

УДК 621.396.946.2

В.В. Воротніков, І.О. Канкін, В.В. Умінський

Житомирський військовий інститут ім. С.П.Корольова НАУ, Житомир

## ІНВАРІАНТНІ АЛГОРИТМИ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ТРАЄКТОРІЙ ЛІТАЛЬНИХ ОБ'ЄКТІВ

Проведено аналіз роботи алгоритмів оцінювання параметрів траєкторій літальних об'єктів при апіорній невизначеності збурень в динаміці руху. На основі теорії інваріантності та операторного методу розроблено алгоритми оцінювання параметрів траєкторій з підвищеними точнісними характеристиками. Можливість зменшення динамічних помилок з'являється за рахунок використання додаткових компенсаційних зв'язків в каналах фільтрації та екстраполяції. Наведено результати досліджень аналітичним методом.

**Ключові слова:** інваріантність, оцінювання, фільтрація, екстраполяція, адаптація.

### Вступ

**Постановка проблеми.** Під час розв'язання задачі оцінювання параметрів траєкторій літальних об'єктів (ЛО) в радіотехнічних слідкувальних системах на практиці широке застосування знайшли алгоритми калмановської фільтрації. Теорія таких фільтрів ґрунтується на наявності апіорної інформації про математичну модель руху об'єкта та статистичні характеристики вимірювальних шумів [7]. Якщо така інформація відсутня, то алгоритми стають неоптимальними, а оцінки, що формуються ними, можуть стати розбіжними [8].

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Для усунення цього недоліку існує ряд напрямів у розв'язанні задачі оцінювання: мінімакний підхід, принцип адаптації та підхід, оснований на теорії інваріантності [4]. Застосування мінімаксного методу може виявитись недостатнім через відсутність мінімізації помилок оцінювання для всіх умов роботи фільтра, а використанню адаптивних алгоритмів перешкоджає можливість розбіжності процесу адаптації та складність їх аналітичного дослідження [4]. Завдяки тому, що точність оцінювання не залежить від характеристик вхідної дії, на особливу увагу заслуговує підхід, оснований на теорії інваріантності [4]. Інваріантні алгоритми можна побудувати на основі комплексної системи фільтрації, яка має два та більше входів, але це значно обмежує область застосування цих алгоритмів [1]. Інший підхід [5] передбачає відповідну обробку вимірювань та виключення завдяки цьому динамічних помилок оцінювання. Але даний метод не дає змоги синтезувати алгоритми оцінювання тих параметрів, які не підлягають безпосередньому спостереженню.

Таким чином, аналіз відомих напрямків досліджень показав, що для розв'язання задачі оцінювання параметрів траєкторій літальних об'єктів в умовах апіорної невизначеності збурень в динаміці руху, доцільно використовувати методикою синтезу інваріантних алгоритмів оцінювання параметрів траєкторій, застосування якої дозволяє виключити динамічні помилки сталого режиму роботи фільтра, при одночасному збереженні високої якості фільтрації випадкової складової [6].

У зв'язку з цим, метою даної роботи є розробка алгоритмів оцінювання параметрів траєкторій ЛО, яким притаманна властивість інваріантності відносно параметрів траєкторій ЛО, що дасть змогу використовувати їх при апіорній невизначеності умов функціонування систем обробки радіолокаційної інформації.

### Основний розділ

**Постановка задачі.** Припустимо, що вектор параметрів траєкторій ЛО описується системою лінійних різницевих рівнянь:

$$\bar{x}_n = \Phi(1)\bar{x}_{n-1} + B(1)\bar{\xi}_{n-1}, \quad (1)$$

де  $\bar{x}_n$  – вектор параметрів траєкторій (вектор стану) розмірністю  $k \times 1$ ;  $\bar{\xi}_n$  – вектор збурень у динаміці руху ЛО розмірністю  $k \times 1$ ;  $\Phi(1)$  – перехідна матриця стану розмірністю  $k \times k$ ;  $B(1)$  – перехідна матриця збурення розмірністю  $k \times 1$ .

