

## МЕТОДИКА СИНТЕЗА ИЗМЕРИТЕЛЕЙ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ С НЕЛИНЕЙНЫМ УСТРОЙСТВОМ СРАВНЕНИЯ

к.т.н. С.В. Чёрный, В.А. Жилин  
(представил д.т.н., проф. О.Н. Фоменко)

Приводится обоснование методики синтеза оптимальных измерителей с нелинейным устройством сравнения, обеспечивающей снижение влияния зоны нечувствительности на точность измерений с одновременным воспроизведением производных измеряемой величины.

Измерителям физических величин с механическими чувствительными элементами (ЧЭ) присуща нелинейность типа зоны нечувствительности, обусловленная моментом сухого трения в опорах ЧЭ. При учете данной нелинейности в компенсационных измерителях с электромагнитным моментным устройством в качестве управляемой меры справедливо полагать, что зоной нечувствительности обладает устройство сравнения, а управляемая мера зоной нечувствительности не обладает [1].

В силу сказанного рассматриваются измерители с нелинейным устройством сравнения, в частности, акселерометры и гироскопические измерители угловых параметров движения (ГИУПД) летательных аппаратов (ЛА). Динамика этих измерителей может быть описана дифференциальным уравнением второго порядка [1, 2]. Поэтому структурно их можно представить в общем виде так, как показано на рис. 1. Здесь  $A_0$  — момент инерции ЧЭ относительно оси подвеса,  $D$  — коэффициент демпфирования,  $K_{\text{упр}}$  — коэффициент упругой связи ЧЭ с основанием прибора,  $x$  — входная (измеряемая) величина,  $\beta$  — угол отклонения ЧЭ от нейтрального положения,  $z$  — выходная величина,  $J$  — определяется в зависимости от того, о каком измерителе идет речь. Для акселерометра  $J = ml$ , где  $m$  — масса инерционного ЧЭ,  $l$  — длина плеча подвеса ЧЭ, для ГИУПД  $J = H$ , где  $H$  — кинетический момент ротора гироскопа.

Характеристика нелинейного элемента (НЭ) имеет вид:

$$F(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\varepsilon| \leq \Delta_0; \\ K_\delta (\varepsilon - \Delta_0 \text{sign}(\varepsilon)) & \text{при } |\varepsilon| > \Delta_0, \end{cases} \quad (1)$$

где:  $\varepsilon$  — сигнал на входе НЭ;  
 $\Delta_0$  — величина порога чувствительности;  
 $K_\delta$  — коэффициент наклона характеристики.

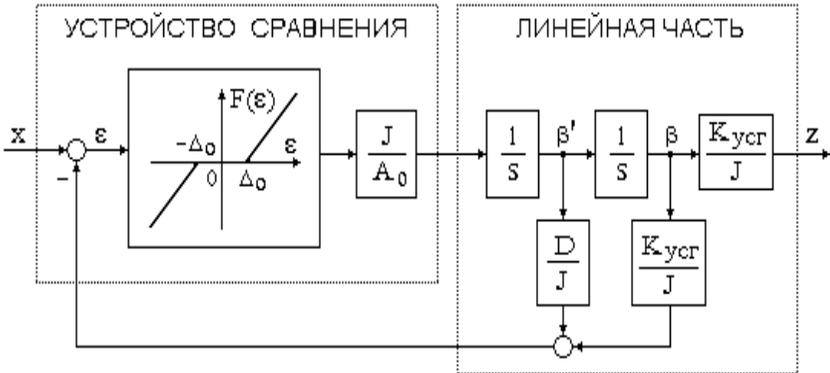


Рис. 1. Обобщенная структурная схема измерителей линейных и угловых параметров движения ЛА

Выбор однозначной симметричной нелинейной функции  $F(\varepsilon)$  определяется достаточно точным ее соответствием характеристике момента сухого трения в опорах ЧЭ акселерометров и ГИУПД [1, 2].

