка конечного поля. Рассмотрим различные подмножества множества точек конечномерного евклидового пространства, соответствующие им расслоения над точками проективного конечномерного пространства и определим количество слоев и их размерность.

Множество точек вида $(\mathbf{X_0}, \mathbf{X_1}, ..., \mathbf{X_i}, ..., \mathbf{X_n}) \in \mathbf{C^{n+1}}$ с $\mathbf{X_i} \neq \mathbf{0}$ при любом **i** отображается в множество точек $(\mathbf{X_0}, \mathbf{X_1}, ..., \mathbf{Const}, ..., \mathbf{X_n}) \in \mathbf{P^n}$, причем отображение совпадает с пространством линейных форм на прямой $\{\lambda(\mathbf{X_0}, \mathbf{X_1}, ..., \mathbf{Const}, ..., \mathbf{X_n})\} \in \mathbf{C^{n+1}}$ при любом λ. В общем случае любая такая форма индуцирует глобальное сечение, совпадающее с гиперплоскостью, которой принадлежат соответствующие точки $(\mathbf{X_0}, \mathbf{X_1}, ..., \mathbf{X_i}, ..., \mathbf{X_n}) \in \mathbf{C^{n+1}}$.

Количество точек $(\mathbf{X_0}, \mathbf{X_1}, ..., \mathbf{X_i}, ..., \mathbf{X_n}) \in \mathbf{C^{n+1}}$ с $\mathbf{X_i} \neq \mathbf{0}$ при любом **i** определяется как $(\mathbf{q}-\mathbf{1})^{(\mathbf{n+1})}$. Количество линейных форм на прямой $\{\lambda(\mathbf{X_0}, \mathbf{X_1}, ..., \mathbf{Const}, ..., \mathbf{X_n})\} \in \mathbf{C^{n+1}}$ при любом λ равно λ в общем случае, а в конечномерном пространстве равно мультипликативному порядку поля. Следовательно, множество точек вида $(\mathbf{X_0}, \mathbf{X_1}, ..., \mathbf{X_i}, ..., \mathbf{X_n}) \in \mathbf{C^{n+1}}$ с $\mathbf{X_i} \neq \mathbf{0}$ при любом **i**, количество которых равно

$$\mathbf{N_{еск1}} = (\mathbf{q}-\mathbf{1})^{\mathbf{n+1}} , \tag{2}$$

отображается в множество точек из проективного конечномерного пространства $(\mathbf{X_0}, \mathbf{X_1}, ..., \mathbf{Const}, ..., \mathbf{X_n}) \in \mathbf{P^n}$, количество которых равно количеству прямых $\{\lambda(\mathbf{X_0}, \mathbf{X_1}, ..., \mathbf{Const}, ..., \mathbf{X_n})\} \in \mathbf{C^{n+1}}$, а именно

$$\mathbf{N_{пск_1}} = \frac{(\mathbf{q}-\mathbf{1})^{(\mathbf{n+1})}}{\lambda} = \frac{(\mathbf{q}-\mathbf{1})^{(\mathbf{n+1})}}{\mathbf{q}-\mathbf{1}} = (\mathbf{q}-\mathbf{1})^{\mathbf{n}} . \tag{3}$$

Множество точек вида $(\mathbf{X_0}, \mathbf{X_1}, ..., \mathbf{X_i} = \mathbf{0}, ..., \mathbf{X_n}) \in \mathbf{C^{n+1}}$ распадается на $\mathbf{C^n_{n+1}}$ подмножеств точек, полностью определенных в пространстве $\mathbf{C^n}$, где $\mathbf{C^n_{n+1}}$ - выборка из **(n + 1)** по **n**. Другими словами, точка $(\mathbf{X_0}, \mathbf{X_1}, ..., \mathbf{X_i} = \mathbf{0}, ..., \mathbf{X_n}) \in \mathbf{C^{n+1}}$ совпадает с точкой

$$(\mathbf{X_0}, \mathbf{X_1}, ..., \mathbf{X_{i-1}}, \mathbf{X_{i+1}}, ..., \mathbf{X_n}) \in \mathbf{C^n} .$$

Количество таких точек равно

$$\mathbf{N_{еск2}} = \mathbf{C^n_{n+1}}(\mathbf{q}-\mathbf{1})^{\mathbf{n}} . \tag{4}$$

