УДК 681. 007. 05

МНОГОЗНАЧНЫЕ МОДЕЛИ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

к.т.н. В.П. Машталир*
(представил д.т.н., проф. О.Н. Фоменко)

Приведена формализация точечно - множественных отображений, являющихся адекватной моделью обработки и интерпретации сигналов различной физической природы. Исследованы основные свойства многозначных отображений.

В концептуальном плане точечно - множественные отображения с большой степенью адекватности отражают целый ряд задач преобразований данных произвольной природы или их признаковых представлений. Особый интерес вызывает интерпретация результатов обработки, когда, с одной стороны, многозначность усложняет трактовку, а с другой, может выступать в качестве ее некоторой основы. Формализуем и исследуем основные свойства многозначных отображений.

Пусть Θ – некоторое множество. Совокупность всех непустых подмножеств множества Θ обозначим через $\pi(\Theta)$. Рассмотрим Θ_1, Θ_2 – некоторые подмножества конечномерных пространств. Отображение $\Xi(\theta)$, переводящее каждую точку $\theta' \in \Theta_1$ в некоторое подмножество Ω множества $\Theta_2 = \{\theta''\}$, является многозначным (точечно - множественным) отображением Θ_1 в Θ_2 или отображением Θ_1 в $\pi(\Theta_2)$, т.е.:

$$\Xi : \Theta_1 \to \pi(\Theta_2);$$
$$\Xi(\Lambda) = \bigcup_{\theta' \in \Lambda} \Xi(\theta'),\ \theta' \in \Lambda \in \pi(\Theta_1). \tag{1}$$

В общем случае под прообразом многозначного отображения Ξ будем понимать множество

$$\mathbf{Dom}\,\Xi = \{\theta' : \theta' \in \Theta_1, \Xi(\theta') = \Omega, \Omega \in \pi(\Theta_2)\}, \tag{2}$$

а под подобразом – множество

$$\mathbf{Im}\,\Xi = \bigcup_{\theta' \in \mathbf{Dom}\,\Xi} \Xi(\theta'). \tag{3}$$

Любому точечно - множественному отображению Ξ соответствует некоторое опорное подмножество Θ_Ξ прямого произведения $\Theta_1 \times \Theta_2$

$$\Theta_\Xi = \{(\theta', \theta'') : \theta' \in \mathbf{Dom}\,\Xi, \theta'' = \Xi(\theta')\},\ \Theta_\Xi \in \pi(\Theta_1 \times \Theta_2). \tag{4}$$

Поставим отображению $\Xi : \Theta_1 \to \pi(\Theta_2)$ в соответствие отображение, которое будем называть транспонированным и обозначать Ξ^T:

$$\Xi^{T} : \Theta_2 \to \pi(\Theta_1),$$
$$\Xi^{T}(\theta'') = \{\Omega \in \pi(\Theta_1) : \forall \theta' \in \Omega \Rightarrow \theta'' \in \Xi(\theta')\}. \qquad (5)$$

Кроме того, на множестве $\Theta_1 \times \Theta_2$ введем двухзначный предикат Π_Ξ представления точечно - множественного отображения Ξ :

$$\Pi_\Xi(\theta', \theta'') = \begin{cases} 1, & (\theta', \theta'') \in \Theta_\Xi; \\ 0, & (\theta', \theta'') \notin \Theta_\Xi. \end{cases} \qquad (6)$$

Лемма 1. Для того, чтобы два многозначных отображения были равными, необходимо и достаточно совпадение их опорных множеств.

Доказательство. Необходимо доказать: $\Xi_1 = \Xi_2 \Leftrightarrow \Theta_{\Xi_1} = \Theta_{\Xi_2}$.

Докажем необходимость. Пусть $\Xi_1 = \Xi_2$ и $(\theta', \theta'') \in \Theta_{\Xi_1}$, тогда из (4) следует $\theta' \in \mathbf{Dom}\,\Xi_1 = \mathbf{Dom}\,\Xi_2$ и $\theta'' \in \Xi_1(\theta') = \Xi_2(\theta')$, но это означает, что $(\theta', \theta'') \in \Theta_{\Xi_2}$. Иначе говоря, $\Theta_{\Xi_1} \subset \Theta_{\Xi_2}$. В силу индексной симметрии аналогично доказывается обратное вложение $\Theta_{\Xi_1} \supset \Theta_{\Xi_2}$. Значит, $\Theta_{\Xi_1} = \Theta_{\Xi_2}$.

