УДК 621.391

АНАЛОГО - ЦИФРОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАРКОВСКИХ СИГНАЛОВ

к.т.н. И.П. Кнышев*
(представил д.т.н., проф. П.Ф. Поляков)

Определены условия преобразования в АЦП непрерывного марковского сигнала в марковскую цепь. Получены выражения для матриц начальных и переходных вероятностей. Показано влияние интервала временной дискретизации на параметры марковской цепи.

В аналого - цифровом преобразователе (АЦП) осуществляется переход от непрерывной формы представления сигнала с континуумом значений по времени и амплитуде к дискретной с конечным множеством значений по амплитуде и счетным множеством по времени.

В большинстве случаев преобразованию подвергаются случайные сигналы, поэтому на выходе АЦП будет получена последовательность случайных величин. Если исходный случайный аналоговый сигнал удовлетворяет требованиям марковости, то выходной сигнал может представлять собой марковскую цепь. Определим условия такого преобразования и характеристики получаемой цепи.

Преобразование осуществляется в $\mathbf{\nu}$ - разрядном АЦП, описываемом [1] векторами - столбцами входных уровней сравнения, $\mathbf{U} = \{\mathbf{u_i}\}$, $\mathbf{i \in \overline{0, N_\nu + 1}}$ выходных уровней состояния $\mathbf{X=\{x_i\}}$, $\mathbf{i \in \overline{1, N_\nu + 1}}$, где $\mathbf{N_\nu}$ - число физически осуществимых уровней сравнения:

$$\mathbf{N_\nu} = \begin{cases} \mathbf{2^\nu - 1}, & \text{нечетный АЦП;} \\ \mathbf{2^\nu - 2}, & \text{четный АЦП.} \end{cases}$$

Преобразуемый сигнал удовлетворяет требованиям теоремы Котельникова и его энергетический спектр ограничен максимальной частотой $\mathbf{\omega_m = 2\pi F_m}$. Временная дискретизация в таком случае осуществляется равномерно с интервалом $\mathbf{\Delta_t = 1/2F_m}$. Как показано в [2], при произвольном спектре переход к дискретному времени с шагом $\mathbf{\Delta_t}$ приводит к появлению погрешности со среднеквадратичным значением $\mathbf{\sigma_{ош} = O(\sqrt{\Delta_t})}$.

Аналоговый сигнал $\mathbf{u(t)}$, удовлетворяющий требованиям марковости, полностью определяется одномерной начальной плотностью вероятности $\mathbf{W(u, t_0)}$ и плотностью вероятности переходов $\mathbf{W_y(v/u, t_0, t_1)}$ двух значений $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ случайного процесса $\mathbf{u(t)}$ в моменты времени $\mathbf{t_0}$ и $\mathbf{t_1}$.

В связи с тем, что амплитудное квантование не является взаимно - однозначным преобразованием, в общем случае на выходе АЦП может быть получена бесконечно усложняющаяся марковская цепь [3]. Однако, для случайных процессов, обладающих корреляционными функциями $\mathbf{R(\tau) \to 0}$ при $\boldsymbol{\tau} \to \infty$ (вполне регулярные процессы), выбором интервала дискретизации $\mathbf{\Delta_t}$ и шага квантования $\mathbf{\Delta_u}$ можно обеспечить постоянную и невысокую связность ($\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{0, 1, 2, \ldots}$). К таким процессам относятся эргодические марковские процессы, стационарные гауссовы процессы и др., представляющие наибольший практический интерес.

