УДК 621.04

СИНТЕЗ РАНДОМИЗИРОВАННОГО ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МАНЕВРИРУЮЩЕГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

д.т.н. О.Н. Фоменко, к.т.н. А.А. Журавлев

Предлагается методика синтеза семейства маневрирующих попадающих траекторий для рандомизированного терминального управления летательного аппарата. Синтезируется гибкая программа угла тангажа, обеспечивающая заданную методическую погрешность при заранее неопределенных начальных условиях.

Задача синтеза рандомизированного управления для ухода от преследователя с заданной вероятностью сформулирована в [1]. При рандомизированном управлении из семейства равновероятных различных траекторий случайным образом выбирается одна, которая и реализуется в полете.

Для всех ЛА одного класса задается одна программа - максимальной дальности полета. Она технически реализуется программным механизмом. ЛА запускается с передвижного основания после остановки. При стрельбе в заданную точку, выбором точки старта определяется начальная дальность, при этом варьируются время, скорость и угол подлета к цели.

Такую программу можно интерпретировать как программу, задающую семейство попадающих траекторий, с рандомизацией только по начальным условиям. Недостатком этого способа является то, что выбранной начальной дальности соответствует только одна попадающая траектория с определенной формой, временем подлета, скоростью подлета и углом подлета к цели, что облегчает противнику прогноз точек старта и встречи.

Для увеличения степени неопределенности прогнозирования противником траектории ЛА предлагается использовать гибкую программу семейства попадающих траекторий при любых начальных условиях из допустимого диапазона. Дополнительно рандомизируются форма и параметры попадающей траектории.

В статье рассматривается методика синтеза семейства маневрирующих попадающих траекторий по нормированным желаемым траекториям. Синтезируется гибкая программа терминального управления, обеспечивающая заданную методическую погрешность при заранее неопределенных начальных условиях.

Формулировка задачи. В неопределенный заранее момент времени $\mathbf{t=t_1}$, отсчитываемый от момента старта, ЛА находится в точке 1 с заранее неопределенными координатами $(\mathbf{x_1;y_1})$, обладает скоростью $(\dot{\mathbf{x}}_1;\dot{\mathbf{y}}_1)$, и ускорением $(\ddot{x}_1 ; \ddot{y}_1)$. Требуется определить семейство маневрирующих траектории, переводящих объект в ε - окрестность точки $(x_k;y_k)$, в которой угол наклона скорости равен θ_k, при ограничении угла поворота руля $|\delta| \le \delta_{max}$.

Допустим, что ЛА оснащен стабилизированными в инерциальном пространстве гироинтеграторами, которые позволяют измерять кажущиеся ускорения и скорости. Тогда движение центра масс в вертикальной плоскости начальной стартовой системы координат OXY может определяться как:

$$\ddot{x} = g_0 n_x - g_x; \qquad \ddot{y} = g_0 n_y - g_y;$$

$$x = \int_0^t \dot{x}\,dt; \quad \dot{x} = w_x - \int_0^t g_x dt; \qquad y = \int_0^t \dot{y}\,dt; \quad \dot{y} = w_y - \int_0^t g_y dt, \tag{1}$$

где: $\ddot{x}, \ddot{y}$ – проекции относительного ускорения; $\dot{x}, \dot{y}$ – проекции скорости; x, y – координаты; $g_0 n_x$, $g_0 n_y$ – измеряемые проекции кажущегося ускорения; n_x, n_y – перегрузки; w_x, w_y – измеряемые проекции кажущейся скорости; g_0 – ускорение силы притяжения у поверхности Земли; g_x, g_y – проекции ускорения силы притяжения; t – время, отсчитываемое от момента старта.

На ЛА действуют сила лобового сопротивления, подъемная сила и сила притяжения. Тогда, наряду с измерением, перегрузки могут быть описаны выражениями:

$$n_x = -\frac{qS}{mg_0}\left[c_x \cos\theta + c_y \sin\theta\right]; \quad n_y = \frac{qS}{mg_0}\left[-c_x \sin\theta + c_y \cos\theta\right]; \tag{2}$$

$$c_x = c_{x0} + a\cdot\alpha^2, \; c_y = c_y^{\alpha}\alpha,$$

где θ – угол наклона скорости к стартовому горизонту; c_x, c_y – безразмерные аэродинамические коэффициенты; c_{x0}, a, c_y^{α} – известные постоянные коэффициенты аппроксимации; q – скоростной напор; S – площадь миделя; m – масса; α – угол атаки.