Для доказательства достаточности предположим, что $\Theta_{\Xi_1} = \Theta_{\Xi_2}$ и $\theta' \in \mathbf{Dom}\,\Xi_1$, $\theta'' \in \Xi_1(\theta')$. Тогда $(\theta', \theta'') \in \Theta_{\Xi_1} = \Theta_{\Xi_2}$ и $\theta' \in \mathbf{Dom}\,\Xi_2$, $\theta'' \in$ $\in \Xi_1(\theta')$. Следовательно, $\mathbf{Dom}\,\Xi_1 \subset \mathbf{Dom}\,\Xi_2$ и $\Xi_1(\theta') \subset \Xi_2(\theta')$. С учетом отмеченной выше индексной симметрии доказывается справедливость обратных включений, т.е. $\mathbf{Dom}\,\Xi_1 = \mathbf{Dom}\,\Xi_2$ и $\Xi_1(\theta') = \Xi_2(\theta')$, откуда вытекает требуемое равенство $\Xi_1 = \Xi_2$. *Лемма доказана.*

Следствие. $\Xi_1 = \Xi_2 \Leftrightarrow \Pi_{\Xi_1} = \Pi_{\Xi_2}$.

Предположим теперь, что $\Xi_1, \Xi_2 : \Theta_1 \to \pi(\Theta_2)$.

Будем говорить, что отображение Ξ_1 вложено в Ξ_2, и обозначать $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$ тогда и только тогда, когда $\Theta_{\Xi_1} \subset \Theta_{\Xi_2}$.

Лемма 2. Вложение $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$ имеет место, если и только если выполняется условие $\forall \theta' \in \mathbf{Dom}\,\Xi_1 \Rightarrow \theta' \in \mathbf{Dom}\,\Xi_2$ **и** $\Xi_1(\theta') \subset \Xi_2(\theta')$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$ и θ' – произвольный элемент из $\mathbf{Dom}\,\Xi_1$. Тогда $\Xi_1(\theta') = \Omega \in \pi(\Theta_2)$. Выберем произвольный элемент θ'' из $\Xi_1(\theta')$; ясно, что $(\theta', \theta'') \in \Theta_{\Xi_1} \subset \Theta_{\Xi_2}$. Но тогда из (4) имеем $\theta' \in \mathbf{Dom}\,\Xi_2$ и $\theta'' = \Xi_2(\theta')$, иначе – $\Xi_1(\theta') \subset \Xi_2(\theta')$.

Отметим факт, вытекающий из определения предиката и вложения: $\Pi_{\Xi_1} \le \Pi_{\Xi_2} \Leftrightarrow \Xi_1 \subseteq \Xi_2$, и докажем обратное. Пусть имеет место утверждение леммы и $\Pi_{\Xi_1}(\theta', \theta'') = 1$. Тогда $(\theta', \theta'') \in \Theta_{\Xi_1}$, т.е. $\theta' \in \mathbf{Dom}\,\Xi_1$. С другой стороны, из предположения справедливости утверждения естественным образом имеем $\theta' \in \mathbf{Dom}\,\Xi_2$ и $\theta'' \in \Xi_1(\theta') \subset \Xi_2(\theta')$, значит $\Pi_{\Xi_2}(\theta',\theta'') = 1$. Отсюда находим $\Pi_{\Xi_1} \le \Pi_{\Xi_2}$ и, следовательно, $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$. *Лемма доказана.*

Лемма 3. Для произвольных точечно - множественных отображений $\Xi : \Theta_1 \to \pi(\Theta_2)$ и $\Xi_i : \Theta_1 \to \pi(\Theta_2)$, $i = 1,2$ имеют место свойства:

а) $\mathbf{Dom}\,\Xi = \mathbf{Im}\,\Xi^T$ и $\mathbf{Dom}\,\Xi^T = \mathbf{Im}\,\Xi$;

б) если $\Xi_1 \subseteq \Xi$ и $\Xi \subseteq \Xi_2$, то $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$;

в) если $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$ и $\Xi_2 \subseteq \Xi_1$, то $\Xi_1 = \Xi_2$;

г) $\left(\Xi^T\right)^T = \Xi$;

д) отношения $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$, $\Xi_1^T \subseteq \Xi_2^T$, $\Theta_{\Xi_1}^T \subseteq \Theta_{\Xi_2}^T$ и $\Pi_{\Xi_1}^T \le \Pi_{\Xi_2}^T$ эквивалентны.