Существующие методы компенсации влияния зоны нечувствительности (применение специальных конструктивных материалов, разгрузка опор, “оживление” опор, использование новых физических принципов измерения) часто не позволяют достичь повышения точности сверх определяемой уходами  $10^{-2} - 10^{-4}$  град./ч для гироскопических измерителей и погрешностью  $10^{-5} - 10^{-6}$  g для акселерометров.

Предлагается новый подход к решению указанной задачи, основанный на эффекте внутренней вибрационной линеаризации зоны нечувствительности за счет “оживления” ЧЭ измерителя. Суть такого “оживления” состоит в обеспечении автоколебательного движения ЧЭ относительно среднего уровня измеряемого сигнала. При этом амплитуда автоколебаний ЧЭ больше величины порога чувствительности, что обеспечивает наблюдение измеряемого сигнала даже в пределах конструктивно присущей измерителю зоны нечувствительности. В то же время амплитуда автоколебаний на измерительном выходе существенно ниже

порога чувствительности благодаря фильтрации автоколебаний в линейной части специального вида, которая помимо обеспечения устойчивых автоколебаний позволяет воспроизводить производные измеряемой величины.

Выбор линейной части, обеспечивающей именно такие свойства, продиктован часто имеющейся необходимостью определения производных параметров движения ЛА, например, для идентификации аэродинамических моментов в процессе летных испытаний. Итак, предлагается строить линейную часть в соответствии со структурой датчика производных высокого порядка (ДПВП) [3].

При этом обобщенная структурная схема для измерителей линейных и угловых параметров движения ЛА имеет вид, представленный на рис. 2.

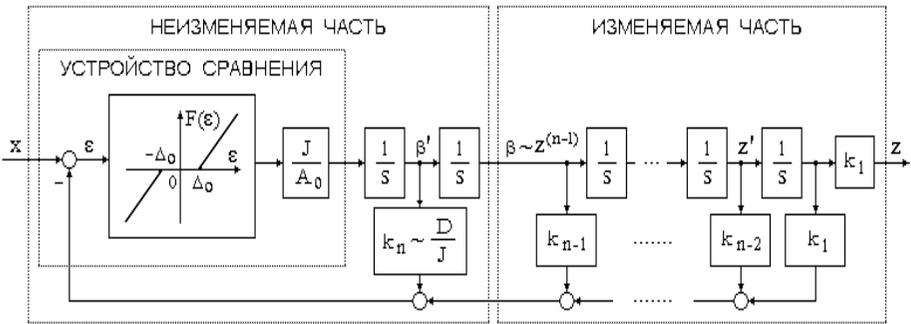


Рис. 2. Обобщенная структурная схема измерителей высших производных линейных и угловых параметров движения ЛА

Коэффициенты обратной связи выбираются в соответствии с [3] следующим образом:

$$k_i = C_n^m \omega_0^m; \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}; \quad \omega_0 = \sqrt[n]{\omega_{0np}^2}, \quad (2)$$

где  $\omega_{0np}$  — собственная частота серийного прибора-прототипа, соответствующего структурной схеме на рис. 1,  $\omega_0$  — собственная частота измерителя, соответствующего структурной схеме на рис. 2 (определяет ширину полосы пропускания [3]),  $C_n^m$  — полиномиальные коэффициенты бинома Ньютона, причем  $i = n, n-1, n-2, \dots, 1$ ;  $m = 1, 2, \dots, n$  — порядок измерителя (количество интегрирующих звеньев в структуре).

При таком выборе обеспечивается соответствие коэффициента  $k_n$  отношению  $D/J$ . Это указывает на возможность не изменять параметры механической части прибора-прототипа, что немаловажно при синтезе

измерителей с предложенной структурой, поскольку не всегда имеет место техническая возможность либо целесообразность конструктивных изменений гиروزла или инерционного ЧЭ акселерометра.

Для подтверждения наличия автоколебательного режима в измерителях с предлагаемой структурой проведено (по методу гармонической линеаризации) исследование возможных периодических режимов в ДПВП с нелинейным устройством сравнения (рис.3).

