

МНОГОЗНАЧНЫЕ МОДЕЛИ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

к.т.н. В.П. Машталир
(представил д.т.н., проф. О.Н. Фоменко)

Приведена формализация точно - множественных отображений, являющихся адекватной моделью обработки и интерпретации сигналов различной физической природы. Исследованы основные свойства многозначных отображений.

В концептуальном плане точно - множественные отображения с большой степенью адекватности отражают целый ряд задач преобразований данных произвольной природы или их признаков представлений. Особый интерес вызывает интерпретация результатов обработки, когда, с одной стороны, многозначность усложняет трактовку, а с другой, может выступать в качестве ее некоторой основы. Формализуем и исследуем основные свойства многозначных отображений.

Пусть Θ – некоторое множество. Совокупность всех непустых подмножеств множества Θ обозначим через $\pi(\Theta)$. Рассмотрим Θ_1, Θ_2 – некоторые подмножества конечномерных пространств. Отображение $\Xi(\theta)$, переводящее каждую точку $\theta' \in \Theta_1$ в некоторое подмножество Ω множества $\Theta_2 = \{\theta''\}$, является многозначным (точно - множественным) отображением Θ_1 в Θ_2 или отображением Θ_1 в $\pi(\Theta_2)$, т.е.:

$$\begin{aligned} \Xi: \Theta_1 &\rightarrow \pi(\Theta_2); \\ \Xi(\Lambda) &= \bigcup_{\theta' \in \Lambda} \Xi(\theta'), \theta' \in \Lambda \in \pi(\Theta_1). \end{aligned} \quad (1)$$

В общем случае под прообразом многозначного отображения Ξ будем понимать множество

$$\text{Dom } \Xi = \{\theta' : \theta' \in \Theta_1, \Xi(\theta') = \Omega, \Omega \in \pi(\Theta_2)\}, \quad (2)$$

а под подобразом – множество

$$\text{Im } \Xi = \bigcup_{\theta' \in \text{Dom } \Xi} \Xi(\theta'). \quad (3)$$

Любому точно - множественному отображению Ξ соответствует некоторое опорное подмножество Θ_{Ξ} прямого произведения $\Theta_1 \times \Theta_2$

$$\Theta_{\Xi} = \{(\theta', \theta'') : \theta' \in \text{Dom } \Xi, \theta'' = \Xi(\theta')\}, \Theta_{\Xi} \in \pi(\Theta_1 \times \Theta_2). \quad (4)$$

Поставим отображению $\Xi: \Theta_1 \rightarrow \pi(\Theta_2)$ в соответствие отображение, которое будем называть транспонированным и обозначать Ξ^T :

$$\begin{aligned} \Xi^T : \Theta_2 &\rightarrow \pi(\Theta_1), \\ \Xi^T(\theta'') &= \{\Omega \in \pi(\Theta_1) : \forall \theta' \in \Omega \Rightarrow \theta' \in \Xi(\theta')\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Кроме того, на множестве $\Theta_1 \times \Theta_2$ введем двухзначный предикат Π_{Ξ} представления точечно - множественного отображения Ξ :

$$\Pi_{\Xi}(\theta', \theta'') = \begin{cases} 1, & (\theta', \theta'') \in \Theta_{\Xi}; \\ 0, & (\theta', \theta'') \notin \Theta_{\Xi}. \end{cases} \quad (6)$$

Лемма 1. Для того, чтобы два многозначных отображения были равными, необходимо и достаточно совпадение их опорных множеств.

Доказательство. Необходимо доказать: $\Xi_1 = \Xi_2 \Leftrightarrow \Theta_{\Xi_1} = \Theta_{\Xi_2}$.