Доказательство. Справедливость свойства *а*) следует непосредственно из определений (2), (3). Свойство *в*) выполняется в силу того, что, если $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$ и $\Xi_2 \subseteq \Xi_1$, то $\Theta_{\Xi_1} \subset \Theta_{\Xi_2}$ и $\Theta_{\Xi_2} \subset \Theta_{\Xi_1}$, т.е. $\Theta_{\Xi_1} = \Theta_{\Xi_2}$. Из леммы 1 окончательно получаем справедливость равенства $\Xi_1 = \Xi_2$.

По аналогии со случаем *в*) вследствие транзитивности вложений множеств Θ_Ξ и Θ_{Ξ_i}, $i = 1,2$ имеет место свойство *б*).

Для доказательства свойства *г*) учтем, что из свойства *а*) имеем $\mathbf{Dom}\,\Xi = \mathbf{Im}\,\Xi^T = \mathbf{Dom}\left(\Xi^T\right)^T$ и $\mathbf{Im}\,\Xi = \mathbf{Dom}\,\Xi^T = \mathbf{Im}\left(\Xi^T\right)^T$, т.е. области определения и области значений многозначных отображений Ξ и $\left(\Xi^T\right)^T$ совпадают. Предположим теперь, что $(\theta',\theta'') \in \Theta_\Xi$, тогда из (5) получим $\theta'' \in \mathbf{Dom}\,\Xi^T$ и $\theta' \in \Xi^T(\theta'')$, т.е. $(\theta',\theta'') \in \Theta_{\Xi^T}$. Дальнейшее применение операции транспозиции приведет к тому, что $(\theta',\theta'') \in \Theta_{(\Xi^T)^T}$, иначе говоря, $\Theta_\Xi \subset \Theta_{(\Xi^T)^T}$. Аналогично доказывается, что $\Theta_{(\Xi^T)^T} \subset \Theta_\Xi$, т.е. $\Theta_\Xi = \Theta_{(\Xi^T)^T}$ и, тем самым, $\left(\Xi^T\right)^T = \Xi$.

Остановимся на свойстве *г*). Пусть $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$. Для любого точечно - множественного отображения $\Xi : \Theta_1 \to \pi(\Theta_2)$ из определения предиката отображения следует справедливость равенства $\Pi_\Xi(\theta',\theta'') = \Pi_{\Xi^T}(\theta'',\theta')$.

Тогда из леммы 2 получаем цепочку: если $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$, то $\Pi_{\Xi_1} \le \Pi_{\Xi_2}$ и $\Pi_{\Xi_1}^T \le \Pi_{\Xi_2}^T$, т.е. $\Xi_1^T \subseteq \Xi_2^T$. Но отсюда следует эквивалентность всех включений свойства *г*). *Лемма доказана.*

Доказанные леммы позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. На множестве многозначных отображений включение $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$ индуцирует отношение частичного порядка.

Доказательство. Для введенных отношений необходимо проверить выполнение свойств рефлексивности, транзитивности и антисимметричности. Рефлексивность непосредственно вытекает из леммы 1. Транзитивность и антисимметричность доказаны в лемме 3 – соответственно свойства *б*) и *в*).

Отношение частичного порядка при прелиминарной кластеризации [1-3] эталонных множеств для задач распознавания [4] позволяет существенно редуцировать область определения требуемых многозначных отображений за счет анализа нижнего конуса максимальных по включению отображений, продуцируемых методом, изложенным в [5-7], что в итоге существенно снижает комбинаторную емкость задачи.