Процес вимірювання координат описується як

$$g(n) = H\bar{x}_n + f(n), \quad (2)$$

де  $H$  – матриця спостереження розмірністю  $1 \times k$ ;  $f(n)$  – некорельована гаусівська помилка вимірювання з нульовим середнім та відомою дисперсією  $R(n)$ , тобто

$$M[f(n)] = 0; \quad M[f(n)f(n-i)] = 0, \quad i > 0;$$

$$M[x(n)f(n)] = 0; \quad R(n) = M[f^2(n)].$$

Необхідно синтезувати алгоритми оцінювання, які задовольняють вимогам інваріантності помилок фільтрації та екстраполяції відносно вхідної дії, а також оптимальні за критерієм мінімуму кореляційної матриці помилок оцінювання:

$$P_n = M[\bar{\varepsilon}_n \bar{\varepsilon}_n^T] \rightarrow \min, \quad (3)$$

де  $\bar{\varepsilon}_n = \bar{x}_n - \hat{\bar{x}}_n$  – вектор помилок фільтрації.

### Синтез алгоритмів оцінювання

Згідно з методикою синтезу інваріантних алгоритмів оцінювання параметрів траєкторій об'єктів спостереження [6] алгоритми фільтрації та екстра-

поляції визначаються з рівнянь:

$$A\hat{x}_n = (C-B)D\tilde{u}(n); \quad (4)$$

$$\hat{x}_e(n) = HF\hat{x}_n, \quad (5)$$

де  $\tilde{u}(n) = g(n) - \hat{x}_e(n)$  – нев'язка спостереження;  $D$  – матриця розмірністю  $k \times 1$ , елементи якої відповідають співвідношенню  $d_{k1} = \frac{1}{(k-1)!T^{k-1}}$ ;  $A$ ,  $B$  – поліноміальні матриці, що визначають точність екстраполяції та фільтрації відповідно;  $C$  – характеристична матриця, яка визначає стійкість фільтра;  $F$  – поліноміальна матриця екстраполяції.

Для усунення динамічних помилок фільтрації та екстраполяції поліноми матриць  $A$ ,  $B$  визначаються з умов третьої форми досягнення інваріантності [1, 6]

$$A\bar{x}_n = 0; \quad B\bar{x}_n = 0; \quad A \neq 0; \quad B \neq 0; \quad \bar{x}_n \neq 0 \quad (6)$$

за виразами:

$$a_{kk}(z) = (1-z^{-1})^{v+1-k}(a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_mz^{-m}), \quad (7)$$

$$b_{kk}(z) = (1-z^{-1})^{v+1-k}(b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_1z^{-1}), \quad (8)$$

де  $a_m$ ;  $b_1$  – вагові коефіцієнти;  $v$  – порядок астатизму.

Матриця екстраполяції  $F$  та характеристична матриця  $C$  розраховуються за виразами [6]:

$$F = I - A; \quad (9)$$

$$C = (I - F)^{-1}(A - FB), \quad (10)$$

де  $I$  – одинична матриця.

Розрахунок екстрапольованого значення координати реалізується шляхом використання оцінок відповідних похідних, застосовуючи рівняння (6):

$$\Delta^i x(n-j) = \dot{x}(n-j) \cdot T^i / i!, \quad (11)$$

де  $\Delta^i$  –  $i$ -та ліва різниця;  $T$  – темп надходження інформації.

Залишаючи другий порядок астатизму системи ( $v=2$ ), для забезпечення високої якості фільтрації випадкових помилок, отримаємо алгоритми оцінювання з меншими динамічними помилками. Для цього елементи поліноміальних матриць  $A$ ,  $B$  визначаються з умов (6) за виразами (7), (8) та мають вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} (1-z^{-1})^2 & 0 \\ 0 & (1-z^{-1}) \end{bmatrix}; \quad (12) \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

де елементи матриці  $B$  розраховуються як:

$$B_{11} = (b_0 + b_1z^{-1})(1-z^{-1})^2; \quad B_{12} = 0;$$

$$B_{21} = 0; \quad B_{22} = (b'_0 + b'_1z^{-1})(1-z^{-1}).$$

Наявність в елементах поліноміальних матриць окрім коефіцієнтів  $b_0$ ,  $b'_0$  інших коефіцієнтів, а саме,  $b_1$ ,  $b'_1$  дозволяє добиватися зменшення динамічних помилок оцінювання.