Докажем необходимость. Пусть $\Xi_1 = \Xi_2$ и $(\theta', \theta'') \in \Theta_{\Xi_1}$, тогда из (4) следует $\theta' \in \text{Dom } \Xi_1 = \text{Dom } \Xi_2$ и $\theta'' \in \Xi_1(\theta') = \Xi_2(\theta')$, но это означает, что $(\theta', \theta'') \in \Theta_{\Xi_2}$. Иначе говоря, $\Theta_{\Xi_1} \subset \Theta_{\Xi_2}$. В силу индексной симметрии аналогично доказывается обратное вложение $\Theta_{\Xi_1} \supset \Theta_{\Xi_2}$. Значит, $\Theta_{\Xi_1} = \Theta_{\Xi_2}$.

Для доказательства достаточности предположим, что $\Theta_{\Xi_1} = \Theta_{\Xi_2}$ и $\theta' \in \text{Dom } \Xi_1$, $\theta'' \in \Xi_1(\theta')$. Тогда $(\theta', \theta'') \in \Theta_{\Xi_1} = \Theta_{\Xi_2}$ и $\theta' \in \text{Dom } \Xi_2$, $\theta'' \in \Xi_2(\theta')$. Следовательно, $\text{Dom } \Xi_1 \subset \text{Dom } \Xi_2$ и $\Xi_1(\theta') \subset \Xi_2(\theta')$. С учетом отмеченной выше индексной симметрии доказывается справедливость обратных включений, т.е. $\text{Dom } \Xi_1 = \text{Dom } \Xi_2$ и $\Xi_1(\theta') = \Xi_2(\theta')$, откуда вытекает требуемое равенство $\Xi_1 = \Xi_2$. *Лемма доказана.*

Следствие. $\Xi_1 = \Xi_2 \Leftrightarrow \Pi_{\Xi_1} = \Pi_{\Xi_2}$.

Предположим теперь, что $\Xi_1, \Xi_2 : \Theta_1 \rightarrow \pi(\Theta_2)$.

Будем говорить, что отображение Ξ_1 вложено в Ξ_2 , и обозначать $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$ тогда и только тогда, когда $\Theta_{\Xi_1} \subset \Theta_{\Xi_2}$.

Лемма 2. Вложение $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$ имеет место, если и только если выполняется условие $\forall \theta' \in \text{Dom } \Xi_1 \Rightarrow \theta' \in \text{Dom } \Xi_2$ и $\Xi_1(\theta') \subset \Xi_2(\theta')$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$ и θ' – произвольный элемент из $\text{Dom } \Xi_1$. Тогда $\Xi_1(\theta') = \Omega \in \pi(\Theta_2)$. Выберем произвольный элемент θ'' из $\Xi_1(\theta')$; ясно, что $(\theta', \theta'') \in \Theta_{\Xi_1} \subset \Theta_{\Xi_2}$. Но тогда из (4) имеем $\theta' \in \text{Dom } \Xi_2$ и $\theta'' \in \Xi_2(\theta')$, иначе – $\Xi_1(\theta') \subset \Xi_2(\theta')$.

Отметим факт, вытекающий из определения предиката и вложения: $\Pi_{\Xi_1} \leq \Pi_{\Xi_2} \Leftrightarrow \Xi_1 \subseteq \Xi_2$, и докажем обратное. Пусть имеет место утверждение леммы и $\Pi_{\Xi_1}(\theta', \theta'') = 1$. Тогда $(\theta', \theta'') \in \Theta_{\Xi_1}$, т.е. $\theta' \in \text{Dom } \Xi_1$. С дру-

гой стороны, из предположения справедливости утверждения естественным образом имеем $\theta' \in \text{Dom } \Xi_2$ и $\theta'' \in \Xi_1(\theta') \subset \Xi_2(\theta')$, значит $\Pi_{\Xi_2}(\theta', \theta'') = 1$.