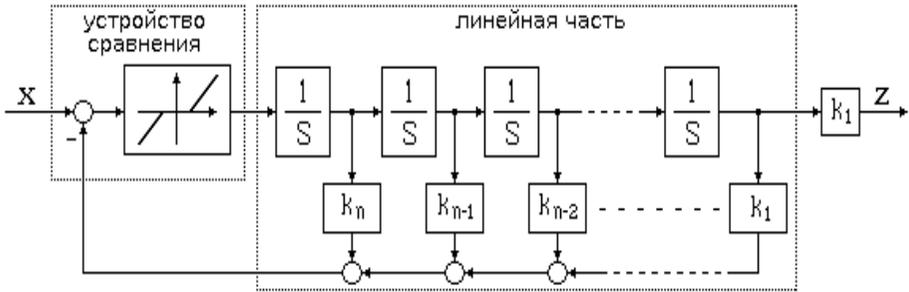


Рис. 3. Структурная схема ДПВП с нелинейным устройством сравнения

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованного ДПВП имеет вид:

$$W_{нз}(s, A)W_{л}(s)+1=0;$$

$$W_{нз}(s, A) = g(A) = K_{\delta} - \frac{2K_{\delta}}{\pi} \left( \arcsin \frac{\Delta_0}{A} + \frac{\Delta_0}{A} \sqrt{1 - \frac{\Delta_0^2}{A^2}} \right); \quad (3)$$

$$W_{л}(s) = \frac{k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-2} + k_{n-2} s^{n-3} + \dots + k_1}{s^n},$$

где  $W_{нз}(s, A)$  — передаточная функция гармонически линеаризованного нелинейного звена,  $W_{л}(s)$  — передаточная функция линейной части (от выхода нелинейного элемента ко входу в устройство сравнения),  $g(A)$  — коэффициент гармонической линеаризации,  $A$  — амплитуда входного гармонического сигнала.

Решения уравнения (3), полученные для порядков  $n = 2, \dots, 5$  в соответствии с предложенным Л.С. Гольдфарбом графо - аналитическим способом, приведены на рис. 4. На основании данных решений, а также результатов исследования ДПВП порядков  $n = 6, \dots, 20$  [4], можно сделать следующий вывод: в ДПВП порядка  $n > 2$  с нелинейным элементом

типа зоны нечувствительности имеет место единственно возможный абсолютно устойчивый автоколебательный режим.

С целью подтверждения полученного теоретического вывода проведено численное моделирование нелинейного ДПВП. На рис.5 представлены

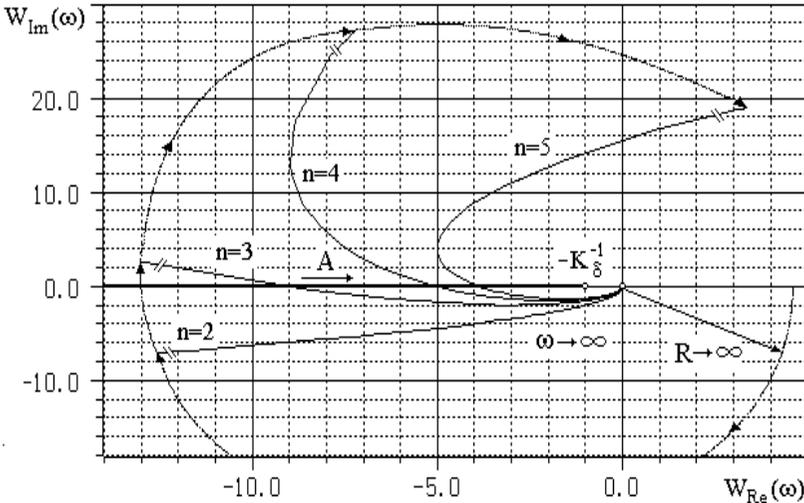


Рис. 4. Периодические решения характеристического уравнения ДПВП с нелинейным устройством сравнения