Використовуючи матриці (12), (13) у виразах (9), (10) розраховуються матриці екстраполяції  $F$  та характеристична матриця замкненої системи  $C$ :

$$F = \begin{bmatrix} 2z^{-1} - z^{-2} & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}; \quad (14) \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

де елементи матриці  $C$  дорівнюють:

$$C_{11} = 1 - (2z^{-1} - z^{-2})^2(b_0 + b_1z^{-1}); \quad C_{12} = 0;$$

$$C_{21} = 0; \quad C_{22} = 1 - z^{-1}(b'_0 + b'_1z^{-1}).$$

Підставивши вирази (12), (13) та (14), (15) до співвідношень (4), (5), визначається алгоритм оцінювання параметрів траєкторій ЛО:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(n) \\ \hat{\dot{x}}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\hat{x}(n-1) - \hat{x}(n-2) \\ \hat{\dot{x}}(n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-b_0)\tilde{u}(n) - b_1\tilde{u}(n-1) \\ \frac{(1-b'_0)}{T}\tilde{u}(n) - \frac{b'_1}{T}\tilde{u}(n-1) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Кінцевий вигляд алгоритмів фільтрації та екстраполяції з врахуванням в рівняннях екстраполяції координати оцінок відповідних похідних (з врахуванням виразу (11)) представлений наступними виразами:

$$\hat{x}_e(n) = \hat{x}(n-1) + \hat{\dot{x}}(n-1)T;$$

$$\tilde{u}(n) = g(n) - \hat{x}_e(n);$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}_e(n) + (1-b_0)\tilde{u}(n) - b_1\tilde{u}(n-1); \quad (17)$$

$$\hat{\dot{x}}(n) = \hat{\dot{x}}_e(n) + \frac{(1-b'_0)}{T}\tilde{u}(n) - \frac{b'_1}{T}\tilde{u}(n-1).$$

Досягнути покращення роботи цифрового фільтра можливо також за рахунок зменшення помилок спостереження (помилки вимірювань в поняттях калмановської фільтрації), за допомогою введення додаткових коефіцієнтів по екстраполяції координати.

Для цього використовуючи вище наведену методику ненульові елементи діагональних поліноміальних матриць обираються як:

$$A_{11} = (1-z^{-1})^2(1+a_1z^{-1}); \quad (18)$$

$$A_{21} = (1-z^{-1})(1+a'_1z^{-1});$$

$$B_{11} = (1+a_1z^{-1})(1-z^{-1})^2b_0; \quad (19)$$

$$B_{22} = (1+a'_1z^{-1})(1-z^{-1})b'_0,$$

а рівняння для алгоритмів фільтрації та екстраполяції приймають вигляд:

$$\hat{x}_e(n) = \hat{x}(n-1) + \hat{\dot{x}}(n-1)T - a_1[\hat{x}(n-1)T - \hat{x}(n-2)T];$$

$$\hat{\dot{x}}_e(n) = \hat{\dot{x}}(n-1) - a'_1[\hat{\dot{x}}(n-1) - \hat{\dot{x}}(n-2)];$$

$$\tilde{u}(n) = g(n) - \hat{x}_e(n); \quad (20)$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}_e(n) + (1-b_0)\tilde{u}(n);$$

$$\hat{\dot{x}}(n) = \hat{\dot{x}}_e(n) + (1-b'_0)/T \cdot \tilde{u}(n).$$

Для одночасного зменшення динамічних помилок фільтрації та екстраполяції ненульові елементи діагональних матриць розраховуються за формулами (7), (8) та мають вигляд:

$$A_{11} = (1-z^{-1})^2(1+a_1z^{-1}); \quad (21)$$

$$A_{21} = (1-z^{-1})(1+a'_1z^{-1});$$

$$B_{11} = (b_0 + b_1z^{-1})(1-z^{-1})^2(1+a_1z^{-1}); \quad (22)$$

$$B_{22} = (b'_0 + b'_1z^{-1})(1-z^{-1})(1+a'_1z^{-1}),$$

а кінцеві рівняння для алгоритмів фільтрації та екстраполяції відповідно:

$$\begin{aligned} \hat{x}_e(n) &= \hat{x}(n-1) + \hat{\dot{x}}(n-1)T - a_1 [\hat{x}(n-1)T - \hat{x}(n-2)T]; \\ \hat{\dot{x}}_e(n) &= \hat{\dot{x}}(n-1) - a'_1 [\hat{x}(n-1) - \hat{x}(n-2)]; \\ \tilde{u}(n) &= g(n) - \hat{x}_e(n); \\ \hat{x}(n) &= \hat{x}_e(n) + (1-b_0)\tilde{u}(n) - b_1\tilde{u}(n-1); \\ \hat{\dot{x}}(n) &= \hat{\dot{x}}_e(n) + (1-b'_0)/T \cdot \tilde{u}(n) - b'_1/T \tilde{u}(n-1). \end{aligned} \quad (23)$$