Отсюда находим $\Pi_{\Xi_1} \leq \Pi_{\Xi_2}$ и, следовательно, $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$. *Лемма доказана.*

Лемма 3. Для произвольных точно - множественных отображений $\Xi : \Theta_1 \rightarrow \pi(\Theta_2)$ и $\Xi_i : \Theta_1 \rightarrow \pi(\Theta_2)$, $i = 1, 2$ имеют место свойства:

а) $\text{Dom } \Xi = \text{Im } \Xi^T$ и $\text{Dom } \Xi^T = \text{Im } \Xi$;

б) если $\Xi_1 \subseteq \Xi$ и $\Xi \subseteq \Xi_2$, то $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$;

в) если $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$ и $\Xi_2 \subseteq \Xi_1$, то $\Xi_1 = \Xi_2$;

г) $(\Xi^T)^T = \Xi$;

д) отношения $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$, $\Xi_1^T \subseteq \Xi_2^T$, $\Theta_{\Xi_1}^T \subseteq \Theta_{\Xi_2}^T$ и $\Pi_{\Xi_1}^T \leq \Pi_{\Xi_2}^T$ эквивалентны.

Доказательство. Справедливость свойства а) следует непосредственно из определений (2), (3). Свойство в) выполняется в силу того, что, если $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$ и $\Xi_2 \subseteq \Xi_1$, то $\Theta_{\Xi_1} \subset \Theta_{\Xi_2}$ и $\Theta_{\Xi_2} \subset \Theta_{\Xi_1}$, т.е. $\Theta_{\Xi_1} = \Theta_{\Xi_2}$. Из леммы 1 окончательно получаем справедливость равенства $\Xi_1 = \Xi_2$.

По аналогии со случаем в) вследствие транзитивности вложений множеств Θ_{Ξ} и Θ_{Ξ_i} , $i = 1, 2$ имеет место свойство б).

Для доказательства свойства г) учтем, что из свойства а) имеем $\text{Dom } \Xi = \text{Im } \Xi^T = \text{Dom } (\Xi^T)^T$ и $\text{Im } \Xi = \text{Dom } \Xi^T = \text{Im } (\Xi^T)^T$, т.е. области определения и области значений многозначных отображений Ξ и $(\Xi^T)^T$ совпадают. Предположим теперь, что $(\theta', \theta'') \in \Theta_{\Xi}$, тогда из (5) получим $\theta'' \in \text{Dom } \Xi^T$ и $\theta' \in \Xi^T(\theta'')$, т.е. $(\theta', \theta'') \in \Theta_{\Xi^T}$. Дальнейшее применение операции транспозиции приведет к тому, что $(\theta', \theta'') \in \Theta_{(\Xi^T)^T}$, иначе говоря, $\Theta_{\Xi} \subset \Theta_{(\Xi^T)^T}$. Аналогично доказывается, что $\Theta_{(\Xi^T)^T} \subset \Theta_{\Xi}$, т.е. $\Theta_{\Xi} = \Theta_{(\Xi^T)^T}$ и, тем самым, $(\Xi^T)^T = \Xi$.

Остановимся на свойстве г). Пусть $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$. Для любого точно - множественного отображения $\Xi : \Theta_1 \rightarrow \pi(\Theta_2)$ из определения предиката отображения следует справедливость равенства $\Pi_{\Xi}(\theta', \theta'') = \Pi_{\Xi^T}(\theta'', \theta')$.

Тогда из леммы 2 получаем цепочку: если $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$, то $\Pi_{\Xi_1} \leq \Pi_{\Xi_2}$ и $\Pi_{\Xi_1}^T \leq \Pi_{\Xi_2}^T$, т.е. $\Xi_1^T \subseteq \Xi_2^T$. Но отсюда следует эквивалентность всех включений свойства г). *Лемма доказана.*

Доказанные леммы позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. На множестве многозначных отображений включение $\Xi_1 \subseteq \Xi_2$ индуцирует отношение частичного порядка.

Доказательство. Для введенных отношений необходимо проверить выполнение свойств рефлексивности, транзитивности и антисимметричности. Рефлексивность непосредственно вытекает из леммы 1. Транзитивность и антисимметричность доказаны в лемме 3 – соответственно свойства б) и в).

Отношение частичного порядка при прелиминарной кластеризации [1-3] эталонных множеств для задач распознавания [4] позволяет существенно редуцировать область определения требуемых многозначных отображений за счет анализа нижнего конуса максимальных по включению отображений, продуцируемых методом, изложенным в [5-7], что в итоге существенно снижает комбинаторную емкость задачи.

