УДК 621.391.17

МЕТОДИКА СВЕДЕНИЯ АПОСТЕРИОРНОЙ МЕРЫ ДЛЯ ГРУППОВОГО ДИСКРЕТНОГО ПАРАМЕТРА К ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

к.т.н. В.Ф. Ерохин, З.Н. Кванталиани*
(представил д.т.н., проф. В.В. Поповский)

Рассматривается подход к синтезу алгоритмов квазикогерентного раздвоения взаимно - мешающих (неортогональных по Гильберту на длительности информационной посылки) сигналов, основывающийся на сведении апостериорной меры группового дискретного параметра (формально образуемого аддитивной совокупностью дискретных информационных параметров разделяемых сигналов) к марковской.

Пусть имеется система, в любой момент времени $\mathbf{t \geq 0}$ находящаяся в некотором состоянии $\boldsymbol{\theta(t)}$ из непустого множества $\mathbf{X}$ и обладающая кусочно - постоянной траекторией (рис.1).

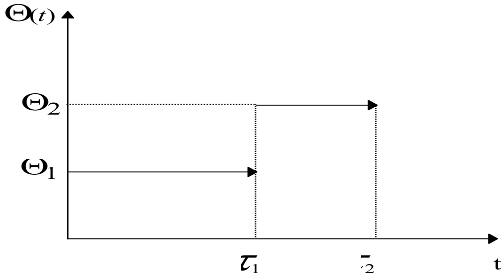

Рис.1. Кусочно - постоянная траектория
Рис. 1.

Для задания этой траектории определяются две последовательности $\{\tau_n, n \geq 1\}$ и $\{\theta_n, n \geq 1\}$, где θ_n - состояние перед $\mathbf{n}$ - м изменением ("скачком") , τ_1 - время пребывания в начальном состоянии, τ_n - время между **(n-1)** - м и **n** - м скачком при $\mathbf{n \geq 2}$.

Случайный процесс $\{\theta(t), t \geq 0\}$ с кусочно - постоянными траекториями называется полумарковским процессом, если при известных значениях **t** **n** - го "скачка" и состоянии процесса непосредственно после этого скачка, а также любых дополнительных условиях, связанных с поведением процесса до момента времени t, условная вероятность события $\{\tau_n < x, \theta_{n+1} = j\}$ равна $P_{ij}(x)$, где $P_{ij}(x)$ неотрицательные непрерывные слева функции, в сумме по j не превосходящие I. Если $\sum\limits_j P_{ij}(\infty) = 1$, то после попадания в состояние i произойдет переход в какое-либо состояние с вероятностью I, если же $\sum\limits_j P_{ij}(\infty) = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon \geq 0$, то с вероятностью ε пребывание в состоянии i продолжается до бесконечности. Не исключается и случай возвращения в то же состояние, т.е. $P_{ij}(\infty) > 0.$

Таким образом, "переход" не всегда соответствует своему буквальному смыслу. Вероятность перехода полумарковского процесса из состояния i в состояние j равна $P\{\theta_{n+1} = j / \theta_n = i\} = P_{ij}(\infty) = \pi_{ij}$. Если $\pi_{ij} > 0$, условную функцию распределения времени пребывания в состоянии i при условии, что следующим состоянием будет j, можно записать в виде

$$\frac{P_{ij}(x)}{P_{ij}(\infty)} = \frac{P_{ij}(x)}{\pi_{ij}} = F_{ij}(x).$$

Если же $\pi_{ij} = 0$, то $F_{ij}(x)$ может быть задана произвольно. В дальнейшем мы будем всегда считать, что матрица $(\pi_{ij})_{i,j=1}^{n}$ и совокупность функций распределения $F_{ij}(x)$ $\quad i, j = \overline{1, n}$ нам заданы.

Как известно, полумарковский процесс легко может быть приведен к марковскому путем изменения фазового пространства **X**. Пусть, например, исходное фазовое пространство **X** конечно, т.е. $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. В таком случае рассмотрим $X1 = X \times [0, \infty)$, т.е. в качестве нового фазового пространства рассматриваются n полупрямых. Введение такого фазового пространства удобно тем, что процесс "знает" время сидения в последнем состоянии. Так, например, нахождение процесса в состоянии (или точке) **K** в момент времени t обозначает, что $\theta(t) = a_2$, причем в состоянии a_2 процесс "сидит" уже время t_0 после последнего "скачка". Отметим сразу же, что фактическое время нахождения в состоянии a_2 может быть и большим. Это связано с допущением о строгой положительности π_{22}. В таком случае последний "скачок" мог быть и из состояния a_2 в себя же.