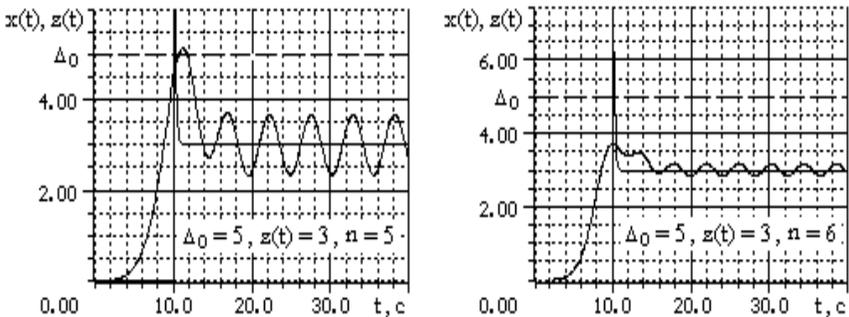


Рис. 5. Автоколебательное движение ДПВП с нелинейным устройством сравнения

результаты моделирования, подтверждающие наличие автоколебательного движения ДПВП относительно среднего уровня постоянного входного воздействия. Установлено, что для возбуждения устойчивых неза-

тухающих автоколебаний необходимо однократное выполнение условия:  $x(t) > \Delta_0$ .

Кроме того, получены частотные зависимости (рис. 6), устанавливающие связь между частотой автоколебаний  $\omega_n$ , собственной частотой  $\omega_0$  и порядком  $n$  ДПВП, а также эмпирическое аналитическое соотношение для величины амплитуды автоколебаний  $A$  на выходе последнего интегратора:

$$A = \frac{0,85}{(n-2)!} \Delta_0 \quad (4)$$

Соотношение (4) указывает на тот факт, что амплитуда автоколебаний на выходе последнего интегратора может быть существенно ниже величины порога чувствительности. Эффект снижения амплитуды автоколебаний при прохождении сигнала через линейную часть измерителя обеспечивается тем, что  $\omega_n > 1$  даже при очень малой  $\omega_0$  (рис. 6).

Итак, погрешность измерений от влияния автоколебаний, в которую трансформируется погрешность от влияния зоны нечувствительности, менее существенна, чем исходная.

Таким образом, в результате теоретических исследований и численного эксперимента, их подтверждающего, доказана возможность повышения точности измерителей за счет построения компенсационного контура в соответствии со структурой ДПВП.

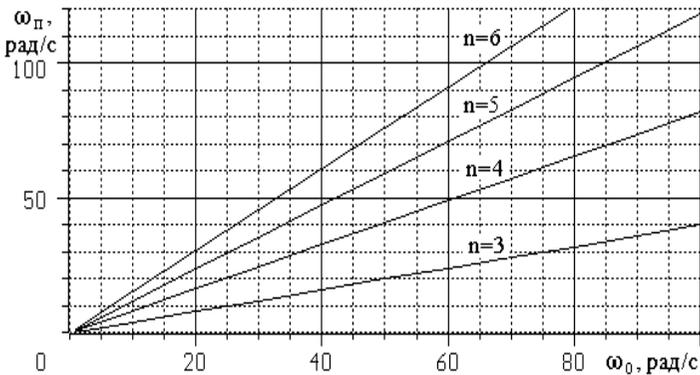


Рис. 6. Частотные зависимости ДПВП с нелинейным устройством сравнения

В связи с выбором коэффициентов обратной связи в соответствии с соотношением (2) максимальным по величине является коэффициент  $k_1$ . Для того, чтобы избежать искажений воспроизводимых сигналов из-за

фазового запаздывания, необходимо выбирать такую величину  $\mathbf{k}_1$ , чтобы максимальная из частот измеряемых сигналов была бы меньше собственной частоты измерителя  $\omega_0$ , определяемой в соответствии с (2) как

$$\omega_0 = \sqrt[n]{\mathbf{k}_1} . \quad (5)$$

На практике всегда имеется ограничение по технической реализации величины коэффициента  $\mathbf{k}_1$ . При этом с увеличением порядка  $\mathbf{n}$  измерителя с одной стороны снижается погрешность от влияния зоны нечувствительности, см. (4) и рис. 6, а с другой — увеличивается динамическая составляющая погрешности измерения, см. (5).

