

## ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

Е.А. Ганенко, к.ф.-м.н. Т.В. Емельянова, д.ф.-м.н. С.С. Недорезов,  
д.т.н. Ю.С. Шмалый

В пьезоэлектрических резонаторах с выпуклыми пьезоэлементами существуют [1] локализованные у центра электрода колебания, которые ранее рассматривались [1 - 2] на основе эффективных уравнений с квадратичным потенциалом. При этом частотный спектр является эквидистантным по квадрату частоты, что лишь качественно соответствует экспериментальным данным. В настоящей работе проведен анализ частот спектра колебаний АТ кварцевого резонатора на основе общей теории [3], учитывающей неэквидистантность спектра. Исследовано влияние границы электрода различной формы на частотный спектр.

В работе [3] частотный спектр собственных колебаний резонаторов получен в виде

$$\omega_{k/n}^2 = \sum_{\alpha, \beta=0}^{\infty} \Omega_{\alpha\beta n} k^{\alpha} l^{\beta} + W_{k/n}(\rho), \quad (1)$$

где

$$\Omega_{\alpha\beta n} = \sum_{p=0}^{\infty} \Omega_{\alpha\beta n}^{(p)} R^{-(p+\alpha+\beta)/2}, \quad (2)$$

$k, l = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, 3, \dots; R$  – радиус кривизны пьезоэлемента (рис.1),  $\Omega_{\alpha\beta n}^{(p)}$  – коэффициенты;

$W_{k/n}(\rho)$  – матричные элементы оператора  $\widehat{W}$ , описывающего влияние границы электрода на частотный спектр. В области частот  $\omega_{k/n}^2 - \omega_{00n}^2 \ll \Delta$  в качестве оператора  $\widehat{W}$  можно взять нулевое граничное условие для колебаний ( $\Delta$  – скачок потенциала на границе электрода). В ре-

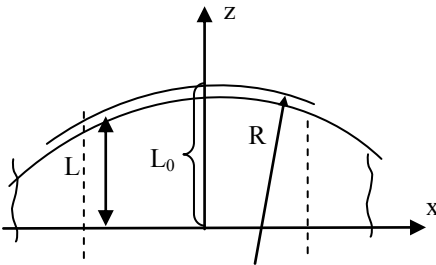


Рис. 1. Фрагмент пьезоэлемента

зультате для  $W_{k/n}(\rho)$  имеем явные выражения в зависимости от параметра  $\rho$ , определяемого отношением длины затухания колебаний к радиусу электрода.

Явное выражение (1) для  $\omega_{k/n}$  позволяет рассматривать коэффициенты  $\Omega_{\alpha\beta n}$  как параметры, определяемые из экспериментальных значений нескольких частот, и использовать минимальное число параметров для вычисления остальных частот. Ниже эффективность предлагаемого метода показана на примере анализа частотного спектра собственных колебаний АТ кварцевого резонатора с использованием экспериментальных данных (табл. 1), полученных в [4] \*).

При  $\rho \gg 1$  влиянием границы электрода можно пренебречь и в квадратичном приближении из (1) имеем

$$\omega_{k/n}^2 \cong \Omega_{00n} + \Omega_{10n}k + \Omega_{01n}l + \Omega_{20n}k^2 + \Omega_{11n}kl + \Omega_{02n}l^2, \quad (3)$$

$(k, l = 0, 1, 2, \dots).$

Первые три слагаемых в (3) описывают линейное приближение, соответствующее эквидистантному по квадрату частоты спектру колебаний, остальные слагаемые учитывают неэквидистантность частотного спектра.

В табл. 1 приведены частоты  $\omega_{k/n}$  собственных колебаний АТ кварцевого резонатора, вычисленные по формуле (3) в линейном (I) и в квадратичном (II) приближении. Константы  $\Omega_{\alpha\beta n}$  определены из первых трех экспериментальных частот в случае линейного приближения (I) и шести частот в случае квадратичного приближения (II). Отклонение вычисленных значений остальных частот от экспериментальных значений порядка  $10^{-3} \div 10^{-2}$ .