Введем и изучим понятие произведения (суперпозиции) точно - множественных отображений. Пусть $\Xi_1 : \Theta'_1 \rightarrow \pi(\Theta'_2)$ и $\Xi_2 : \Theta''_1 \rightarrow \pi(\Theta''_2)$ – два многозначных отображения, вообще говоря, с различными прообразами и образами. Определим точно-множественное отображение $\Xi_1 \circ \Xi_2$ как

$$(\Xi_1 \circ \Xi_2)(\theta') = \bigcup_{\theta'' \in \Xi_1(\theta')} \Xi_2(\theta''), \quad (7)$$

где $\theta' \in \text{Dom } \Xi_1$, $\theta'' \in \text{Dom } \Xi_2 \cap \text{Im } \Xi_1$.

Если множества Θ'_2 и Θ''_1 имеют различную физическую природу или же не пересекаются, наконец, если $\text{Dom } \Xi_2 \cap \text{Im } \Xi_1 = \emptyset$, то очевидно, что соотношение (7) теряет всякий смысл. Будем устранять данную неопределенность суперпозиции отображений приравниванием результату пустого множества, которое включим во все системы подмножеств. Как нетрудно заметить, нетривиальное (не переводящее все значения в пустое множество) многозначное отображение существует тогда и только тогда, когда (рис. 1)

$$\text{Dom } \Xi_1 \neq \emptyset, \text{Im } \Xi_1 \cap \text{Dom } \Xi_2 \neq \emptyset.$$

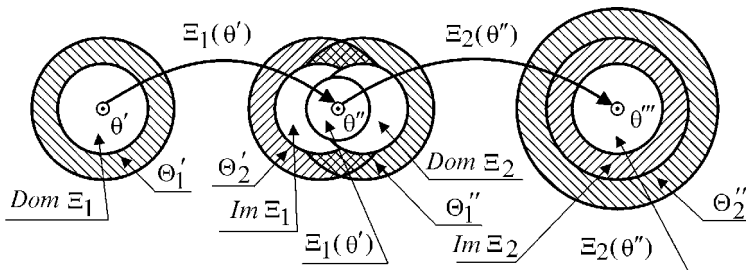


Рис. 1. Геометрическая интерпретация существования суперпозиции нетривиальных точно-множественных отображений

Остановимся теперь на свойствах введенной операции суперпозиции многозначных отображений.

Свойство 1. Опорное множество $\Theta_{\Xi_1 \circ \Xi_2} \in \pi(\Theta'_1 \times \Theta''_2)$ произведения
точечно - множественных отображений Ξ_1 и Ξ_2 либо пустое множество,
либо имеет вид

$$\Theta_{\Xi_1 \circ \Xi_2} = \{(\theta', \theta'') : \exists \theta''' \Rightarrow (\theta', \theta''') \in \Theta_{\Xi_1}, (\theta''', \theta'') \in \Theta_{\Xi_2}\}, \quad (8)$$

где $\theta' \in \text{Dom } \Xi_1$, $\theta'' \in \text{Dom } \Xi_2 \cap \text{Im } \Xi_1$, $\theta''' \in \text{Im } \Xi_2$.

Справедливость этого свойства очевидным образом следует из равенства
(4) и определения суперпозиции.

В случае бесконечности задания множеств прообразов введем понятие
произведения предикатов. Допустим, два произвольных предиката Π_1 и Π_2
определены на прямых произведениях $\Theta_1 \times \Theta_2$ и $\tilde{\Theta}_1 \times \tilde{\Theta}_2$ некоторых мно-
жеств Θ_1 , Θ_2 , $\tilde{\Theta}_1$ и $\tilde{\Theta}_2$ соответственно. Рассмотрим предикат Π_1 и зафик-
сируем $\theta' \in \Theta_1$. Назовем сечением предиката Π_1 вдоль элемента $\theta' \in \Theta_1$
подмножество $S_{\theta'}^{\Theta_2}(\Pi_1)$ множества Θ_2 , т.е.