Таким образом, задача синтеза предложенного измерителя является оптимизационной и может быть сформулирована следующим образом: при заданных значениях порога чувствительности  $\Delta_0$  и предельном реализуемом значении коэффициента усиления  $\mathbf{k}_1$  определить для заданного входного воздействия со спектральной плотностью мощности  $\mathbf{S}(\omega)$  оптимальный порядок измерителя  $\mathbf{n}$ , при котором обеспечивается минимальное значение среднего квадратического отклонения (СКО) суммарной абсолютной погрешности измерения  $\Delta_{абс}$ .

При этом целевой функцией является функция СКО  $\Delta_{абс}$ , определяемая соотношением [5]

$$\sigma_z(\mathbf{n}) = \sqrt{\left( \mathbf{h} \sum_{i=1}^{[1/\mathbf{h}]} \Delta_{абсi}^2 - \left( \mathbf{h} \sum_{i=1}^{[1/\mathbf{h}]} \Delta_{абсi} \right)^2 \right)}, \quad (6)$$

где

$$\Delta_{абсi} = z_i - x_i, \quad i=1, \dots, [1/\mathbf{h}] ; \quad (7)$$

$x_i, z_i$  - значения входного и выходного сигналов измерителя соответственно на  $i$  - м шаге интегрирования,

$\mathbf{h}$  - шаг интегрирования.

Соотношение (7) по сути определяет дискретную аппроксимацию непрерывной функции  $\Delta_{абс}(t)$  с точностью до  $\mathbf{h}$ . Соответственно с этой же точностью выражение (6) определяет СКО  $\Delta_{абс}$ .

Значения  $x_i$  и  $z_i$  на каждом шаге  $\mathbf{h}$  определяются в ходе решения дифференциального уравнения, описывающего динамику измерителя.

В частности, такое уравнение, соответствующее структурной схеме на рис. 2, в форме Коши с учетом условия (1) имеет вид:

$$z(t) = z_1; \quad \frac{dz(t)}{dt} = z_2; \quad \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = z_3; \dots; \quad \frac{d^{n-1} z(t)}{dt^{n-1}} = z_n;$$

$$\frac{d^n z(t)}{dt^n} = Q(x(t) - k_n z_n - k_{n-1} z_{n-1} - \dots - k_2 z_2 - k_1 z_1) = 0,$$

если  $|x(t) - k_n z_n - k_{n-1} z_{n-1} - \dots - k_2 z_2 - k_1 z_1| \leq \Delta_0$ ; (8)

$$\frac{d^n z(t)}{dt^n} = Q[(x(t) - k_n z_n - k_{n-1} z_{n-1} - \dots - k_2 z_2 - k_1 z_1) - \Delta_0 \operatorname{sign}(x(t) - k_n z_n - k_{n-1} z_{n-1} - \dots - k_2 z_2 - k_1 z_1)],$$

если  $|x(t) - k_n z_n - k_{n-1} z_{n-1} - \dots - k_2 z_2 - k_1 z_1| > \Delta_0$ .

Здесь  $Q$  — множитель, значение которого определяется в зависимости от того, о каком измерителе идет речь. Так, для компенсационного маятникового акселерометра  $Q = m/A_0$  [1], для датчика угловой скорости  $Q = H/A_0$  [2].

Итак, соотношения (2), (5), (6) — (8) составляют математическую базу методики синтеза измерителей высших производных с нелинейным устройством сравнения. Цель предлагаемой методики состоит в определении новой структуры обратной связи компенсационного прибора, который является серийным промышленным прототипом синтезируемого измерителя.

