

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЕ

К.А. Чуриков

(представил д.ф.- м.н. С.В. Смеляков)

Рассматривается математическая модель задачи оптимизации назначения интенсивностей дискретных источников физического поля на заранее фиксированные места, с учетом ограничений, на результирующее поле. Обсуждаются различные реализации модели и возможные подходы к ее исследованию.

В теории систем с распределенными параметрами, процессы в которых описываются краевыми задачами математической физики, особое место занимают системы с дискретными воздействиями. К ним относятся, например, экологические системы, природоохрана которых от выбросов (локальные воздействия) промышленных объектов требует осуществления оптимизации выбросов по экологическому, экономическому, социальному или другим критериям, характерным для региона, с учетом ограничений на значения уровня загрязнения в экологически значимых зонах. Другим примером могут служить задачи оптимизации затрат электроэнергии при обогреве помещений, например теплиц, локальными нагревателями с учетом ограничений на значения температурного поля в заданной системе точек.

В общем случае система представляет собой область $\Omega \in \mathbf{R}^3$, содержащую неподвижные локальные воздействия (источники) с носителями $S_i (i = \overline{1, m})$. Процессы в такой системе (физическое поле) описываются краевой задачей:

$$\mathbf{A}u = \mathbf{F}; \quad (1)$$

$$\mathbf{B}_j u = \mathbf{f}_j; \quad (j = \overline{1, n}), \quad (2)$$

где \mathbf{A} – заданный дифференциальный оператор; $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$ – пространственно - временное распределение поля; $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \Omega$; \mathbf{t} – время исследования процесса в системе; \mathbf{B}_j – заданные операторы, характеризующие граничные, начальные и условия сопряжения на границах раздела сред; \mathbf{f}_i – заданные функции; \mathbf{F} – функция, характеризующая пространственно - временное распределение источников в Ω и имеющая следующий вид:

$$F = \begin{cases} F_i(x, y, z, t), & \text{если } (x, y, z) \in S_i; \\ 0, & \text{если } (x, y, z) \notin \bigcup_{i=1}^m S_i. \end{cases} \quad (3)$$

Необходимо определить вид локальных воздействий F_i ($i = \overline{1, m}$), которые бы обеспечивали экстремальное значение некоторой функции цели $\Phi(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_m)$, примеры которых будут рассмотрены ниже, и при этом значения физического поля в заданной системе точек $P_k \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^m S_i$ ($k = \overline{1, a}$) не превышало наперед заданные значения. Таким образом, сформулированная задача в общем виде представляется, как поиск:

$$\Phi(F_0) = \operatorname{extr}_{F \in W} \Phi(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_m); \quad (4)$$

$$F_0 = \operatorname{arg} \operatorname{extr}_{F \in W} \Phi(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_m), \quad (5)$$

где W - множество значений векторов $F = (F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_m)$, удовлетворяющих ограничениям:

$$u_k(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_m) \leq u_k^*; \quad (k = \overline{1, a}); \quad (6)$$

$$0 \leq F_i \leq F_i^*; \quad (i = \overline{1, m}), \quad (7)$$

где u_k - значение физического поля в контролируемой точке P_k ($k = \overline{1, a}$), F_i^* - заданная (предельная) интенсивность источника F_i ($i = \overline{1, m}$).

Задача (4 - 7) относится к многоэкстремальным задачам нелинейного программирования в силу нелинейности как функции цели в соотношении (4), так и ограничений на физическое поле (6). Число локальных экстремумов зависит от характера физического поля, числа источников и функций, задающих интенсивности источников. Кроме того, для формализации основной оптимизационной задачи (4 - 7), необходимо представить решение краевой задачи (1 - 2) в зависимости от интенсивностей источников физического поля. Учитывая специфичность, нелинейность и многоэкстремальность основной оптимизационной задачи (4 - 7), рассчитывать на получение оптимального решения не приходится. Для ее решения необходима разработка ряда приближенных методов решения, основанных на специфике конкретных реализаций модели (4 - 7).

Рассмотрим частные случаи модели (4 - 7).

Случай 1. Пусть линейная краевая задача (1 - 2) описывает установившийся процесс. Тогда осуществив её конечно - разностную аппроксимацию с тем условием, что источники являются точечными и попадают только в те узлы сетки, где они находятся, приходим к системе линейных уравнений. На

основе этой системы оптимизационная задача поиска интенсивностей точечных источников формулируется, как специфическая задача математического программирования с линейной функцией цели

$$\mathop{\text{extr}}_{\mathbf{F} \in \mathbf{W}} \Phi(\mathbf{F}) = \mathop{\text{extr}}_{\mathbf{F} \in \mathbf{W}} \mathbf{C}\mathbf{F} = \mathop{\text{extr}}_{\mathbf{F} \in \mathbf{W}} \sum_{i=1}^m \mathbf{C}_i \mathbf{F}_i \quad (8)$$

и системой ограничений:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{U}^* = \mathbf{F}; \quad (9)$$

$$0 \leq \mathbf{F}_i \leq \overline{\mathbf{F}_i^*}; \quad (\mathbf{i} = \overline{1, \mathbf{m}}); \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_k^* \leq \overline{\mathbf{u}_k}; \quad (\mathbf{k} = \overline{1, \mathbf{a}}), \quad (11)$$

где $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_i, \dots, \mathbf{C}_m)$ - заданные коэффициенты целевой функции, например, стоимость электроэнергии, если речь идет об обогреве помещений (теплиц) дискретными нагревателями мощности \mathbf{F}_i ($\mathbf{i} = \overline{1, \mathbf{m}}$). Другим примером коэффициентов \mathbf{C}_i ($\mathbf{i} = \overline{1, \mathbf{m}}$), могут служить значения капитальных вложений в технологию, обеспечивающую выпуск того же объема продукции при уменьшении выбросов (в расчете на единицу мощности выбросов). Соотношение (9) – результат конечно - разностной аппроксимации задачи (1 - 2), соотношение (11) – ограничения на значения поля в контролируемых точках \mathbf{P}_k ($\mathbf{k} = \overline{1, \mathbf{a}}$) (узлах сетки).