Управление аэродинамической силой сводится к управлению углом атаки. Угол атаки формируется при вращении корпуса ЛА в вертикальной плоскости вокруг центра масс за счет поворота аэродинамического руля. Угол поворота руля δ представляется в виде суммы $\delta = \delta_1 + \delta_2$, где δ_1 – угол, формирующий управляющий момент, расходуемый на управление движением центра масс; δ_2 – угол, формирующий управляющий момент, расходуемый на управление движением вокруг центра масс.

В статье рассматривается управление только движением центра масс и вычисление значения δ_1. На борту ЛА попадающая траектория задается гибкой программой угла тангажа. Углы тангажа ϑ, наклона вектора скорости θ и атаки α связаны кинематическим соотношением

$$\vartheta = \theta + \alpha . \qquad (3)$$

Для формирования программы угла тангажа определяются значения углов θ и α, соответствующие желаемой попадающей траектории. Выражения (2) позволяют получить соотношение для вычисления угла атаки. Разделив n_y на n_x и, решив квадратное уравнение относительно α, получаем

$$\alpha = -\frac{c_y^\alpha}{2a} \cdot \frac{n_y \sin\theta - n_x \cos\theta}{n_y \cos\theta + n_x \sin\theta} \pm \sqrt{\left(\frac{c_y^\alpha}{2a} \cdot \frac{n_y \sin\theta - n_x \cos\theta}{n_y \cos\theta + n_x \sin\theta}\right)^2 - \frac{c_{x0}}{a}} . \qquad (4)$$

Угол отклонения рулей вычисляется по балансировочной зависимости

$$\delta_{1б} = -\,к\alpha_б, \qquad (5)$$

где $\delta_{1б}$, $\alpha_б$ - балансировочные углы отклонения руля и атаки; **к** – известный коэффициент.

Далее, предлагается способ задания попадающей траектории, удовлетворяющей концевым условиям. Маневр совершается в районе цели, при этом расстояние от центра масс до начала стартовой системы координат значительно больше расстояния до точки цели. Целесообразно маневрирующую попадающую траекторию задавать в системе координат, связанной с точкой цели.

Вводится целевая неподвижная декартовая система координат $O_к\xi\eta$ с началом в точке $К(x_k; y_k)$. Ось $O_к\xi$ составляет с осью **OX** угол $\theta_к$ (рис. 1).

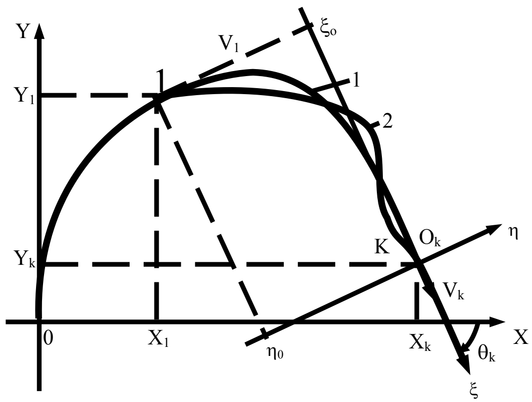

Рис.1. Траектория ЛА в целевой системе координат $O_к\xi\eta$ (1 – опорная попадающая траектория; 2 – маневрирующая попадающая траектория)

Координаты центра масс (ξ,η), скорость $(\dot\xi, \dot\eta)$ и ускорение $(\ddot\xi, \ddot\eta)$ в этой системе связаны с координатами (x,y), скоростью $(\dot x, \dot y)$ и ускорением $(\ddot x, \ddot y)$ формулами преобразования:

$$\begin{aligned} &\xi(\tau) = \Delta x(t)k_2 + \Delta y(t)k_1; && \eta(\tau) = -\Delta x(t)k_1 + \Delta y(t)k_2; \\ &\dot\xi = \dot x k_2 + \dot y k_1; && \dot\eta = -\dot x k_1 + \dot y k_2; \qquad (6) \\ &\ddot\xi = \ddot x k_2 + \ddot y k_1; && \ddot\eta = -\ddot x k_1 + \ddot y k_2, \end{aligned}$$

где $\tau = t - t_1$ - время, отсчитываемое от момента начала маневра t_1; $dt = d\tau$; $\Delta x(t) = x(t) - x_к$, $\Delta y(t) = y(t) - y_к$, $k_1 = \sin\theta_к$, $k_2 = \cos\theta_к$.

