УДК 519.852.67

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЕ

К.А. Чуриков
(представил д.ф.- м.н. С.В. Смеляков)

Рассматривается математическая модель задачи оптимизации назначения интенсивностей дискретных источников физического поля на заранее фиксированные места, с учетом ограничений, на результирующее поле. Обсуждаются различные реализации модели и возможные подходы к ее исследованию.

В теории систем с распределенными параметрами, процессы в которых описываются краевыми задачами математической физики, особое место занимают системы с дискретными воздействиями. К ним относятся, например, экологические системы, природоохрана которых от выбросов (локальные воздействия) индустриальных объектов требует осуществления оптимизации выбросов по экологическому, экономическому, социальному или другим критериям, характерным для региона, с учетом ограничений на значения уровня загрязнения в экологически значимых зонах. Другим примером могут служить задачи оптимизации затрат электроэнергии при обогреве помещений, например теплиц, локальными нагревателями с учетом ограничений на значения температурного поля в заданной системе точек.

В общем случае система представляет собой область $\mathbf{\Omega \in R^3}$, содержащую неподвижные локальные воздействия (источники) с носителями $\mathbf{S_i (i = \overline{1, m})}$. Процессы в такой системе (физическое поле) описываются краевой задачей:

$$\mathbf{Au = F}; \tag{1}$$

$$\mathbf{B_j u = f_j; \quad (j = \overline{1, n})}, \tag{2}$$

где **A** – заданный дифференциальный оператор; $\mathbf{U(x, y, z, t)}$ - пространственно - временное распределение поля; $\mathbf{(x, y, z) \in \Omega}$; t - время исследования процесса в системе; $\mathbf{B_j}$ - заданные операторы, характеризующие граничные, начальные и условия сопряжения на границах раздела сред; $\mathbf{f_i}$ - заданные функции; **F** - функция, характеризующая пространственно - временное распределение источников в $\mathbf{\Omega}$ и имеющая следующий вид:

$$F=\begin{cases} F_i(x,y,z,t), & \text{если} \quad (x,y,z)\in S_i; \\ 0, & \text{если} \quad (x,y,z)\overline{\in} \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i. \end{cases} \tag{3}$$

Необходимо определить вид локальных воздействий F_i $(i=\overline{1,m})$, которые бы обеспечивали экстремальное значение некоторой функции цели $\Phi(F_1,F_2,...,F_i,...,F_m)$, примеры которых будут рассмотрены ниже, и при этом значения физического поля в заданной системе точек $P_k \in \Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i$ $(k=\overline{1,a})$ не превышало наперед заданные значения. Таким образом, сформулированная задача в общем виде представляется, как поиск:

$$\Phi(F_0)=\underset{F\in W}{\mathrm{extr}}\,\Phi(F_1,F_2,...,F_i,...,F_m); \tag{4}$$

$$F_0=\arg\underset{F\in W}{\mathrm{extr}}\,\Phi(F_1,F_2,...,F_i,...,F_m), \tag{5}$$

где W - множество значений векторов $F=(F_1,F_2,...,F_i,...,F_m)$, удовлетворяющих ограничениям:

$$u_k(F_1,F_2,...,F_i,...,F_m)\le u_k^*); \quad (k=\overline{1,a}); \tag{6}$$

$$0\le F_i \le F_i^*; \quad (i=\overline{1,m}), \tag{7}$$

где u_k - значение физического поля в контролируемой точке P_k $\left(k=\overline{1,a}\right)$, F_i^* - заданная (предельная) интенсивность источника F_i $(i=\overline{1,m})$.

Задача (4 - 7) относится к многоэкстремальным задачам нелинейного программирования в силу нелинейности как функции цели в соотношении (4), так и ограничений на физическое поле (6). Число локальных экстремумов зависит от характера физического поля, числа источников и функций, задающих интенсивности источников. Кроме того, для формализации основной оптимизационной задачи (4 - 7), необходимо представить решение краевой задачи (1 - 2) в зависимости от интенсивностей источников физического поля. Учитывая специфичность, нелинейность и многоэкстремальность основной оптимизационной задачи (4 - 7), рассчитывать на получение оптимального решения не приходится. Для ее решения необходима разработка ряда приближенных методов решения, основанных на специфике конкретных реализаций модели (4 - 7).

Рассмотрим частные случаи модели (4 - 7).