Введем и изучим понятие произведения (суперпозиции) точечно - множественных отображений. Пусть $\Xi_1 : \Theta_1' \to \pi(\Theta_2')$ и $\Xi_2 : \Theta_1'' \to \pi(\Theta_2'')$ – два многозначных отображения, вообще говоря, с различными прообразами и образами. Определим точечно-множественное отображение $\Xi_1 \circ \Xi_2$ как

$$(\Xi_1 \circ \Xi_2)(\theta') = \bigcup_{\theta'' \in \Xi_1(\theta')} \Xi_2(\theta''), \tag{7}$$

где $\theta' \in \mathbf{Dom}\,\Xi_1$, $\theta'' \in \mathbf{Dom}\,\Xi_2 \bigcap \mathbf{Im}\,\Xi_1$.

Если множества Θ_2' и Θ_1'' имеют различную физическую природу или же не пересекаются, наконец, если $\mathbf{Dom}\,\Xi_2 \bigcap \mathbf{Im}\,\Xi_1 = \varnothing$, то очевидно, что соотношение (7) теряет всякий смысл. Будем устранять данную неопределенность суперпозиции отображений приравниванием результату пустого множества, которое включим во все системы подмножеств. Как нетрудно заметить, нетривиальное (не переводящее все значения в пустое множество) многозначное отображение существует тогда и только тогда, когда (рис. 1)

$$\mathbf{Dom}\,\Xi_1 \neq \varnothing, \ \mathbf{Im}\,\Xi_1 \bigcap \mathbf{Dom}\,\Xi_2 \neq \varnothing.$$

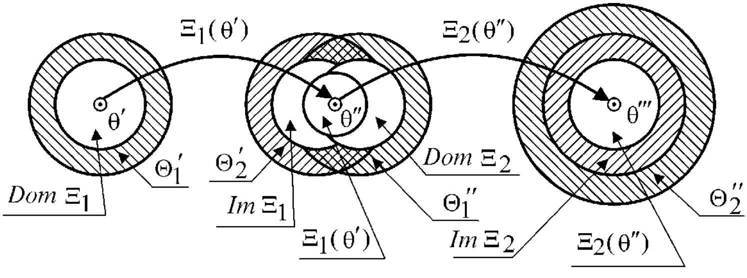

Рис. 1. Геометрическая интерпретация существования суперпозиции нетривиальных точечно-множественных отображений

Остановимся теперь на свойствах введенной операции суперпозиции многозначных отображений.

Свойство 1. Опорное множество $\Theta_{\Xi_1\circ\Xi_2}\in\pi(\Theta_1'\times\Theta_2'')$ произведения точечно - множественных отображений Ξ_1 и Ξ_2 либо пустое множество, либо имеет вид

$$\Theta_{\Xi_1\circ\Xi_2}=\{(\theta',\theta'''):\exists\theta''\Rightarrow(\theta',\theta'')\in\Theta_{\Xi_1},(\theta'',\theta''')\in\Theta_{\Xi_2}\}, \tag{8}$$

где $\theta'\in\mathbf{Dom}\,\Xi_1$, $\theta''\in\mathbf{Dom}\,\Xi_2\bigcap\mathbf{Im}\,\Xi_1$, $\theta'''\in\mathbf{Im}\,\Xi_2$.

Справедливость этого свойства очевидным образом следует из равенства (4) и определения суперпозиции.

В случае бесконечности задания множеств прообразов введем понятие произведения предикатов. Допустим, два произвольных предиката Π_1 и Π_2 определены на прямых произведениях $\Theta_1\times\Theta_2$ и $\widetilde{\Theta}_1\times\widetilde{\Theta}_2$ некоторых множеств Θ_1, Θ_2, $\widetilde{\Theta}_1$ и $\widetilde{\Theta}_2$ соответственно. Рассмотрим предикат Π_1 и зафиксируем $\theta'\in\Theta_1$. Назовем сечением предиката Π_1 вдоль элемента $\theta'\in\Theta_1$ подмножество $S_{\theta'}^{\Theta_2}(\Pi_1)$ множества Θ_2, т.е.

$$S_{\theta'}^{\Theta_2}(\Pi_1)=\{\theta''\in\Theta_2:\Pi_1(\theta',\theta'')=1\}.$$