$$S_{\theta'}^{\Theta_2}(\Pi_1) = \{\theta'' \in \Theta_2 : \Pi_1(\theta', \theta'') = 1\}.$$

В этом случае под суперпозицией предикатов Π_1 и Π_2 многозначных
отображений будем понимать предикат $\Pi_{\Xi} = \Pi_1 \circ \Pi_2$, заданный на множе-
стве $\Theta_1 \times \tilde{\Theta}_2$ и определяемый соотношениями:

$$\Pi_{\Xi}(\theta', \theta'') = \begin{cases} 1, & \text{если } S_{\theta'}^{\Theta_2} \cap S_{\theta''}^{\tilde{\Theta}_1} \neq \emptyset, \theta' \in \Theta_1, \theta'' \in \tilde{\Theta}_2; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (9)$$

Заметим, что из (9) следует: если для некоторой пары точек справедливо
 $\Pi_{\Xi}(\theta', \theta'') = 1$, то $\Theta_2 \cap \tilde{\Theta}_1 \neq \emptyset$, т.к. $S_{\theta'}^{\Theta_2}(\Pi_1) \subset \Theta_2$ и $S_{\theta''}^{\tilde{\Theta}_1}(\Pi_2) \subset \tilde{\Theta}_1$.

Нетрудно установить, что предикат произведения отображений равен
произведению предикатов, т.е.

$$\Pi_{\Xi_1 \circ \Xi_2} = \Pi_{\Xi_1} \circ \Pi_{\Xi_2}. \quad (10)$$

Действительно, $\Pi_{\Xi_1 \circ \Xi_2}(\theta', \theta'') = 1$, где $\theta' \in \Theta_1$, $\theta'' \in \tilde{\Theta}_1$ тогда и только
тогда, когда $(\theta', \theta'') \in \Theta_{\Xi_1 \circ \Xi_2}$. Но отсюда из (8) имеем, что для некоторого
элемента θ''' справедливо следующее включение $(\theta', \theta''') \in \Theta_{\Xi_1}$ или
 $\Pi_{\Xi_1}(\theta', \theta''') = 1$, иначе говоря, $\theta''' \in S_{\theta'}^{\Theta_2}(\Pi_{\Xi_1})$. Аналогично из (8) получаем
 $(\theta''', \theta'') \in \Theta_{\Xi_2}$, что равносильно $\Pi_{\Xi_2}(\theta''', \theta'') = 1$, т.е. $\theta''' \in S_{\theta''}^{\tilde{\Theta}_1}(\Pi_{\Xi_2})$. Таким
образом, $\theta''' \in S_{\theta'}^{\Theta_2}(\Pi_{\Xi_1}) \cap S_{\theta''}^{\tilde{\Theta}_1}(\Pi_{\Xi_2}) \neq \emptyset$. Тем самым, приходим к “истин-

ности” суперпозиции предикатов $(\Pi_{\Xi_1} \circ \Pi_{\Xi_2})(\theta', \theta'') = 1$, что и соответствует выполнению равенства (10). Значит, имеет место следующее свойство.

Свойство 2. Для суперпозиции произвольных многозначных отображений Ξ_1, Ξ_2 справедливо $\Pi_{\Xi_1 \circ \Xi_2} = \Pi_{\Xi_1} \circ \Pi_{\Xi_2}$.

Нетрудно убедиться, что из данного свойства следует, что произведение многозначных отображений не коммутативно.

Свойство 3. Операция суперпозиции точно - множественных отображения некоммутирует.