Как следует из табл. 1, для некоторых частот линейное и квадратичное приближения дают одинаковую погрешность. Для улучшения сходимости ряда (1) и получения лучшей аппроксимации выполнено частичное суммирование:

$$\omega_{k01}^2 \cong \omega_{001}^2 / (1 - a_{10}k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где константа  $a_{10}$  определена из сравнения с экспериментальной частотой  $\omega_{101}$  и приведена в табл. 2. Формула (4) имеет погрешность по-

\*) . Рассмотрены частоты для образца С. Обозначения мод колебаний  $(k, l, n)$ ;  $k, l = 0, 1, 2, \dots$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$  эквивалентны модам  $(n', k', l')$ ;  $k', l', n' = 1, 2, 3, \dots$  в обозначениях [4], где  $k = k' - 1, l = l' - 1, n = n'$ .

рядка  $10^{-4} \div 10^{-3}$ . Для вычисления частот  $\omega_{0l}$  с той же точностью необходимо учитывать следующее приближение:

$$\omega_{0l}^2 \cong \omega_{00l}^2 / (1 - a_{01} / (1 + a_{02})), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Таблица 1

Mode	$(\omega_{kl})_{exp}$ , MHz	$(\omega_{kl})_{cal}$ , MHz (I)	$(\omega_{kl})_{cal}$ , MHz (II)	$(\omega_{kl})_{cal}$ , MHz (III)
(0,0,1)	6,027370	6,027370	6,027370	6,027370
(0,1,1)		6,104953	6,103375	6,105810
(1,0,1)	6,115643	6,115643	6,115643	6,115643
(0,2,1)	6,181563	6,181563	6,181563	6,184116
(1,1,1)	6,188764	6,192120	6,188764	6,191164
(2,0,1)	6,207681	6,202660	6,207681	6,207911
(0,3,1)		6,257235	6,261851	6,262308
(1,2,1)	6,264107	6,267665	6,264107	6,266626
(3,0,1)	6,306682	6,288473	6,303319	6,304486
(1,3,1)	6,339180	6,342309	6,341593	6,342045
(0,4,1)	6,344733	6,332002	6,344159	6,340406
(4,0,1)	6,405400	6,373130	6,402396	6,405713
(1,4,1)		6,416085	6,421144	6,417435
(0,5,1)	6,415463	6,405897	6,428411	6,418426
(1,5,1)		6,489023	6,502684	6,492814
(0,6,1)	6,496820	6,478949	6,514530	6,496388

Константы  $a_{01}$  и  $a_{02}$  найдены методом наименьших квадратов (табл.2).

Таблица 2

$(\alpha, \beta)$	$\Omega_{\alpha\beta I}, (\text{MHz})^2$	$\Omega_{\alpha\beta II}, (\text{MHz})^2$	$a_{\alpha\beta}$
	I	II	III
(0,0)	36,329189	36,329189	
(1,0)	1,0719	1,040743	$2,86596 \cdot 10^{-2}$
(0,1)	0,941266	0,902740	$2,6052078 \cdot 10^{-2}$
(1,1)	0	$-2,2292 \cdot 10^{-2}$	
(0,2)	0	$1,9263 \cdot 10^{-2}$	$2,0514525 \cdot 10^{-2}$
(2,0)	0	$3,1157 \cdot 10^{-2}$	

Для остальных частот имеем

$$\omega_{kl}^2 \cong \omega_{k0l}^2 - \omega_{00l}^2 + \omega_{0l}^2 + \Omega_{111}kl, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где частоты  $\omega_{k0l}$  и  $\omega_{0l}$  определяются формулами (5) и (6), константа  $\Omega_{111}$  дана в табл. 2 (II столбец).

Вычисленные по формулам (4) - (6) частоты  $\omega_{kl}$  приведены в табл. 1 (III столбец). При их вычислении потребовалось 5 параметров, т.е. меньше, чем в случае квадратичного приближения (4), хотя точность ( $10^{-4} \div 10^{-3}$ ) на порядок лучше. Для уточнения полученных результатов нужно учитывать большее число параметров, а также влияние границы электрода на частотный спектр (1).