Построенный из полумарковского процесса $\{\theta(t), t \geq 0\}$, с фазовым пространством состояний **X** процесс $\{\theta(t), \tau(t), t \geq 0\}$, где $\tau(t)$ - время, прошедшее после последнего "скачка", оказывается марковским.

Рассмотрим два независимых полумарковских процесса $\{\theta(t), t \geq 0\}$ и $V(t), t \geq 0$, каждый из которых имеет конечное число состояний. Такие процессы часто приходится рассматривать на практике в тех, например, случаях, когда кроме полезного сигнала $\theta(t)$ имеется также подобный мешающий сигнал $\nu(t)$.

В большинстве практически важных случаев фазовое пространство как процесса $\theta(t)$, так и процесса $\nu(t)$ состоит всего из двух состояний (обозначим их 0 и 1). Если рассмотреть расширение фазового пространства каждого из процессов $\theta(t)$ и $\nu(t)$ и получить соответствующие марковские процессы, то можно после этого рассмотреть двухкомпонентный марковский процесс, для которого фазовое пространство состоит из четырех углов (рис.2).

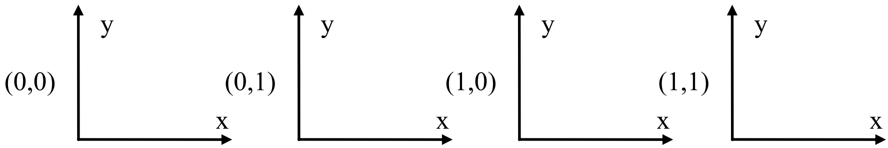

Рис.2. Фазовое пространство двухкомпонентного марковского процесса

Здесь x - время, прошедшее после последнего скачка процесса $\theta(t)$, y - время, прошедшее после последнего скачка процесса $\nu(t)$.

Приведем пример движения по фазовому пространству. Пусть в начальный момент времени $\theta(0) = 0$, $\nu(0) = 1$. Затем через время τ_1 изменилась первая компонента, через время τ_2 опять изменилась первая компонента, а через время после этого τ_3 изменилась вторая компонента. Процесс движения во фазовому пространству приведен на рис. 3.

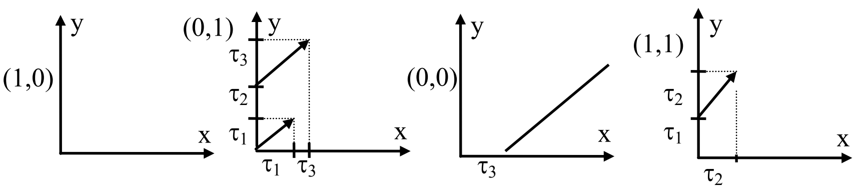

Рис.3. Пример движения по фазовому пространству

С такими двумя полумарковскими процессами естественным образом связывается вероятностная мера μ_t, состоящая из четырех компонент

$$\mu_t = \mu_t^{(0,0)} + \mu_t^{(0,1)} + \mu_t^{(1,0)} + \mu_t^{(1,1)},$$

при этом каждая из компонент имеет в качестве носителя подмножество соответствующего угла. В общем случае, когда процесс $\theta(t)$, имеет n_1 состояний, а процесс $\nu(t)$ имеет n_2 состояний, мера μ_t состоит из $n_1 \cdot n_2$ состояний и $\mu_t^{(i,j)}([a,b)\times[c,d)) = P\{\theta(t)=i, a \le \tau_\theta < b, \nu(t)=j, c \le \tau_\theta < d\}$.

Рассмотрим в качестве примера практически важный случай, когда оба полумарковских процесса имеют два состояния (0 и 1) и функции распределения $F_{ij}(x)$ и $G_{ij}(x)$ времени пребывания процессов $\theta(t)$ и $\nu(t)$, соответственно, в оостоянии i, если после этого произойдет перескок в состояние j, абсолютно непрерывны, т.е

$$F_{ij}(x) = \int_0^x f_{ij}(u)du; \qquad G_{ij}(x) = \int_0^x g_{ij}(u)du.$$

В таком случае каждая из компонент $\mu_t^{(k,l)}$ меры μ_t будет иметь нижеописанную структуру:

- одна “тяжелая” точка с координатами (t,t), соответствующая тому, что не произошло ни одного скачка (т.е. оставались неизменными и $\theta(t)$ и $\nu(t)$ на отрезке $[0,t]$);
- два “тяжелых” отрезка BC и CD (координаты точек B,C,D следующие: $B(0,t)$, $C(t,t)$, $D(t,0)$) линейные меры которых абсолютно непрерывны относительно линейной меры Лебега;
- плоская мера, сосредоточенная на квадрате ABCD (A - начало координат), причем эта мера абсолютно непрерывна относительно плоской меры Лебега [3].