Марковская цепь, формирующаяся на выходе АЦП, принимает значения элементов вектора $\mathbf{X}$ в фиксированные моменты времени $\mathbf{t_n = t_0 + n\Delta_t}$, $\mathbf{n = 0, 1, 2, \ldots}$, кратные интервалу $\mathbf{\Delta_t}$. В начальный момент времени $\mathbf{t_0}$ вероятность появления одного из значений $\mathbf{x_i}$ определяется вектором - столбцом начальных вероятностей

$$\mathbf{P_0(t_0)} = \left\{ \mathbf{p_i} = \int_{u_{i-1}}^{u_i} \mathbf{W(u,t_0)du,\ i \in \overline{1, N_\nu + 1}} \right\}. \qquad (1)$$

Если элементы вектора $\mathbf{U}$ соответствуют квантилям порядка $\mathbf{1/(N_\nu + 1)}$ распределения $\mathbf{W(u,t_0)}$, то вектор (1) может быть выражен как

$$\mathbf{P_0(t_0)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N_\nu + 1}}\mathbf{J},$$

где $\mathbf{J}$ - единичный вектор.

Такой АЦП может быть назван равновероятным и здесь просматривается аналогия со статистическим кодированием. Выходная величина переходит из одного $\mathbf{x_i}$ в другое $\mathbf{x_j}$ состояние, соответствующие моментам времени $\mathbf{t_1 = t_0 + n\Delta_t}$ и $\mathbf{t_2 = t_0 + (n + m)\Delta_t}$, с вероятностью, определяемой стохастической матрицей переходных вероятностей

$$\mathbf{P(t_0, m\Delta_t)} = \left\{ \mathbf{p_{ij}} = \frac{\int_{u_{i-1}}^{u_i}\int_{u_{j-1}}^{u_j} \mathbf{W_2(u,v,t_0,t_0 + m\Delta_t)dvdu}}{\int_{u_{i-1}}^{u_i} \mathbf{W(u,t_0)du}};\ \mathbf{i,j \in \overline{1, N_\nu + 1}} \right\}. \qquad (2)$$

Эта матрица является неразложимой, так как АЦП представляет собой один класс сообщающихся состояний. При $\mathbf{m = 0}$ матрица (2) вырождается в единичную матрицу.

При стационарном входном сигнале, когда одномерная плотность вероятности не зависит от времени, а двумерная и условная зависят только от разности $\boldsymbol{\tau = t_2 - t_1 = m\Delta_t}$, на выходе АЦП будет формироваться однородная марковская цепь. Тогда вектор (1) не будет зависеть от времени, а матрица (2) будет зависеть только от интервала $\mathbf{m\Delta_t}$. Умножая **i** - ю строку матрицы (2) на начальную вероятность появления **i** - го состояния, получим матрицу безусловных переходных вероятностей

$$\mathbf{P_v(m\Delta_t)} = \left\{ \mathbf{p_{ij}} = \int\limits_{u_{i-1}}^{u_i} \int\limits_{u_{j-1}}^{u_j} \mathbf{W_2(u, v, m\Delta_t)dudv;\ i, j \in \overline{1, N_\nu + 1}} \right\}.$$

В отличие от матрицы (2), здесь сумма всех элементов матрицы равна единице, т.е.

$$\sum_{i=1}^{N_\nu+1} \sum_{j=1}^{N_\nu+1} \mathbf{p_{ij}} = \sum_{i=1}^{N_\nu+1} \mathbf{p_i} = \mathbf{1}.$$

Свойства однородной марковской цепи определяются параметрами АЦП ($\mathbf{U}$, $\mathbf{X}$, $\boldsymbol{\Delta_t}$) и характеристиками сигнала $\mathbf{u(t)}$: $\mathbf{W_2(u, v, \boldsymbol{\tau})}$, корреляционной функцией $\mathbf{R(\boldsymbol{\tau})}$. Зная интервал корреляции $\boldsymbol{\tau_0}$ преобразуемого сигнала $\mathbf{u(t)}$, можно определить условия получения конечной связности цепи $\boldsymbol{\upsilon}$ и оценить особенности матрицы (2).

Используя определение интервала корреляции и теорему Хинчина – Винера, [4] можно записать

$$\tau_0 = \frac{1}{2\sigma_0^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau = \frac{1}{2\sigma_0^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \right| d\tau,$$

где $\boldsymbol{\sigma_0^2}$ - дисперсия и $\mathbf{S(\boldsymbol{\omega})}$ - энергетический спектр сигнала $\mathbf{u(t)}$.