Методика предполагает следующие шаги:

1) определение спектральной плотности мощности  $S(\omega)$  измеряемого сигнала по соответствующей записи бортовых средств объективного контроля (СОК) или из других источников;

2) синтез (любым из существующих способов) формирующего фильтра для моделирования входного сигнала  $x(t)$  со спектральной плотностью  $S(\omega)$ ;

3) определение паспортного значения величины порога чувствительности  $\Delta_{0\text{нр}}$  и собственной частоты  $\omega_{0\text{нр}}$  серийного прибора-прототипа из технической документации либо других достоверных источников;

4) вычисление СКО суммарной абсолютной погрешности измерения в соответствии с (2), (5), (6) — (8) для  $n = 2, n = 3, \dots$  и так далее, пока значение СКО для текущего значения  $n$  не окажется большим, нежели для предыдущего (целевая функция  $\sigma_z(n)$  — унимодальна);

5) порядок  $n$ , для которого СКО  $\Delta_{\text{абс}}$  имеет наименьшее значение, считать оптимальным относительно заданной  $S(\omega)$  измеряемого сигнала.

Измеритель с линейной частью, соответствующей структуре ДПВП, обеспечивает внутреннюю вибрационную линеаризацию зоны нечув-

ствительности только в случае  $n > 2$  (см. рис. 4). Следовательно, оптимальный измеритель порядка  $n$ , построенный по предложенной методике, воспроизводит как саму измеряемую величину, так и ее  $n - 2$  старшие производные. В силу этого такой измеритель в общем смысле может называться измерителем высших производных.

В этой связи естественным представляется вопрос о точности воспроизведения производных измеряемой величины.

Здесь приводится вариант оценки точности воспроизведения гироскопическим измерителем производных угловой скорости, соответствующей в навигационном смысле скорости вращения местной вертикали. Речь идет об одной из составляющих скорости, с которой гироскопическая инерциальная навигационная система (ИНС) самолета должна вращаться вокруг осей опорного трехгранника, чтобы оставаться неподвижной относительно инерциального пространства. Точность обработки гиросtabilизатором каждой из составляющих скорости вращения гироскопической инерциальной навигационной системы определяется в первую очередь точностью гироскопических чувствительных элементов ИНС. Таким образом, здесь рассматривается точность воспроизведения ГИУПД, построенным по предложенной методике, производных сигнала, содержащего информацию о навигационном движении самолета.

Наиболее характерным маневром самолета в режиме навигации является координированный разворот. Спектральные характеристики координированного разворота приводятся в техническом описании для каждого типа ЛА и, как правило, имеют вид, показанный на рис. 7.

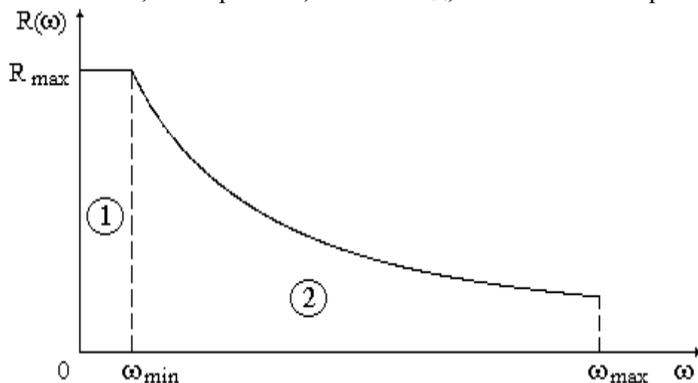


Рис.7. Общий вид спектральной характеристики координированного разворота самолета

Здесь  $R(\omega)$  — зависимость радиуса координированного разворота от циклической частоты  $\omega$  движения ЛА, т.е. от угловой скорости движения по дуге:  $\omega = V/R$ ,  $V$  — линейная скорость движения по дуге. Точ-

ки  $\omega_{\min}$  и  $\omega_{\max}$  — соответственно характеризуют частотный диапазон движения самолета, определяющийся его летно - техническими характеристиками.

Во избежание громоздких математических соотношений рассматривается экстремальный вариант координированного разворота — полет по кругу с выдерживанием постоянной высоты и демпфированием угла скольжения. При этом в предположении сферичности Земли координаты самолета изменяются следующим образом:

$$\varphi(\omega) = \frac{R(\omega)}{R_3}; \quad \lambda(\omega) = \frac{R(\omega)}{R_3}, \quad (9)$$

где:

$\varphi, \lambda$  — текущие геоцентрические координаты местоположения самолета,

$R_3$  — радиус Земли.