Множество точек $(X_0, X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_n) \in C^n$ отображается в множество точек $(X_0, X_1, ..., Const, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_n) \in P^{n-1}$, причем отображение совпадает с пространством линейных форм на прямой $\{\lambda(X_0, X_1, ..., Const, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_n)\} \in C^n$ при любом λ. Количество линейных форм на прямой

$$\{\lambda(X_0, X_1, ..., Const, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_n)\} \in C^n$$

при любом λ равно мультипликативному порядку поля. Следовательно, C^n_{n+1} - множеств точек вида $(X_0, X_1, ..., X_i = 0, ..., X_n) \in C^{n+1}$, отображается в C^n_{n+1} - множеств точек из проективного конечномерного пространства $(X_0, X_1, ..., Const, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_n) \in P^{n-1}$, общее количество которых равно $\{\lambda(X_0, X_1, ..., Const, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_n)\} \in C^n$, а именно

$$N_{пск2} = \frac{(q-1)^n}{q-1} = (q-1)^{(n-1)}. \tag{5}$$

Множество точек вида $(X_0, X_1, ..., X_i = 0, ..., X_j = 0, ..., X_n) \in C^{n+1}$ распадается на C^{n-1}_{n+1} подмножеств точек, полностью определенных в пространстве C^{n-1}, где C^{n-1}_{n+1} - выборка из **(n + 1)** по **(n - 1)**. Другими словами, точка $(X_0, X_1, ..., X_i = 0, ..., X_j = 0, ..., X_n) \in C^{n+1}$ совпадает с точкой $(X_0, X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_{j-1}, X_{j+1}, ..., X_n) \in C^{n-1}$. Количество таких точек равно

$$N_{еск3} = C^{n-1}_{n+1}(q-1)^{(n-1)}. \tag{6}$$

Множество точек

$$(X_0, X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_{j-1}, X_{j+1}, ..., X_n) \in C^{n-1}$$

отображается в множество точек

$$(X_0, X_1, ..., Const, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_{j-1}, X_{j+1}, ..., X_n) \in P^{n-2},$$

причем отображение совпадает с пространством линейных форм на прямой

$$\{\lambda(X_0, X_1, ..., Const, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_{j-1}, X_{j+1}, ..., X_n)\} \in C^{n-1}$$

при любом λ. Количество линейных форм на прямой

$$\{\lambda(X_0, X_1, ..., Const, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_{j-1}, X_{j+1}, ..., X_n)\} \in C^{n-1}$$

при любом λ равно мультипликативному порядку поля. Следовательно, C_{n+1}^{n-1} - множеств точек вида $(X_0, X_1, ..., X_i = 0, ..., X_j = 0, ..., X_n) \in C^{n+1}$, отображается в C_{n+1}^{n-1} - множеств точек из проективного конечномерного пространства $(X_0, X_1, ..., Const, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_{j-1}, X_{j+1}, ..., X_n) \in P^{n-2}$, общее количество которых равно количеству прямых

$$\{\lambda(X_0, X_1, ..., Const, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_{j-1}, X_{j+1}, ..., X_n)\} \in C^{n-1},$$

а именно

$$N_{пск3} = \frac{(q-1)^{(n-1)}}{q-1} = (q-1)^{(n-2)}. \qquad (7)$$

Рассуждая подобным образом, можно записать аналитическую форму, выражающую размерность различных подмножеств однородных координат и их отображений в проективное пространство. Исключением является одна точка – начало координат. Эта точка отображается в саму себя.

Суммируя полученные аналитические формы, выражающие размерность различных подмножеств однородных координат, получим выражение, определяющее общее количество точек $X \in C^{n+1}$:

$$N_{еск} = (q-1)^{(n+1)} + \sum_{i=1}^{n} C_{n+1}^{i} (q-1)^{i} + 1 \qquad (8)$$

и выражение, определяющее общее количество точек $X \in P^n$:

$$N_{пск} = (q-1)^{n} + \sum_{i=1}^{n} C_{n+1}^{i} (q-1)^{(i-1)} + 1. \qquad (9)$$

Проверяем достоверность выражений. Общее число $X \in C^{n+1}$, равное q^{n+1}, соответствует выражению (8) . Поскольку количество точек $X \in P^n$ соответствует числу прямых $\{\lambda X\}_\lambda \in C^{n+1}$, то общее число точек $X \in P^n$ кратно мультипликативному порядку поля, а с учетом точки начала координат равно $\left(q^{n+1} - 1/q - 1\right) + 1$ и соответствует выражению (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. Т.1. – М.: Мир, 1982. – 366 с.

2. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. Т.1. – М.: Мир, 1988. – 430 с.