В то же время легко проверить, что введенная операция ассоциативна. Действительно, из (7) вытекает, что, с одной стороны,

$$[(\Xi_1 \circ \Xi_2) \circ \Xi_3](\theta') = \bigcup_{\substack{\theta'' \in \bigcup_{\theta' \in \Xi_1(\theta')} \Xi_2(\theta'')}} \Xi_3(\theta''),$$

а с другой,

$$[\Xi_1 \circ (\Xi_2 \circ \Xi_3)](\theta') = \bigcup_{\theta'' \in \Xi_1(\theta')} \left[\bigcup_{\theta''' \in \Xi_2(\theta'')} \Xi_3(\theta''') \right]. \quad (11)$$

Правые части двух последних равенств совпадают, поскольку для некоторого элемента ϑ , им принадлежащего, имеем одну и ту же кванторную интерпретацию: $\exists \hat{\theta}'''$, для которого $\vartheta \in \Xi_3(\hat{\theta}''')$ и $\exists \hat{\theta}''$, для которого $\hat{\theta}''' \in \Xi_2(\hat{\theta}'')$ и $\hat{\theta}'' \in \Xi_1(\theta')$. Тем самым, доказано следующее свойство.

Свойство 4. Для произвольных точно-множественных отображений справедливо равенство $(\Xi_1 \circ \Xi_2) \circ \Xi_3 = \Xi_1 \circ (\Xi_2 \circ \Xi_3)$.

Свойство 5. Пусть $\Xi_1 : \Theta'_1 \rightarrow \pi(\Theta'_2)$ и $\Xi_2 : \Theta''_1 \rightarrow \pi(\Theta''_2)$ – произвольные многозначные отображения, тогда

$$(\Xi_1 \circ \Xi_2)^T = \Xi_1^T \circ \Xi_2^T. \quad (12)$$

Доказательство. При доказательстве свойства 2) леммы 3 было установлено, что $\Pi_{\Xi}(\theta', \theta'') = \Pi_{\Xi^T}(\theta'', \theta')$, т.е. $\forall \theta' \in \Theta'_1$ и $\forall \theta'' \in \Theta''_2$ имеем

$$\Pi_{(\Xi_1 \circ \Xi_2)^T}(\theta'', \theta') = \Pi_{\Xi_1 \circ \Xi_2}(\theta', \theta'').$$

Предположим, что $\Pi_{(\Xi_1 \circ \Xi_2)^T}(\theta'', \theta') = 1$, тогда $\Pi_{\Xi_1 \circ \Xi_2}(\theta', \theta'') = 1$, а из (9) следует $S_{\theta'}^{\Theta'_2}(\Pi_{\Xi_1}) \cap S_{\theta''}^{\Theta''_1}(\Pi_{\Xi_2}) \neq \emptyset$, другими словами, найдется элемент $\theta''' \in \text{Im } \Xi_1 \cap \text{Dom } \Xi_2$, для которого

$$\Pi_{\Xi_1}(\theta', \theta''') = \Pi_{\Xi_2}(\theta''', \theta'')$$

или

$$\Pi_{\Xi_1}^T(\theta'', \theta') = \Pi_{\Xi_2}^T(\theta'', \theta').$$

Последние равенства означают, что

$$S_{\theta''}^{\Theta_1}(\Pi_{\Xi_2}^T) \cap S_{\theta'}^{\Theta_1}(\Pi_{\Xi_1}^T) \neq \emptyset.$$

Учитывая теперь, что $\text{Im } \Xi_2^T \subset \Theta_1'$ и $\text{Im } \Xi_1^T \subset \Theta_1'$, окончательно получим $\Xi_2^T \circ \Xi_1^T = 1$.

Нетрудно заметить, что приведенная последовательность равенств справедлива и в обратном порядке, следовательно, имеем

$$\Pi_{(\Xi_1 \circ \Xi_2)}^T = \Pi_{\Xi_2}^T \circ \Pi_{\Xi_1}^T,$$

откуда непосредственно вытекает равенство (12), что и требовалось.