Чтобы обосновать такую структуру у компонент $\mu_t^{(k,l)}$ меры μ_t, рассмотрим только один из двух полумарковских процессов, например, $\theta(t)$ и расширим фазовое пространство до $X = X\times[0;\infty)$, получив при этом соответствующий марковский процесс. Покажем, какую структуру имеет мера $m_t^{(i)}$, соответствующая этому процессу. Мера m_t задается на фазовом пространстве X и состоит из компонент $m_t^{(i)}$, сосредоточенных на соответствующей полуоси, которые, в свою очередь, определяются как

$$m_t^{(i)}([a,b)) = P\{\theta(t)=i, a \le \tau_\theta < b\},$$

где $\tau_\theta^{(t)}$ - время, прошедшее после последнего скачка до момента t.

Рассмотрим структуру мер $m_t^{(i)}$. Покажем, что меры состоят из двух слагаемых: "тяжелой" точки с координатой t и абсолютно непрерывной (относительно меры Лебега) части, сосредоточенной на отрезке $[0,t]$.

Пусть $a_t^{(i)} = P\{\theta(u) = i, 0 \le u \le t\}$. Тогда, $m_t^{(i)}(\{t\}) = a_t^{(i)}$, где $\{t\}$ - одноточечное множество, состоящее из одной точки полуоси **O** с координатой t. Эти "тяжелые" точки соответствуют тому случаю, когда $\theta(u)$ не имеет ни одного скачка на отрезке $[0,t]$.

Рассмотрим теперь тот случай, когда процесс $\theta(u)$ имеет на отрезке $[0,t]$ хотя бы один скачок. Пусть, например, процесс $\theta(u)$ стартовал из состояния i_1, потом попал в состояние i_2, далее в i_3, и, наконец, попал в $i_n = i$. В момент времени t процесс находится в состоянии i и следующим его состоянием будет состояние i_{n+1}. Обозначим через q_k вероятность старта из состояния **К** в момент $t = 0$.

Рассмотрим независимые случайные величины ξ_{ij} с функциями распределения $F_{ij}(x)$. Если $\eta_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \xi_{i_1 i_2} + \xi_{i_2 i_3} + \ldots + \xi_{i_{n-1} i_n}$, то

$$m_t^{(i)}([a,b)) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_{n+1}} q_{i_1} \cdot \pi_{i_1 i_2} \cdot \pi_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot \pi_{i_{n-1} i} \cdot \pi_{i i_{n+1}};$$

$$P\left\{\eta_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n} \le t, \xi_{i_n i_{n+1}} \in [a;b); \eta_{i_1 i_2 \ldots i_n} + \xi_{i_n i_{n+1}} > t\right\}.$$

Поскольку

$$P\left\{\eta_{i_1 \ldots i_n} \le t, \xi_{i_n i_{n+1}} \in [a;b); \eta_{i_1 \ldots i_n} + \xi_{i_n i_{n+1}} > t\right\} \le P\left\{\xi_{i_n i_{n+1}} \in [a,b)\right\};$$

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_{n+1}} q_{i_1} \cdot \pi_{i_1 i_2} \cdot \pi_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot \pi_{i_{n-1} i} \cdot \pi_{i i_{n+1}} \cdot \le 1,$$

то

$$m_t^{(i)}([a,b)) \le \sum_{i_{n+1}} P\left\{\xi_{i, i_{n+1}} \in [a;b)\right) = \sum_{i_{n+1}} \left(F_{i, i_{n+1}}(b) - F_{i, i_{n+1}}(a)\right).$$

Итак, мера $m_t^{(i)}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега [3].

Однако из приведенных соотношений можно получить и более сильное следствие, которое понадобится нам в дальнейшем. А именно, предположим, что все функции $F_{ij}(x)$ не просто абсолютно непрерывны, а имеют непрерывные плотности $f_{ij}(x)$. Тогда компоненты $m_t^{(i)}$ тоже имеют непрерывные плотности относительно меры Лебега. Докажем это.

Обозначим через $\Phi_{i_1 i_2 .. i_{n-1} i_n}$ функцию распределения случайной величины $\eta_{i_1 i_2 .. i_{n-1} i_n} = \xi_{i_1 i_2} + \xi_{i_2 i_3} + \ \ldots + \xi_{i_{n-1} i_n}$. Будем рассмат-ривать лишь такие множества $[a,b)$, где $a \ge 0, b \le t$ (рис.4).