В этом случае под суперпозицией предикатов Π_1 и Π_2 многозначных отображений будем понимать предикат $\Pi_\Xi=\Pi_1\circ\Pi_2$, заданный на множестве $\Theta_1\times\widetilde{\Theta}_2$ и определяемый соотношениями:

$$\Pi_\Xi(\theta',\theta'')=\begin{cases}1,\ \text{если}\ S_{\theta'}^{\Theta_2}\bigcap S_{\theta''}^{\widetilde{\Theta}_1}\neq\varnothing,\ \theta'\in\Theta_1,\ \theta''\in\widetilde{\Theta}_2;\\ 0,\ \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{9}$$

Заметим, что из (9) следует: если для некоторой пары точек справедливо $\Pi_\Xi(\theta',\theta'')=1$, то $\Theta_2\bigcap\widetilde{\Theta}_1\neq\varnothing$, т.к. $S_{\theta'}^{\Theta_2}(\Pi_1)\subset\Theta_2$ и $S_{\theta''}^{\widetilde{\Theta}_1}(\Pi_2)\subset\widetilde{\Theta}_1$.

Нетрудно установить, что предикат произведения отображений равен произведению предикатов, т.е.

$$\Pi_{\Xi_1\circ\Xi_2}=\Pi_{\Xi_1}\circ\Pi_{\Xi_2}. \tag{10}$$

Действительно, $\Pi_{\Xi_1\circ\Xi_2}(\theta',\theta'')=1$, где $\theta'\in\Theta_1$, $\theta''\in\widetilde{\Theta}_1$ тогда и только тогда, когда $(\theta',\theta'')\in\Theta_{\Xi_1\circ\Xi_2}$. Но отсюда из (8) имеем, что для некоторого элемента θ''' справедливо следующее включение $(\theta',\theta''')\in\Theta_{\Xi_1}$ или $\Pi_{\Xi_1}(\theta',\theta''')=1$, иначе говоря, $\theta'''\in S_{\theta'}^{\Theta_2}(\Pi_{\Xi_1})$. Аналогично из (8) получаем $(\theta''',\theta'')\in\Theta_{\Xi_2}$, что равносильно $\Pi_{\Xi_2}(\theta''',\theta'')=1$, т.е. $\theta'''\in S_{\theta'}^{\widetilde{\Theta}_1}(\Pi_{\Xi_2})$. Таким образом, $\theta'''\in S_{\theta'}^{\Theta_2}(\Pi_{\Xi_1})\bigcap S_{\theta'}^{\widetilde{\Theta}_1}(\Pi_{\Xi_2})\neq\varnothing$. Тем самым, приходим к “истинности" суперпозиции предикатов $\left(\Pi_{\Xi_1} \circ \Pi_{\Xi_2}\right)(\theta', \theta'') = 1$, что и соответствует выполнению равенства (10). Значит, имеет место следующее свойство.

Свойство 2. Для суперпозиции произвольных многозначных отображений Ξ_1, Ξ_2 справедливо $\Pi_{\Xi_1 \circ \Xi_2} = \Pi_{\Xi_1} \circ \Pi_{\Xi_2}$.

Нетрудно убедиться, что из данного свойства следует, что произведение многозначных отображений не коммутирует.

Свойство 3. Операция суперпозиции точечно - множественных отображения некоммутативна.

В то же время легко проверить, что введенная операция ассоциативна.

Действительно, из (7) вытекает, что, с одной стороны,

$$\left[\left(\Xi_1 \circ \Xi_2\right) \circ \Xi_3\right](\theta') = \bigcup_{\theta''' \in \bigcup\limits_{\theta'' \in \Xi_1(\theta')} \Xi_2(\theta'')} \Xi_3(\theta'''),$$

а с другой,

$$\left[\Xi_1 \circ \left(\Xi_2 \circ \Xi_3\right)\right](\theta') = \bigcup_{\theta'' \in \Xi_1(\theta')} \left[\bigcup_{\theta''' \in \Xi_2(\theta'')} \Xi_3(\theta''')\right]. \tag{11}$$

Правые части двух последних равенств совпадают, поскольку для некоторого элемента ϑ, им принадлежащего, имеем одну и ту же кванторную интерпретацию: $\exists \hat{\theta}'''$, для которого $\vartheta \in \Xi_3(\hat{\theta}''')$ и $\exists \hat{\theta}''$, для которого $\hat{\theta}''' \in \Xi_2(\hat{\theta}'')$ и $\hat{\theta}'' \in \Xi_1(\theta')$. Тем самым, доказано следующее свойство.