Свойство 6. Для произвольного точно-множественного отображения $\Xi: \Theta_1 \rightarrow \pi(\Theta_2)$ справедливо включение

$$\Xi \subset \Xi \circ \Xi^T \circ \Xi. \quad (13)$$

Доказательство. Пусть для некоторых элементов $\theta' \in \Theta_1$ и $\hat{\theta}'' \in \Theta_2$ имеет место равенство

$$\Pi_{\Xi}(\theta', \hat{\theta}'') = 1.$$

Тогда $(\theta', \hat{\theta}'') \in \Theta_{\Xi}$ или $\hat{\theta}'' \in \Xi(\theta')$. Используя (5), находим, если $\hat{\theta}'' \in \Xi(\theta')$, то $\theta' \in \Xi^T(\hat{\theta}'')$.

С другой стороны, применяя (11) к произведению $\Xi \circ \Xi^T \circ \Xi$, получим:

$$\begin{aligned} [\Xi \circ \Xi^T \circ \Xi](\theta') &= \bigcup_{\theta'' \in \Xi(\theta')} \left[\bigcup_{\theta''' \in \Xi^T(\theta'')} \Xi(\theta''') \right] = \\ &= \left\{ \bigcup_{\theta'' \in \Xi(\theta') \setminus \hat{\theta}''} \left[\bigcup_{\theta''' \in \Xi_2^T(\theta'')} \Xi(\theta''') \right] \right\} \cup \left\{ \bigcup_{\theta'' \in \Xi_2^T(\hat{\theta}'')} \Xi(\theta'') \right\} = \\ &= \left\{ \bigcup_{\theta'' \in \Xi(\theta') \setminus \hat{\theta}''} \left[\bigcup_{\theta''' \in \Xi_2^T(\theta'')} \Xi(\theta''') \right] \right\} \cup \left\{ \bigcup_{\theta'' \in \Xi_2^T(\hat{\theta}'') \setminus \theta'} \Xi(\theta'') \right\} \cup \Xi(\theta'). \end{aligned}$$

Таким образом, из включений $\hat{\theta}'' \in \Xi(\theta')$ и $\theta' \in \Xi^T(\hat{\theta}'')$ находим, что

$$\Xi(\theta') \subset (\Xi \circ \Xi^T \circ \Xi)(\theta').$$

Тогда из леммы 2 окончательно получаем включение (13), что и требовалось доказать.

Подводя итог, следует отметить, что проведенный анализ обеспечивает синтез многозначного теоретико - экспериментального инструментария, обеспечивающего широкий спектр возможностей исследования информационных свойств признаков пространств или множеств сигналов в аспекте необходимости, достаточности и полноты характеристик эталонных ансамблей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mashtalir V.P., Putyatin E.P. Hierarchical decomposition of reference features for correlation classification // Праці УНДІРТ. – 1997. – №2. – С. 36 - 42.

2. Киношенко Е.И., Машталир В.П., Хромушин В.А. Методы синтеза экспертных систем диагностики заболеваний внутренних органов на основе точно-множественных отображений // Вестник новых медицинских технологий. – 1996. – Т. III, №4. – С. 101 - 107.

3. Mashtalir V.P. Template sets preprocessing for correlation procedures // Proc. The third all-ukrainian intern. conf. «Signal / Image Processing and Pattern Recognition». – Kyjiv: UA on IP and SP. – 1996. – P. 63 - 65.

4. Машталир В.П. Компаративное распознавание объектов на основе \mathcal{E} -кластеризации множеств эталонов // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – №1 (06). – С. 63 - 68.

5. Машталир В.П., Ходарев В.Т. Многозначные отображения в корреляционных системах технического зрения // АСУ и приборы автоматки. – Вып. 96. – Харьков: «Вища школа». – 1990. – С. 107 - 111.

6. Mashtalir V.P., Maystrenko A.A. Preprocessing method for correlation identification // Proc. of 9th IFAC/IFOR Symp. «Identification and system parameter estimation». – vol. 1. – Oxford: Pergamon Press plc. – 1991. – P. 266 - 270.

7. Машталир В.П., Ходарев В.Т. Метод классификации эталонов в корреляционно - экстремальных системах технического зрения // АСУ и приборы автоматки. – Вып. 99. – Харьков: «Вища школа». – 1993. – С. 9 - 16.