Случай 1. Пусть линейная краевая задача (1- 2) описывает установившийся процесс. Тогда осуществив её конечно - разностную аппроксимацию с тем условием, что источники являются точечными и попадают только в те узлы сетки, где они находятся, придем к системе линейных уравнений. На основе этой системы оптимизационная задача поиска интенсивностей точечных источников формулируется, как специфическая задача математического программирования с линейной функцией цели

$$\underset{F\in W}{\mathrm{extr}}\,\Phi(F) = \underset{F\in W}{\mathrm{extr}}\,CF = \underset{F\in W}{\mathrm{extr}}\sum_{i=1}^{m} C_i F_i \tag{8}$$

и системой ограничений:

$$A^* U^* = F; \tag{9}$$

$$0 \le F_i \le F_i^*; \quad (i = \overline{1,m}); \tag{10}$$

$$u_k^* \le u_k; \quad (k = \overline{1,a}), \tag{11}$$

где $C = (C_1, C_2, ..., C_i, ..., C_m)$ - заданные коэффициенты целевой функции, например, стоимость электроэнергии, если речь идет об обогреве помещений (теплиц) дискретными нагревателями мощности F_i $(i = \overline{1,m})$. Другим примером коэффициентов C_i $(i = \overline{1,m})$, могут служить значения капитальных вложений в технологию, обеспечивающую выпуск того же объема продукции при уменьшении выбросов (в расчете на единицу мощности выбросов). Соотношение (9) – результат конечно - разностной аппроксимации задачи (1 - 2), соотношение (11) – ограничения на значения поля в контролируемых точках P_k $(k = \overline{1,a})$ (узлах сетки).

Случай 2. Пусть линейная краевая задача (1 - 2) описывает стационарное поле и известно, что “вклад” каждого из источников F_i $(i = \overline{1,m})$ в значения поля в контролируемых точках $P_k (k = \overline{1,a})$ равен b_{ik} $(i = \overline{1,m};\ k = \overline{1,a})$ и пропорционален интенсивности источников. Тогда задача оптимизации интенсивностей источников на основе принципа суперпозиции полей отдельных источников сводится к задаче линейного программирования вида:

$$\underset{F\in W}{\mathrm{extr}}\,\Phi(F) = \underset{F\in W}{\mathrm{extr}}\,CF; \tag{12}$$

$$\begin{cases} b_{11}F_1 + b_{12}F_2 + ... + b_{1m}F_m \le u_1^*; \\ b_{21}F_1 + b_{22}F_2 + ... + b_{2m}F_m \le u_2^*; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{a1}F_1 + b_{a2}F_2 + ... + b_{am}F_m \le u_a^*; \end{cases} \tag{13}$$

$$0 \le F_i \le F_i^* \qquad (i = \overline{1,m}), \tag{14}$$

где вектор **C** может иметь тот же смысл, что и в случае 1. Для построения модели (12 - 14) необходим этап определения коэффициентов b_{ik} $(i = \overline{1,m};$ $k = \overline{1,a})$. Это возможно осуществить путем рассмотрения **m** линейных стационарных задач (1 - 2) для “единичных” источников с последующим домножением этих значений на величины $\mathbf{F_i}\ (\mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,m}})$.

Случай 3. Пусть для определенности имеется три источника. Представим, с учетом соотношения (7), интенсивности источников $\mathbf{F_i}\ (\mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,3}})$ в виде меньших значений интенсивностей:

$$\mathbf{F_1 : \left(F_1^1 < F_1^2 < \ldots < F_1^i < \ldots < F_1^g < F_1^*\right)};$$
$$\mathbf{F_2 : \left(F_2^1 < F_2^2 < \ldots < F_2^i < \ldots < F_2^g < F_2^*\right)};$$
$$\mathbf{F_3 : \left(F_3^1 < F_3^2 < \ldots < F_3^i < \ldots < F_3^g < F_3^*\right)}.$$

Элементами комбинаторного множества назначений источников будут тройки $\mathbf{F_1^1, F_2^1, F_3^1}$; $\mathbf{F_1^1, F_2^1, F_3^2}$; $\mathbf{F_1^1, F_2^1, F_3^3}$; ...; $\mathbf{F_1^i, F_2^j, F_3^c}$; ..$\mathbf{F_1^g, F_2^d, F_3^e}$; являющиеся расстановками источников, их число равно $\mathbf{gde}$. Тогда задача оптимизации сводится к поиску экстремума целевой функции на конечном множестве:

$$\mathbf{\underset{F \in W}{extr}\, \Phi(F) = \underset{F \in W}{extr}\, \Phi(F_1^i, F_2^j, F_3^c)};$$
$$\mathbf{0 \le F_1^{i-1} < F_1^i < F_1^{i+1} \le F_1^*};$$
$$\mathbf{0 \le F_2^{j-1} < F_2^j < F_2^{j+1} \le F_2^*};$$
$$\mathbf{0 \le F_3^{c-1} < F_3^c < F_3^{c+1} \le F_3^*}.$$
$$\mathbf{u_k (F_1^i, F_2^j, F_3^c) \le u_k^*; \quad (k = \overline{1, a})}.$$

Случай 4. Модели задач назначения источников на заранее фиксированные места с разными по величине интенсивностями и соотношениями числа источников и числа посадочных мест (сочетания, размещения и перестановки источников) рассмотрены в главе III монографии [1]. Этими же авторами осуществлена аппаратурная реализация соответствующих математических моделей задач назначения источников и отражена в ряде авторских свидетельств на изобретения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стоян Ю.Г., Путятин В.П. Оптимизация технических систем с источниками физических полей. – К.: Наукова думка, 1988. – 284 с.