УДК 623.021:005

# ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛЕННЯ НЕОДНОРІДНИХ ЗАСОБІВ У ЗАДАЧАХ ПЛАНУВАННЯ

Д.І. Євстрат, О.А.Кононова, О.Л. Сорока
(подав д.т.н., проф. Ю.В. Стасєв)

Розглядається дослідження загальної математичної моделі розподілення неоднорідних засобів у задачах планування, яка буде дозволяти розподілити існуючі засоби, щоб максимізувати повну імовірність виявлення об'єкту.

У [1] наведена математична модель оптимального розподілення засобів по об’єктах, яка описує різноманітні задачі планування та управління. Алгоритми рішення таких задач досить непрості [2], але деякі особливості наведеної моделі дозволяють побудувати ефективний алгоритм, який базується на методі припустимих напрямків. Проведемо дослідження математичної моделі оптимального розподілення неоднорідних засобів:

$$\mathbf{P(X)=\sum_{j=1}^{n}P_j[1-\prod_{i=1}^{m}(1-q_{ij})^{x_{ij}}]\to max} \ ;$$

$$\mathbf{\sum_{j=1}^{n}X_{ij}\le A_i, i=\overline{1,m}} \ ; \qquad (1)$$

$$\mathbf{x_{ij}=\left[x_{ij}\right]\ge 0, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}} \ ,$$

з метою виявлення цих особливостей.

Перетворимо цільову функцію математичної моделі (1):

$$\mathbf{P(X)=\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{j=1}^{n}p_j\prod_{i=1}^{m}(1-q_{ij})^{x_{ij}}=1-\sum_{j=1}^{n}p_i\prod_{i=1}^{m}e^{x_{ij}\ln(1-q_{ij})}=}$$

$$\mathbf{1-\sum_{j=1}^{n}p_j\exp(-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_{ij}),}$$

де $\mathbf{a_{ij}=-\ln(1-q_{ij})\ge 0, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}.}$

Вочевидь, що обмеження на кількість існуючих засобів пошуку у моделі (1) є рівностями

$$\mathbf{\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=A_i, \quad (i=\overline{1,m}).}$$

Тому математична модель (1) спростується до наступного вигляду:

$$\mathbf{Q(X)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p_j \exp(-\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij}) \to \min} \;;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{x_{ij} = A_i, i = \overline{1,m}} \;; \tag{2}$$

$$\mathbf{x_{ij} = [x_{ij}] \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}} \;,$$

де $\mathbf{Q(X)}$ - повна імовірність невиявлення об’єкту згідно плану розподілення **X**.

Розглянемо задачу (2) без урахування умов на цілочисельність змінних:

$$\mathbf{Q(X)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p_j \exp(-\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij}) \to \min} \;;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{x_{ij} = A_i, i = \overline{1,m}} \;; \tag{3}$$

$$\mathbf{x_{ij} = [x_{ij}] \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}} \;,$$

і доведемо, що вона є задачею опуклого програмування.

***Твердження 1***. Задача (3) є задачею опуклого програмування.

***Доведення***. Опуклість допустимої множини очевидна, оскільки допустима множина являється перерізом кінцевого числа гіперплощин і півпросторів.

Доведемо спочатку строгу опуклість функцій $\mathbf{L_j(X) = \exp(-\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij})}$.

Нехай плани розподілення $\mathbf{X^1}$ та $\mathbf{X^2}$ задовольняють умовам задачі (3), тоді їх опукла комбінація $\mathbf{\alpha X^1 + (1-\alpha) X^2, \alpha \in [0,1]}$ також задовольняє умовам задачі. Отже,

$$\mathbf{L_j\left[\alpha X^1 + (1-\alpha) X^2\right] = \exp\left(-\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\left[\alpha x_{ij}^{(1)} + (1-\alpha) x_{ij}^{(2)}\right]\right) =}$$

$$\mathbf{= \exp\left(\alpha \sum_{i=1}^{m}(-a_{ij} x_{ij}^{(1)}) + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{m}(-a_{ij} x_{ij}^{(2)})\right) = e^{\alpha z_1 + (1-\alpha) z_2}} \;,$$

де $\mathbf{z_1 = \sum_{i=1}^{m}\left(-a_{ij} x_{ij}^{(1)}\right); z_2 = \sum_{i=1}^{m}\left(-a_{ij} x_{ij}^{(2)}\right)}$.

Тому що експонента є строго опуклою функцією, то

$$\mathbf{e^{\alpha z_1 + (1-\alpha) z_2} < \alpha e^{z_1} + (1-\alpha) e^{z_2} = \alpha L_j(X^1) + (1-\alpha) L_j(X^2)} \;.$$

Таким чином, функції $\mathbf{L_j(X)}$ є строго опуклими, тоді функція

$$\mathbf{Q(X) = \sum_{j=1}^{n} p_j L_j(X)}$$

являється строго опуклою, тому що є лінійною комбінацією з невід'ємними коефіцієнтами строго опуклих функцій

$$\mathbf{Q\left[\alpha X^1 + (1-\alpha)X^2\right] = \sum_{j=1}^{n} p_j L_j\left[\alpha X^1 + (1-\alpha)X^2\right] < \alpha \sum_{j=1}^{n} p_j L_j\left(X^1\right) +}$$

$$\mathbf{+ (1-\alpha)\sum_{j=1}^{n} p_j L_j\left(X^2\right) = \alpha Q(X^1) + (1-\alpha)Q(X^2).}$$

***Твердження 2***. Задача (3) завжди має рішення, при цому воно є єдиним.

***Доведення***. Існування рішення задачі (3) прямує з теореми Вейерштрасса, бо функція $\mathbf{Q(X)}$ неперервна на замкненій та обмеженій множині.

Єдиність рішення витікає зі строгої опуклості функції $\mathbf{Q(X)}$.

Таким чином, якщо буде розроблений ефективний алгоритм пошуку точки мінімуму функції $\mathbf{Q(X)}$ на допустимій множині задачі (3), то з твердження 2 прямує, що вона є єдиним оптимальним планом задачі (3), а також й оптимальним нецілочисельним планом вихідної задачі (1), тобто

$$\mathbf{X^* = \arg\min_{D} Q(X) = \arg\max_{D} P(X)},$$

де $\mathbf{D}$ - допустима множина задачі (3), або задач (1) та (2) без урахуванням умов на цілочисельність. Максимум повної імовірності буде дорівнювати $\mathbf{P(X^*)}$.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Кононов В.Б., Городецький С.Л., Кушнерук О.Ю. Математична модель оптимального розподілення неоднородних засобів у задачах планування // Системи обробки інформації. Зб. наук. праць. Вип. 1(5). – Харків : НАНУ, ПАНМ, ХВУ, 1999. – С. 93 - 95.

2. Кушнерук Ю.І., Кононов В.Б., Євстрат Д.І. Оптимальне планування процесів пошуку системи // Зб. наук. праць. Ракетно - космічна техніка. Вип. 1. – Харків : ХВУ, 1999. – С. 71 - 73.