Для того, чтобы машинные переменные изменялись в диапазоне [0, 1], проводится масштабирование относительных координат:

$$\tilde{\xi}(\tau) = \frac{\xi(\tau)}{\xi_0}; \qquad \tilde{\eta}(\tau) = \frac{\eta(\tau)}{\eta_0}, \tag{7}$$

где $\xi_0 = \xi(0)$, $\eta_0 = \eta(0)$ – значения масштабных коэффициентов.

Тогда $\tilde{\xi}(0) = 1$, $\tilde{\eta}(0) = 1$; и $\tilde{\xi}(\tau) = 0$ при $x(t) = x_к$, а $\tilde{\eta}(\tau) = 0$ при $y(t) = y_к$.

Переход к масштабированным относительным координатам уменьшает потребное время для расчета программы в БЦВК.

Попадающей траектории в целевой системе координат соответствует явная функция $\tilde{\eta}(\tilde{\xi})$, принимающая значение **1** при $\tau = 0$ и проходящая через начало координат. Для исключения времени τ вводится специальный аргумент χ, являющийся линейно возрастающей функцией от промасштабированной координаты $\tilde{\xi}$:

$$\chi(\tilde{\xi}) = 1 - \tilde{\xi}. \tag{8}$$

Дифференцируя $\tilde{\eta}(\tau)$ по специальному аргументу χ, получаем выражения для вычисления характеристик наклона траектории и кривизны в целевой системе координат:

$$\tilde{\eta}' = \frac{d\tilde{\eta}}{d\chi} = -\frac{\xi_0}{\eta_0}\frac{\dot{\eta}}{\dot{\xi}}; \qquad \tilde{\eta}'' = \frac{d^2\tilde{\eta}}{d\chi^2} = -\frac{\xi_0}{\eta_0}\frac{\ddot{\eta}}{\ddot{\xi}}. \tag{9}$$

В правую часть выражения для $\tilde{\eta}'$ подставляются выражения для $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ из (6) и, учитывая, что $\dot{x} = v\cos\theta$, $\dot{y} = v\sin\theta$, после преобразований получаем выражение для вычисления угла наклона вектора скорости по характеристике наклона траектории $\tilde{\eta}'$:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{k_1 - k_2\tilde{\eta}'\dfrac{\eta_0}{\xi_0}}{k_2 + k_1\tilde{\eta}'\dfrac{\eta_0}{\xi_0}}\right). \tag{10}$$

В правую часть выражения для $\tilde{\eta}''$ подставляются $\ddot{\eta}$ и $\ddot{\xi}$ из (7). Учитывая, что $\ddot{x}, \ddot{y}$ описываются (1), получаем выражение, связывающее составляющие перегрузки и характеристику кривизны $\tilde{\eta}''$:

$$\mathbf{n_y = (n_x - g_x)F(\tilde{\eta}'') + g_y}, \quad \text{где } \mathbf{F(\tilde{\eta}'')} = \frac{\mathbf{k_1 - k_2 \frac{\eta_0}{\xi_0}\tilde{\eta}''}}{\mathbf{k_2 + k_1 \frac{\eta_0}{\xi_0}\tilde{\eta}''}}. \qquad (11)$$

Для определения программных значений θ и $\mathbf{n_y}$ требуется задать программные характеристики наклона траектории $\tilde{\eta}'$ и кривизны $\tilde{\eta}''$, входящих в правые части (10) и (11). Для этого семейство масштабированных траекторий $\tilde{\eta}(\tilde{\xi})$ на интервале $\tilde{\xi} \in [0, 1]$ аппроксимируется программной функцией вида

$$\tilde{\eta}(\tilde{\xi}) = S(\chi(\tilde{\xi})) + \delta S(\chi(\tilde{\xi})), \qquad (12)$$

где $S(\chi(\tilde{\xi}))$ задает форму опорной попадающей траектории, а $\delta S(\chi(\tilde{\xi}))$ задает движение относительно опорной попадающей траектории.

Для сопряжения траектории с предыдущим участком без скачков кривизны траектории и выполнения заданных граничных условий, $S(\chi(\tilde{\xi}))$ определяется экспоненциальной функцией

$$S(\chi(\tilde{\xi})) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{C_i} \exp(\lambda_i \chi(\tilde{\xi})), \qquad \lambda_i < 0, \qquad (13)$$

где λ_i - параметры программной функции; $\mathbf{C_i}$ - постоянные коэффициенты.