Случай 2. Пусть линейная краевая задача (1 - 2) описывает стационарное поле и известно, что “вклад” каждого из источников \mathbf{F}_i ($\mathbf{i} = \overline{1, \mathbf{m}}$) в значения поля в контролируемых точках \mathbf{P}_k ($\mathbf{k} = \overline{1, \mathbf{a}}$) равен \mathbf{b}_{ik} ($\mathbf{i} = \overline{1, \mathbf{m}}; \mathbf{k} = \overline{1, \mathbf{a}}$) и пропорционален интенсивности источников. Тогда задача оптимизации интенсивностей источников на основе принципа суперпозиции полей отдельных источников сводится к задаче линейного программирования вида:

$$\mathop{\text{extr}}_{\mathbf{F} \in \mathbf{W}} \Phi(\mathbf{F}) = \mathop{\text{extr}}_{\mathbf{F} \in \mathbf{W}} \mathbf{C}\mathbf{F}; \quad (12)$$

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{11}\mathbf{F}_1 + \mathbf{b}_{12}\mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{b}_{1m}\mathbf{F}_m \leq \overline{\mathbf{u}_1^*}; \\ \mathbf{b}_{21}\mathbf{F}_1 + \mathbf{b}_{22}\mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{b}_{2m}\mathbf{F}_m \leq \overline{\mathbf{u}_2^*}; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathbf{b}_{a1}\mathbf{F}_1 + \mathbf{b}_{a2}\mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{b}_{am}\mathbf{F}_m \leq \overline{\mathbf{u}_a^*}; \end{cases} \quad (13)$$

$$0 \leq \mathbf{F}_i \leq \overline{\mathbf{F}_i^*} \quad (\mathbf{i} = \overline{1, \mathbf{m}}), \quad (14)$$

где вектор \mathbf{C} может иметь тот же смысл, что и в случае 1. Для построения модели (12 - 14) необходим этап определения коэффициентов \mathbf{b}_{ik} ($\mathbf{i} = \overline{1, \mathbf{m}}; \mathbf{k} = \overline{1, \mathbf{a}}$). Это возможно осуществить путем рассмотрения \mathbf{m} линейных стаци-

онарных задач (1 - 2) для “единичных” источников с последующим домножением этих значений на величины F_i ($i = \overline{1, m}$).

Случай 3. Пусть для определенности имеется три источника. Представим, с учетом соотношения (7), интенсивности источников F_i ($i = \overline{1, 3}$) в виде меньших значений интенсивностей:

$$\begin{aligned} F_1 &: \left(F_1^1 < F_1^2 < \dots < F_1^i < \dots < F_1^g < F_1^* \right); \\ F_2 &: \left(F_2^1 < F_2^2 < \dots < F_2^i < \dots < F_2^g < F_2^* \right); \\ F_3 &: \left(F_3^1 < F_3^2 < \dots < F_3^i < \dots < F_3^g < F_3^* \right). \end{aligned}$$

Элементами комбинаторного множества назначений источников будут тройки $F_1^1, F_2^1, F_3^1; F_1^1, F_2^1, F_3^2; F_1^1, F_2^1, F_3^3; \dots; F_1^i, F_2^j, F_3^c; \dots; F_1^g, F_2^d, F_3^e$; являющиеся расстановками источников, их число равно gde . Тогда задача оптимизации сводится к поиску экстремума целевой функции на конечном множестве:

$$\begin{aligned} \text{extr}_{F \in W} \Phi(F) &= \text{extr}_{F \in W} \Phi(F_1^i, F_2^j, F_3^c); \\ 0 &\leq F_1^{i-1} < F_1^i < F_1^{i+1} \leq F_1^*; \\ 0 &\leq F_2^{j-1} < F_2^j < F_2^{j+1} \leq F_2^*; \\ 0 &\leq F_3^{c-1} < F_3^c < F_3^{c+1} \leq F_3^*. \\ u_k(F_1^i, F_2^j, F_3^c) &\leq u_k^*; \quad (k = \overline{1, a}). \end{aligned}$$

Случай 4. Модели задач назначения источников на заранее фиксированные места с разными по величине интенсивностями и соотношениями числа источников и числа посадочных мест (сочетания, размещения и перестановки источников) рассмотрены в главе III монографии [1]. Этими же авторами осуществлена аппаратная реализация соответствующих математических моделей задач назначения источников и отражена в ряде авторских свидетельств на изобретения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стоян Ю.Г., Путьтин В.П. Оптимизация технических систем с источниками физических полей. – К.: Наукова думка, 1988. – 284 с.