В [5] анализ влияния границы электрода выполнен в случае нулевых граничных условий. В данной работе учитывается конечный скачок потенциала на границе электрода.

В области частот  $\omega_{kn}^2 - \omega_{00n}^2 \ll \Delta$  влияние границы электрода на колебательный спектр проводится на основе уравнения

$$-d^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 A(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \left[ \omega_n^2 + a - b_\alpha x_\alpha + c(x_1^2 + x_2^2) \right] A(x_1, x_2) = \omega^2 A(x_1, x_2) \quad (7)$$

с учитывающим границу электрода потенциалом

$$\Omega(x_1, x_2) \equiv \omega_n^2 + a - b^\alpha x_\alpha + c(x_1^2 + x_2^2) \quad (8)$$

В уравнении (8) тензор  $d^{\alpha\beta}$  и постоянные  $a, b^\alpha, c$  учитывают анизотропию и толщину  $L(x_1, x_2)$  выпуклого пьезоэлемента. В собственных осях  $(x, y)$  тензор  $d^{\alpha\beta}$  уравнение (7) принимает вид

$$d_1 \frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial x^2} + d_2 \frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial y^2} + \left[ \omega^2 - \tilde{\omega}_{mM}^2 - C_M \Delta x^2 + \Delta y^2 \right] \times \\ \times A(x, y) + W(x, y) A(x, y) = 0, \quad (9)$$

где

$$\tilde{\omega}_n^2 = \omega_n^2 + a - (b_x^2 + b_y^2) / 4c;$$

$$\Delta x = x - x_0; \quad \Delta y = y - y_0;$$

$$x_0 = b_x / 2c; \quad y_0 = b_y / 2c.$$

Анализ уравнения (9) для функции  $A(x, y)$  с квадратичным потенциалом показывает, что колебательные состояния, локализованные у центра выпуклого пьезоэлемента, экспоненциально затухают к границе электрода. Величины  $\tilde{\omega}_n^2$  изменяются скачком: в области электрода они

соответствуют характеристикам  $\tilde{\omega}_{nM}^2, C_M$  пластины с металлическим покрытием, вне электрода - характеристикам  $\tilde{\omega}_{nF}^2, C_F$  пластины без металлического покрытия. Наличие электрода произвольной формы и размеров учитывается функцией:

$$W(x, y) = \begin{cases} 0; & (x, y) \in S_D; \\ W_\Gamma(x, y); & (x, y) \in S((x, y) \notin S_D), \end{cases} \quad (10)$$

где  $W(x, y) = (\tilde{\omega}_{nF}^2 - \tilde{\omega}_{nM}^2) + (C_F - C_M)(\bar{x} - \bar{x}_0)^2$ ;  $\bar{x} \equiv (x, y)$

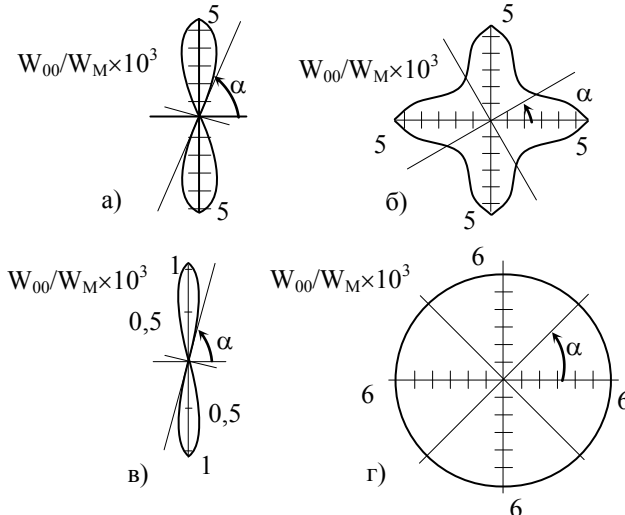
В полученном по теории возмущений частотном спектре  $\omega_{kln}^2 = \tilde{\omega}_{kln}^2 + W_{kln}$  локализованных у центра электрода колебаний, влияние границы учитывается слагаемым  $W_{kln}$ , которое определяется выражением

$$W_{kln} = \iint_S \Psi_{kln}(\bar{x} - \bar{x}_0) W_\Gamma(x, y) \Psi_{kln}(\bar{x} - \bar{x}_0) d^2\bar{x}. \quad (11)$$

