

ЭФФЕКТИВНОСТЬ УПРАВЛЕНИЯ СТРУКТУРОЙ СИГНАЛА

А.В. Краснокутский, В.В. Косенко, В.Ю. Пархоменко
 (представил д.т.н., проф. В.И. Долгов)

Сформулирована и доказана лемма об эффективности управления кодовой структурой сложных сигналов в условиях воздействия сосредоточенных помех в канале связи.

Из теории информации и теории потенциальной помехоустойчивости известно, что при «белом» аддитивном шуме, действующем в канале, для наибольшей скорости передачи необходимо, чтобы сигнал на входе канала был «закодирован» таким образом, чтобы его энергетический спектр по своим статистическим свойствам приближался к белому шуму [1]. Однако энергетический спектр большинства передаваемых сигналов, соответствующих различным сообщениям, существенно отличается от белого шума и имеет в каждом конкретном случае вполне определенный характер. Кроме того, в реальных системах передачи информации наряду с аддитивным шумом встречаются сосредоточенные помехи, энергетический спектр которых расположен в отдельных участках спектра полезного сигнала.

Следовательно, возникает задача согласования спектров сигнала и помехи для обеспечения максимально возможной достоверности приема информации. Напомним, что на практике форма энергетического спектра сигнала не выбирается произвольно, а обуславливается видом передаваемых сообщений и способом модуляции.

Определение. Энергетической эффективностью выбора кодовой структуры сложного сигнала, передаваемого по каналу связи в условиях сосредоточенных по спектру помех, называется величина Ξ , показывающая во сколько раз отношение P'_c / P'_n сигнал/помеха на входе приемника при наличии управления кодовой структуры сигнала больше, чем отношение P_c / P_n при отсутствии данного управления, т.е.

$$\Xi = \frac{P'_c / P'_n}{P_c / P_n} \quad (1)$$

Условие 1. Процесс управления кодовой структурой сигнала, при котором изменяется его форма $S_c(t; \{a_k\} = \text{var})$, а, следовательно, и спектр сигнала $S_c(f)$, будем условно представлять как результат изменения АЧХ передающего тракта $H(f)$: от идеальной - к неравномерной.

Условие 2. Для правильности оценки эффективности управления кодовой структурой сложного сигнала необходимо потребовать выполнение условия фиксации средней мощности сигнала на входе канала:

$$\int_{f_H}^{f_B} S_c(f) |H(f)|^2 df = P_{\text{ср}} = \text{const}. \quad (2)$$

Для выполнения последнего условия необходимо с целью компенсации возможного ослабления сигнала (в связи с изменением его спектра) включить в передающий тракт дополнительный усилитель, компенсирующий уменьшение $P_{\text{ср}}$. Коэффициент усиления дополнительного усилителя (по мощности) равен

$$(k')^2 = \int_{f_H}^{f_B} S_c(f) df / \int_{f_H}^{f_B} S_c(f) |H(f)|^2 df, \quad (3)$$

где f_H и f_B - граничные частоты эффективной полосы пропускания тракта.

Лемма. Эффективность управления кодовой структурой сложного сигнала в условиях сосредоточенных помех получается тем больше, чем больше различаются между собой спектры сигнала $S_c(f)$ и помехи $S_n(f)$.

Доказательство. На основании (1) энергетический критерий эффективности выбора кодовой структуры сигнала имеет вид

$$\Theta = \frac{P'_c P_n}{P_c P'_n} = \frac{\int_{f_H}^{f_B} S_c(f) |H(f)|^2 df \cdot \int_{f_H}^{f_B} S_n(f) W(f) df}{\int_{f_H}^{f_B} S_c(f) df \cdot \int_{f_H}^{f_B} S_n(f) W(f) df}, \quad (4)$$

где $W(f)$ - весовая функция, используемая для учета спектральных свойств приемника при оценке помех (характеризует психофизические особенности восприятия помех получателем сообщения).

С учетом условия 2, умножая числитель выражения (4) на $(k')^2$, получим:

$$\mathcal{E} = \frac{\int_{f_H}^{f_B} S_c(f) df \cdot \int_{f_H}^{f_B} S_n(f) W(f) df}{\int_{f_H}^{f_B} S_c(f) |H(f)|^2 df \cdot \int_{f_H}^{f_B} \frac{S_n(f) W(f)}{|H(f)|^2} df} \quad (5)$$

Процесс нахождения максимума функционала \mathcal{E} можно привести к решению простой изопериметрической задачи вариационной техники. Для этого необходимо отыскать характеристику $|H(f)|$, минимизирующую среднюю взвешенную мощность помех на входе приемника

$$\int_{f_H}^{f_B} \frac{k^2 S_n(f) W(f)}{|H(f)|^2} df \rightarrow \min$$

при фиксированной средней мощности сигнала на входе канала, т.е. при дополнительном условии (2). При этом результат получится точно таким же, как и при максимизации функционала \mathcal{E} по $|H(f)|$.

Используя теорему Лагранжа [2], решим изопериметрическую задачу по отысканию минимума функционала

$$I = \int_{f_H}^{f_B} \left[\frac{k^2 S_n(f) W(f)}{|H(f)|^2} + \Lambda S_c(f) |H(f)|^2 \right] df, \quad (6)$$

где Λ - произвольная постоянная (множитель неопределенности Лагранжа).