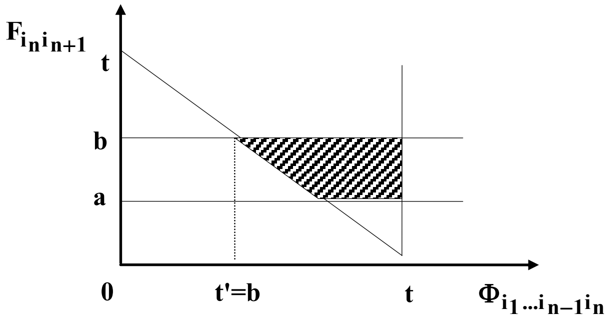

Рис.4. Продакт - мера

Вероятность

$$P\left\{\eta_{i_1 .. i_n} \le t, {}_1\xi_{i_n i_{n+1}} \in [a;b); \eta_{i_1 ... i_n} + \xi_{i_n i_{n+1}} > t\right\} \le P\left\{\xi_{i_n i_{n+1}} \in [a,b)\right\}$$

равна мере заштрихованной на рис.4 фигуры, где на плоскости рассматривается мера, являющаяся продакт - мерой двух мер, соответствующих функциям распределения $F_{i_n i_{n+1}}$ и $\Phi_{i_1 .. i_n}$, где

$$P\left\{\eta_{i_1 i_2 .. i_{n-1} i_n} \le t;\ \xi_{i_n i_{n+1}} \in [a;b); \eta_{i_1 i_2 ... i_n} + \xi_{i_n i_{n+1}} > t\right\} =$$
$$= \int_a^b f_{i_n i_{n+1}}(u)\left[\Phi_{i_1 .. i_n}(t) - \Phi_{i_1 .. i_n}(t-u)\right] du.$$

Из непрерывности функций $F_{ij}(x)$ следует непрерывность функций $\Phi_{i_1 .. i_{n-1} i}(x)$. Отсюда получаем непрерывность функций $\alpha_t^{(i)}(x)$.

Если же есть два независимых полумарковских процесса $\theta(t)$ и $\nu(t)$, то каждый из них можем преобразовать в марковский процесс путем расширения фазового пространства и затем рассмотреть двухкомпонентный марковский процесс на фазовом пространстве, являющемся произведением расширенных фазовых пространств для процессов $\theta(t)$ и $\nu(t)$.

Зададим расширенное фазовое пространство для процесса $\theta(t)$ горизонтальных полупрямых (их число n_1 равно числу состояний процесса $\theta(t)$), а расширенное фазовое пространство процесса $\nu(t)$ - с помощью семейства вертикальных полупрямых (их число n_2 равно числу состояний процесса $\nu(t)$). В таком случав фазовое пространство двухкомпонентного марковского процесса представляет собой произведение этих расширений и является, таким образом, набором $n_1 \cdot n_2$ углов. Мера на каждом таком углу равна продакт - мере соответствующих мер.

При условии, что все $F_{ij}(x)$ и $G_{ij}(x)$ абсолютно непрерывны, следует, что мы образуем продакт - меру из двух мер, каждая из которых состоит из тяжелой точки и абсолютно непрерывной (относительно меры Лебега [3]) части.

Продакт - мера двух "тяжелых" точек даёт "тяжелую" точку в плоскости (её координата $(t;t)$). Продакт - мера "тяжёлой" точки одной меры и абсолютно непрерывной части другой меры даст "тяжёлый" отрезок, мера на котором абсолютно непрерывна относительно линейной меры Лебега, а продакт - мера двух абсолютно непрерывных частей даст меру, “сидящую” на квадрате $[0,t]\times[0,t]$, и абсолютно непрерывную относительно плоской меры Лебега.

Предложенный подход позволит в дальнейшем использовать ставшие традиционными методы теории совместной оптимальной нелинейной фильтрации дискретно - непрерывных марковских параметров [1] в задачах, когда наблюдение на входе демодулятора представляет собой аддитивную смесь взаимно неортогональных цифровых сигналов различных источников.

ЛИТЕРАТУРА

1.Тихонов В.И., Харисов В.Н. Теория, методы анализа и синтеза радиоэлектронных систем. – М.: ВВИА им. И.Е. Жуковского, 1989. – 610 с.

2.Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её применение. – М.: Мир, 1984. – Т.1. – 528 с. – Т.2. – 752 с.

3.Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.