Свойство 4. Для произвольных точечно-множественных отображений справедливо равенство $\left(\Xi_1 \circ \Xi_2\right) \circ \Xi_3 = \Xi_1 \circ \left(\Xi_2 \circ \Xi_3\right)$.

Свойство 5. Пусть $\Xi_1 : \Theta_1' \to \pi(\Theta_2')$ и $\Xi_2 : \Theta_1'' \to \pi(\Theta_2'')$ – произвольные многозначные отображения, тогда

$$\left(\Xi_1 \circ \Xi_2\right)^{\mathrm{T}} = \Xi_1^{\mathrm{T}} \circ \Xi_2^{\mathrm{T}}. \tag{12}$$

Доказательство. При доказательстве свойства *г*) леммы 3 было установлено, что $\Pi_{\Xi}(\theta', \theta'') = \Pi_{\Xi^{\mathrm{T}}}(\theta'', \theta')$, т.е. $\forall \theta' \in \Theta_1'$ и $\forall \theta'' \in \Theta_2''$ имеем

$$\Pi_{(\Xi_1 \circ \Xi_2)^{\mathrm{T}}}(\theta'', \theta') = \Pi_{\Xi_1 \circ \Xi_2}(\theta', \theta'').$$

Предположим, что $\Pi_{(\Xi_1 \circ \Xi_2)^{\mathrm{T}}}(\theta'', \theta') = 1$, тогда $\Pi_{\Xi_1 \circ \Xi_2}(\theta', \theta'') = 1$, а из (9) следует $S_{\theta'}^{\Theta'2}\left(\Pi_{\Xi_1}\right) \cap S_{\theta''}^{\Theta''1}\left(\Pi_{\Xi_2}\right) \neq \varnothing$, другими словами, найдется элемент $\theta''' \in \mathbf{Im}\, \Xi_1 \cap \mathbf{Dom}\, \Xi_2$, для которого

$$\Pi_{\Xi_1}(\theta', \theta''') = \Pi_{\Xi_2}(\theta''', \theta'')$$

или

$$\Pi_{\Xi_1}{}^{\mathrm{T}}\left(\theta''',\theta'\right)=\Pi_{\Xi_2}{}^{\mathrm{T}}\left(\theta'',\theta'''\right).$$

Последние равенства означают, что

$$S_{\theta''}^{\Theta''_1}\left(\Pi_{\Xi_2}{}^{\mathrm{T}}\right)\cap S_{\theta'}^{\Theta'_2}\left(\Pi_{\Xi_1}{}^{\mathrm{T}}\right)\neq\varnothing.$$

Учитывая теперь, что $\mathbf{Im}\,\Xi_2^{\mathrm{T}}\subset\Theta'_1$ и $\mathbf{Im}\,\Xi_2^{\mathrm{T}}\subset\Theta'_1$, окончательно получим $\Xi_2^{\mathrm{T}}\circ\Xi_1^{\mathrm{T}}=\mathbf{1}$.

Нетрудно заметить, что приведенная последовательность равенств справедлива и в обратном порядке, следовательно, имеем

$$\Pi_{(\Xi_1\circ\Xi_2)^{\mathrm{T}}}=\Pi_{\Xi_2^{\mathrm{T}}}\circ\Pi_{\Xi_1^{\mathrm{T}}},$$

откуда непосредственно вытекает равенство (12), что и требовалось.