Спектральная плотность  $i$  - й производной сигнала, содержащего информацию о навигационном движении самолета, может быть определена следующим образом:

$$S^{(i)}(\omega) = \omega^{2i} \frac{R^2(\omega)}{R_3^2} S_{\text{вх}}(\omega); \quad S_{\text{вх}}(\omega) = 1; \quad i = 0, \dots, n. \quad (10)$$

На основании (10) определяется дисперсия  $D_{\Sigma}^{(i)}$   $i$  - й производной рассматриваемого сигнала [5]:

$$\begin{aligned} D_1^{(i)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_{\min}} S^{(i)}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{R_{\max}^2 \omega_{\min}^{2i+1}}{R_3^2 (2i+1)} S_{\text{вх}}(\omega) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{V^2 \omega_{\min}^{2i+1}}{\omega_{\min}^2 R_3^2 (2i+1)} S_{\text{вх}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{V^2 \omega_{\min}^{2i-1}}{R_3^2 (2i+1)} S_{\text{вх}}(\omega) \\ D_2^{(i)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} S^{(i)}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{V^2 S_{\text{вх}}(\omega) (\omega_{\max}^{2i-1} - \omega_{\min}^{2i-1})}{R_3^2 (2i-1)}; \quad (11) \\ D_{\Sigma}^{(i)} &= D_1^{(i)} + D_2^{(i)} = \frac{1}{2\pi} \frac{V^2 S_{\text{вх}}(\omega)}{R_3^2} \cdot \frac{(2i+1)\omega_{\max}^{2i-1} - 2\omega_{\min}^{2i-1}}{4i^2 - 1}; \quad i=0, \dots, n. \end{aligned}$$

Дисперсия  $i$  - й производной, измеренной ГИУПД, который построен по предложенной методике, определяется соотношением

$$D^{(i)} = \omega_{ак}^{2i} D_{ввых}; \quad i=0, \dots, n, \quad (12)$$

где  $\omega_{ак}$  — частота автоколебаний,  $D_{ввых}$  — дисперсия выходного сигнала  $z$  (см. рис. 2).

На основании (11) и (12) определяется относительная погрешность  $\Delta_{отн}$  измерения производных сигнала, содержащего информацию о навигационном движении самолета:

$$\Delta_{отн} (\%) = 2\pi \frac{\omega_{ак}^{2i} D_{ввых} R_3^2 (4i^2 - 1)}{V^2 S_{вх}(\omega) [(2i+1)\omega_{max}^{2i-1} - 2\omega_{min}^{2i-1}]} 100\%. \quad (13)$$

Следует отметить, что рассмотренный подход приемлем для оценки точности измерения производных любого сигнала, для которого известна спектральная характеристика.

Итак, обоснована методика синтеза измерителей высших производных с нелинейным устройством сравнения.

Предлагаемая методика может применяться для совершенствования метрологических характеристик современных измерителей угловых и линейных параметров движения летательных аппаратов, а также для создания измерителей других физических величин и их производных.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич О.А., Доброленский Ю.П. и др. Авиационные приборы и навигационные системы. – М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1981. – 648 с.
2. Пельпор Д.С. и др. Гироскопические системы. Ч.2. Гироскопические приборы и системы. – М.: "Высш. шк.", 1988. – 424 с.
3. Чёрный С.В. Основы теории датчиков производных высокого порядка. Научно-методические материалы по алгоритмическому обеспечению пилотажно - навигационных комплексов. —Харьков: ХВВАИУ, 1990. – С. 3 - 29.
4. Чёрный С.В., Жилин В.А. Автоколебательный режим нелинейного датчика производных высокого порядка. - Вестник ХГПУ, выпуск 14. – Харьков: ХГПУ, 1998. – С. 95 - 98.
5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.:Наука, – 1964. – 576 с.