Неопределенные начальные условия начала маневра учитываются постоянными коэффициентами $\mathbf{C_i}$. При заданных значениях λ_i, $\mathbf{i = 1, 2, 3}$; коэффициенты $\mathbf{C_i}$ однозначно определяются тремя начальными условиями:

$$\mathbf{S(0) = 1}; \quad S'\big|_{\tau=0} = \tilde{\eta}\big|_{\tau=0}; \quad S''\big|_{\tau=0} = \tilde{\eta}''\big|_{\tau=0}. \qquad (14)$$

Значения параметров $\lambda_1 < 0$, $\mathbf{i = 1, 2, 3}$ выбираются из условия выполнения граничных условий правого конца попадающей траектории $|S_k| \le \varepsilon/\eta_0$ при апериодической форме функции $S(\chi(\tilde{\xi}))$ и без учета ограничений на управляющие воздействия.

Возмущающие факторы и ограничения на управление приводят к отклонению фактической траектории от опорной. Для компенсации рассогласования используется функция $\delta S(\chi(\tilde{\xi}))$, которая является асимптотически устойчивым решением линейного однородного дифференциального уравнения 2 - го порядка с постоянными коэффициентами

$$\delta S'' + \mu_1 \delta S' + \mu_0 \delta S = 0, \quad \mu_1 > 0, \ \mu_0 > 0, \qquad (15)$$

где $\delta S = \tilde{\eta}(\tilde{\xi}) - S(\chi(\tilde{\xi}))$.

Значения коэффициентов μ_1, μ_0 выбираются из условия физической реализуемости маневрирующей попадающей траектории $\eta(\xi)$ с учетом ограничений на управляющие воздействия и перегрузки.

Дифференцируя (12) по аргументу χ получаем программную характеристику наклона попадающей траектории

$$\tilde{\eta}' = S' + \delta S' \qquad (16)$$

и программную характеристику кривизны попадающей траектории

$$\tilde{\eta}'' = S'' + \mu_1 (S' - \tilde{\eta}') + \mu_0 (S - \tilde{\eta}). \qquad (17)$$

Подстановка (16) в (10) дает программное изменение угла наклона вектора скорости $\theta^{\bullet}$. Подстановка (18) в (12) дает программное изменение вертикальной перегрузки n_y^*. Подстановка программных значений $\theta^{\bullet}$ и n_y^* в (4) дает выражение для вычисления программного значения угла атаки $\alpha^{\bullet}$. Подстановка программных значений $\alpha^{\bullet}$ и $\theta^{\bullet}$ в (5) позволяет вычислить программное значение угла тангажа $\vartheta^{\bullet}$:

$$\vartheta^{\bullet} = \theta^{\bullet} + \alpha^{\bullet}, \qquad (18)$$

где: $\theta^{\bullet} = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{k_1 - k_2 \dfrac{\eta_0}{\xi_0}(S' + \delta S')}{k_2 + k_1 \dfrac{\eta_0}{\xi_0}(S' + \delta S')} \right)$; $\alpha^{\bullet} = -\dfrac{c_y^{\alpha}}{2a} F \pm \sqrt{\left(\dfrac{c_y^{\alpha}}{2a} F \right)^2 - \dfrac{c_{x0}}{a}}$;

$$F = \frac{n_x (F_1 \sin\theta^{\bullet} - \cos\theta^{\bullet}) + (g_y - F_1 g_x) \sin\theta^{\bullet}}{n_x (F_1 \cos\theta^{\bullet} + \sin\theta^{\bullet}) + (g_y - F_1 g_x) \cos\theta^{\bullet}};$$

$$F_1 = \frac{k_1 - k_2 \dfrac{\eta_0}{\xi_0} \left(S'' + \mu_1 (S' - \tilde{\eta}') + \mu_0 (S - \tilde{\eta}) \right)}{k_2 + k_1 \dfrac{\eta_0}{\xi_0} \left(S'' + \mu_1 (S' - \tilde{\eta}') + \mu_0 (S - \tilde{\eta}) \right)}.$$

Угол отклонения рулей вычисляется по (5) при программном значении угла атаки.

Управление, синтезированное на основе (18), является гибким терминальным управлением по измеряемой перегрузке. Замкнутой системе управления навязывается свойство решения однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Замкнутая система управления приобретает свойство квазиинвариантности к начальным условиям.

Для задания семейства из **j** различных попадающих траекторий необходимо подобрать **j** наборов значений коэффициентов **(λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2)**, а в полете из этого набора случайным образом выбирается один для реализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фоменко О.Н. Игровой метод синтеза рандомизированных управлений динамическими объектами в условиях неопределенности // Системы управления и связи. Сб. научн. тр. – Харьков: НАНУ, ПАНИ, ХВУ, 1996. – С. 44 - 55.