Если корреляционная функция неотрицательна ($\mathbf{R(\boldsymbol{\tau}) \geq 0}$), то интегрирование по $\boldsymbol{\tau}$ можно осуществлять без взятия модуля. Меняя порядок интегрирования, получим

$$\tau_0 = \frac{1}{2\sigma_0^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\delta(\omega) d\omega = \frac{S(0)}{2\sigma_0^2},$$

где $\boldsymbol{\delta(\omega)}$ – $\boldsymbol{\delta}$ - функция в частотной области.

Учитывая, что $\mathbf{F_{экв} = \boldsymbol{\sigma_0}^2/S(0)}$ - эквивалентная ширина спектра сигнала $\mathbf{u(t)}$, получим $\boldsymbol{\tau_0} = \mathbf{1/2F_{экв}}$. Для получения на выходе АЦП нуль - связной цепи ($\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{0}$), необходимо иметь некоррелированные отсчеты и, следовательно, интервал дискретизации $\boldsymbol{\Delta_t > \tau_0}$. На практике для получения малых погрешностей временной дискретизации обеспечивают, как правило, малую величину интервала $\boldsymbol{\Delta_t} = \mathbf{1/2\boldsymbol{\alpha}F_{экв}}$ ($\boldsymbol{\alpha}$ - постоянная, $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{1}$) и $\boldsymbol{\Delta_t \leq \tau_0}$. Результаты амплитудного квантования любых двух соседних отсчетов $\mathbf{u(n\Delta_t)}$ и $\mathbf{u[(n+1)\Delta_t]}$ сохранят все свойства исходного сигнала, если эффективное приращение за время $\boldsymbol{\Delta_t}$ будет отвечать условию

$$\sqrt{\left\langle \left\{ u\left[(m+1)\Delta_t\right] - u(m\Delta_t) \right\}^2 \right\rangle} = \sqrt{2R(0) - 2R(m\Delta_t)} > \Delta_u . \qquad (3)$$

Полученное условие (3) отражает взаимозависимость интервалов временной дискретизации и амплитудного квантования.

Можно ввести оценку связности цепи $\boldsymbol{\upsilon = \mathrm{int}(\tau_0/\Delta_t + 0{,}5)}$, где $\mathbf{int(z)}$ - целая часть числа $\mathbf{z}$.

Если интервал временной дискретизации отвечает условию $\boldsymbol{\tau_0/2 < \Delta_t \le \tau_0}$, то на выходе АЦП получим марковскую цепь, у которой в каждой строке матрицы (2) существенно отличными от нуля будут лишь три элемента: $\mathbf{p_{i(i-1)}}$, $\mathbf{p_{ii}}$, $\mathbf{p_{i(i+1)}}$.

Используя параметры АЦП и марковской цепи, можно определить параметры цифрового случайного процесса: среднее значение $\mathbf{x_{срц} = (X, P_0)}$; дисперсию $\boldsymbol{\sigma_ц^2 = (X_2, P_0) - x_{срц}^2}$; корреляционную функцию

$$\mathbf{R(m\Delta_t) = X^т P_\nu(m\Delta_t) X - x_{срц}{}^2},$$

где $\mathbf{X_2 = \left\{ x_i^2, \quad i \in \overline{1, N_\nu + 1} \right\}}$; $\mathbf{X}^т$ — транспонированный вектор $\mathbf{X}$, а также целый ряд других параметров [2 - 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кнышев И.П. Оптимизация аналого - цифрового преобразователя по параметрам одномерного распределения. // Радиотехника и электроника. - 1987. - № 5. – С. 971 - 979.

2. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. - М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.

3. Лихарев В.А. Цифровые методы и устройства в радиолокации. - М.: Сов. радио, 1973. – 456 с.

4. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн.1. - М.: Сов. радио, 1974. – 552 с.