Свойство 6. Для произвольного точечно-множественного отображения $\Xi:\Theta_1\to\pi(\Theta_2)$ справедливо включение

$$\Xi\subseteq\Xi\circ\Xi^{\mathrm{T}}\circ\Xi. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть для некоторых элементов $\theta'\in\Theta_1$ и $\hat{\theta}''\in\Theta_2$ имеет место равенство

$$\Pi_{\Xi}\left(\theta',\hat{\theta}''\right)=\mathbf{1}.$$

Тогда $\left(\theta',\hat{\theta}''\right)\in\Theta_{\Xi}$ или $\hat{\theta}''\in\Xi(\theta')$. Используя (5), находим, если $\hat{\theta}''\in$ $\in\Xi(\theta')$, то $\theta'\in\Xi^{\mathrm{T}}\left(\hat{\theta}''\right)$.

С другой стороны, применяя (11) к произведению $\Xi\circ\Xi^{\mathrm{T}}\circ\Xi$, получим:

$$\left[\Xi\circ\Xi^{\mathrm{T}}\circ\Xi\right](\theta')=\bigcup_{\theta''\in\Xi(\theta')}\left[\bigcup_{\theta'''\in\Xi^{\mathrm{T}}(\theta'')}\Xi(\theta''')\right]=$$

$$=\left\{\bigcup_{\theta''\in\Xi(\theta')\setminus\hat{\theta}''}\left[\bigcup_{\theta'''\in\Xi_2{}^{\mathrm{T}}(\theta'')}\Xi(\theta''')\right]\right\}\cup\left\{\bigcup_{\theta'''\in\Xi_2{}^{\mathrm{T}}(\hat{\theta}'')}\Xi(\theta''')\right\}=$$

$$=\left\{\bigcup_{\theta''\in\Xi(\theta')\setminus\hat{\theta}''}\left[\bigcup_{\theta'''\in\Xi_2{}^{\mathrm{T}}(\theta'')}\Xi(\theta''')\right]\right\}\cup\left\{\bigcup_{\theta'''\in\Xi_2{}^{\mathrm{T}}(\hat{\theta}'')\setminus\theta'}\Xi(\theta''')\right\}\cup\Xi(\theta').$$

Таким образом, из включений $\hat{\theta}''\in\Xi(\theta')$ и $\theta'\in\Xi^{\mathrm{T}}\left(\hat{\theta}''\right)$ находим, что

$$\Xi(\theta')\subset\left(\Xi\circ\Xi^{\mathrm{T}}\circ\Xi\right)(\theta').$$

Тогда из леммы 2 окончательно получаем включение (13), что и требовалось доказать.

Подводя итог, следует отметить, что проведенный анализ обеспечивает синтез многозначного теоретико - экспериментального инструментария, обеспечивающего широкий спектр возможностей исследования информационных свойств признаковых пространств или множеств сигналов в аспекте необходимости, достаточности и полноты характеристик эталонных ансамблей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mashtalir V.P., Putyatin E.P. Hierarchical decomposition of reference features for correlation classification // Праці УНДІРТ. – 1997. – №2. – С. 36 - 42.

2. Киношенко Е.И., Машталир В.П., Хромушин В.А. Методы синтеза экспертных систем диагностики заболеваний внутренних органов на основе точечно-множественных отображений // Вестник новых медицинских технологий. – 1996. – Т.III, №4. – С. 101 - 107.

3. Mashtalir V.P. Template sets preprocessing for correlation procedures // Proc. The third all-ukranian intern. conf. «Signal / Image Processing and Pattern Recognition». – Kyjiv: UA on IP and SP. – 1996. – P. 63 - 65.

4. Машталир В.П. Компаративное распознавание объектов на основе ε-кластеризации множеств эталонов // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – №1 (06). – С. 63 - 68.

5. Машталир В.П., Ходарев В.Т. Многозначные отображения в корреляционных системах технического зрения // АСУ и приборы автоматики. – Вып. 96. – Харьков: «Вища школа». – 1990. – С. 107 - 111.

6. Mashtalir V.P., Maystrenko A.A. Preprocessing method for correlation identification // Proc. of 9th IFAC/IFOR Symp. «Identification and system parameter estimation». – vol. 1. – Oxford: Pergamon Press plc. – 1991. – P. 266 - 270.

7. Машталир В.П., Ходарев В.Т. Метод классификации эталонов в корреляционно - экстремальных системах технического зрения // АСУ и приборы автоматики. – Вып. 99. – Харьков: «Вища школа». – 1993. – С. 9 - 16.