Варьируя функционалом I , получаем следующее уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial \left[\frac{k^2 S_n(f) W(f)}{|H(f)|^2} \right]}{\partial |H(f)|^2} + \Lambda \frac{\partial S_c(f) |H(f)|^2}{\partial |H(f)|^2} = 0 \quad (7)$$

или $-\frac{k^2 S_n(f) W(f)}{|H(f)|^2} + \Lambda S_c(f) = 0$, откуда

$$|H(f)|_{\text{opt}}^2 = \sqrt{k^2 S_n(f) W(f) / \Lambda S_c(f)}. \quad (8)$$

Постоянную Λ можно найти, подставляя выражение (8) в дополнительное условие (2):

$$\Lambda = \left[\frac{k}{P_{\text{ср}}} \int_{f_H}^{f_B} \sqrt{S_c(f) S_n(f) W(f)} df \right]. \quad (9)$$

С учетом последнего выражения получаем

$$|\mathbf{H}(\mathbf{f})|_{\text{opt}}^2 = \frac{P_{\text{срр}}}{\int_{f_{\text{H}}}^{f_{\text{B}}} \sqrt{S_{\text{н}}(\mathbf{f})S_{\text{с}}(\mathbf{f})\mathbf{W}(\mathbf{f})}d\mathbf{f}} \sqrt{\frac{S_{\text{н}}(\mathbf{f})\mathbf{W}(\mathbf{f})}{S_{\text{с}}(\mathbf{f})}}. \quad (10)$$

Подставляя значения $|\mathbf{H}(\mathbf{f})|_{\text{opt}}^2$ из выражения (10) в формулу (5), находим

$$\mathfrak{E}_{\text{max}} = \frac{\int_{f_{\text{H}}}^{f_{\text{B}}} S_{\text{с}}(\mathbf{f})d\mathbf{f} \cdot \int_{f_{\text{H}}}^{f_{\text{B}}} S_{\text{н}}(\mathbf{f})\mathbf{W}(\mathbf{f})d\mathbf{f}}{\left[\int_{f_{\text{H}}}^{f_{\text{B}}} \sqrt{S_{\text{с}}(\mathbf{f})S_{\text{н}}(\mathbf{f})\mathbf{W}(\mathbf{f})}d\mathbf{f} \right]^2}. \quad (11)$$

Числитель и знаменатель в формуле (11) связаны между собой неравенством Буняковского - Коши [3]:

$$\int_{f_{\text{H}}}^{f_{\text{B}}} S_{\text{с}}(\mathbf{f})d\mathbf{f} \cdot \int_{f_{\text{H}}}^{f_{\text{B}}} S_{\text{н}}(\mathbf{f})\mathbf{W}(\mathbf{f})d\mathbf{f} \geq \left[\int_{f_{\text{H}}}^{f_{\text{B}}} \sqrt{S_{\text{с}}(\mathbf{f})S_{\text{н}}(\mathbf{f})\mathbf{W}(\mathbf{f})}d\mathbf{f} \right]^2, \quad (12)$$

которое превращается в равенство только в случае, если функции $S_{\text{с}}(\mathbf{f})$ и $S_{\text{н}}(\mathbf{f})\mathbf{W}(\mathbf{f})$ равны или отличаются постоянными множителями. При одинаковых и пропорциональных спектрах сигнала и помехи $\mathfrak{E}_{\text{max}} = 1$ и управление кодовой структурой сигнала неэффективно. В остальных случаях $\mathfrak{E}_{\text{max}} > 1$ и значение величины эффективности $\mathfrak{E}_{\text{max}}$ возрастает с ростом различий между энергетическими спектрами сигнала и помехи. Лемма доказана.

При изменении спектров сигнала и помехи целесообразно рассмотреть два случая.

В первом случае задается спектр сигнала $S_{\text{с}}(\mathbf{f})$, а спектр помехи изменяется с целью минимизации ее влияния на сигнал. На практике такая минимизация осуществляется методом режекции и компенсационным методом.

Во втором случае задается спектр помехи $S_{\text{н}}(\mathbf{f})$, а спектр сигнала выбирается таким, чтобы обеспечить максимальное значение отношения сигнал/помеха

$$h_{c/n}^2 = \int_0^{\infty} \frac{S_c(f)}{S_n(f)} df. \quad (13)$$

В случае, если спектр помехи имеет несколько уровней интенсивности, то существует участок ΔF с минимальной интенсивностью спектра, в котором $v_{nmin}^2 = S_n(f)$. При этом спектральная плотность $v_{nmin}^2 \leq v_{ncp}^2 = P_n / F_m$, где F_m - максимально возможная полоса частот сигнала.

Если сосредоточить весь спектр сигнала в интервале частот с минимальной интенсивностью помехи, то из (13) следует

$$h_{c/n}^2 = \frac{2}{v_{nmin}^2} \int_0^{\infty} S_c^2(f) df = \frac{2E}{v_{nmin}^2} > \frac{2E}{v_{ncp}^2},$$

где E - энергия сигнала.

Как видно из полученного неравенства, любая неравномерность в спектре помехи даст принципиальную возможность увеличения отношения сигнал/помеха при подстройке спектра сигнала под помеху.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shannon C.E., Weaver W. The mathematical theory of communication. – Urbana(III.): Univ. of Ill. press, 1949. – P. 3 - 89.
2. Маригодов В.К. Помехоустойчивая обработка информации. Методы оптимального линейного предсказания и корректирования. – М.: Наука, 1983. – 201 с.
3. Тузов Г.И. Статистическая теория приема сложных сигналов. – М.: Сов.радио, 1977. – 400 с.