Здесь  $\Psi_{kln}(\bar{x}) = \Psi_{kn}(x) \Psi_{ln}(y)$ ;  $\Psi_{kn}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sqrt{\lambda}}} \frac{2}{\sqrt{k!}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\lambda^2}\right) H_k\left(\frac{x}{\lambda}\right)$  - соб-

ственные функции гармонического осциллятора;  $\lambda = \sqrt{d/c}$  - длина затухания;  $d = d_1, d_2$ ;  $\tilde{\omega}_{kln}^2 = \tilde{\omega}_{kn}^2 + \tilde{\omega}_{ln}^2$ ;  $H_k(x)$  - полином Эрмита;  $\tilde{\omega}_{kln}^2$  - частотный спектр локализованных внутри электрода колебаний без учета влияния границы

$$\tilde{\omega}_{kln}^2 = \Omega_{10n}(k+1/2) + \Omega_{01n}(l+1/2); \quad k, l = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$



Пусть отклонение «центра локализации» колебаний от центра электрода незначительно по сравнению с длиной затухания ( $|\bar{b}| \ll \lambda$ ) и пусть наименьший размер электрода больше

характерной длины  $\lambda$ .

На рис. 2 приведена зависимость  $W_{00n}/W_M$ ,  $W_M = (\tilde{\omega}_{nF}^2 - \tilde{\omega}_{nM}^2) + (C_F - C_M)a^2$ , от угла  $\alpha$  для пьезоэлемента с  $\varepsilon = 1/4$  и  $a = 2\lambda$ , электроды которого имели форму эллипса ( $b = 2a$ ) (рис. 2,а) и квадрата (рис. 2,б). Зависимость  $W_{00n}$  от угла  $\alpha$  показана на рис. 2,в.

Когда электрод имеет форму круга радиуса  $a$ , поправка  $W_{00n}$  к спектру (рис. 2,г) не зависит от ориентации осей симметрии электрода и собственных осей тензора  $d^{\alpha\beta}$ . Наличие возможной трещины контакта проявится в зависимости  $W_{kln}$  от угла  $\alpha$ . «Всплеск» поправки  $W_{00n}$  произойдет при совпадении направления излома и большой полуоси тензора  $d^{\alpha\beta}$ .

Итак, из проведенных исследований видно, что локализация не совпадает с центром симметрии выпуклого электрода, причем, подобные колебания локализуются в определенном направлении. Выделение направления локализации обусловлено многими факторами, а именно, анизотропией пьезоэлектрика, формой электрода, ориентацией осей симметрии электродов и тензора  $d^{\alpha\beta}$ . Так что подобная добавка к спектру содержит дополнительную информацию о пьезоэлементе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. D.S. Stevens and H.F. Tiersten, "Analysis of doubly - rotated contoured quartz crystal resonators", in Proceedings of the 39 - th Annual Frequency Control Symposium, 1985. - P. 436 - 446.
2. R.C. Peach, "A variational method for the design of trapped energy resonators", in Proceedings of the 39 - th Annual Frequency Control Symposium, 1985. - P. 392 - 399.
3. S.S.Nedoresov and E.A.Ganenko, "Frequency spectrum of the piezo-electric resonators", Dopovidi NAN Ukraine, 10, 1996. - P. 31 - 35.
4. S.Hertl, E.Bones, L.Winner, M.Schmid, "Investigation of quartz crystal thickness shear and twist modes using a new noninterferometric laser speckle measurement method", in Proceedings of the 39 - th Annual Frequency Control Symposium, 1985. - P. 535 - 542.
5. E.A.Ganenko and S.S.Nedoresov, "Natural oscillations of the piezoelectric resonators"// Sbornic nauchnik trudov. Informacionnie sistemi. - Kharkov: NAN Ukraine, PANI, vol.1(9), 1998.- P. 21 - 26.