Кожен з отриманих цифрових фільтрів, що описуються рівняннями (17), (20) та (23) є системою автоматичного управління зі зворотним зв'язком та постійними коефіцієнтами, що дозволяє застосувати відомі методи аналізу стаціонарних систем для дослідження їх характеристик.

### Аналіз характеристик якості фільтрів

Аналіз якості синтезованих алгоритмів оцінювання параметрів траєкторій ЛО проведено за відносною дисперсією сумарної (випадкова плюс динамічна) помилки оцінювання в порівнянні з роботою відомого алгоритму послідовного згладжування параметрів лінійної траєкторії ( $\alpha\beta$ -фільтром) [2]. Враховуючи, що системи, що розглядаються, лінійні, отримано вирази для відносної дисперсії сумарної помилки оцінювання координати:

$$\sigma_{\Sigma}^2 / \sigma_{\text{вх}}^2 = 2I_4 + \varepsilon_d^2(n),$$

де  $I_4$  – інтеграл Парсеваля 4-го порядку, а  $\varepsilon_d^2(n)$  – динамічна помилка в сталому режимі роботи. У зв'язку з громіздкістю формул даний матеріал в роботі не наводиться.

У [6] показано, що, позначивши  $b_0 = 1 - \alpha$ ,  $b'_0 = 1 - \beta$ , при  $a_1 = a'_1 = b_1 = b'_1 = 0$  вирази для розробленого алгоритму оцінювання збігаються з алгоритмом  $\alpha\beta$ -фільтра. Враховуючи залежність вагових коефіцієнтів від кількості попередніх вимірів, які використовуються [2]:

$$b_0 = 1 - \frac{2(2n-1)}{n(n+1)}; \quad b'_0 = 1 - \frac{6}{n(n+1)}$$

отримано графіки відносних дисперсій сумарних помилок оцінювання координати та її похідної при постійних значеннях інших коефіцієнтів, які обираються з умов зменшення помилок оцінювання ( $n = 4$ , рис. 1).

З графіків видно, що в порівнянні з відомим алгоритмом (криві 1, 3), відносна дисперсія помилки оцінювання запропонованих фільтрів (сімейство кривих 2, 4) менша (рис. 1). Найкращі результати

досягаються при використанні алгоритму (23) за рахунок одночасного зменшення помилок фільтрації та екстраполяції.

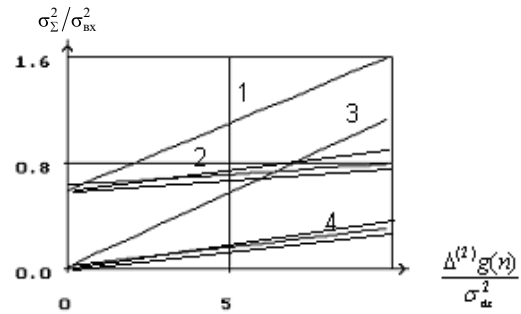


Рис. 1. Залежність дисперсії сумарних помилок оцінювання координати та похідної від інтенсивності маневру літального об'єкту

### Висновки

Таким чином, аналіз розроблених алгоритмів аналітичним методом показав, що наявність додаткових компенсаційних зв'язків вказує можливі шляхи зменшення динамічних помилок, які зумовлені невідповідністю закону зміни параметрів траєкторії ЛО, моделі екстраполяції, яка прийнята у фільтрі. Перспективами подальших досліджень в даному напрямку є розробка алгоритмів з більшим порядком астатизму та одночасним збереження високої якості фільтрації випадкової складової помилки.

### Список літератури

1. Зайцев Г.Ф., Стежков В.К. Комбинированные следящие системы. – К.: Техника, 1978. – 263 с.
2. Кузьмин С.З. Цифровая радиолокация. Введение в теорию. – К.: КВЦ, 2000. – 428 с.
3. Крохин В.В. Информационно-управляющие космические радиолитии. Часть 2. – М., 1993. – 214 с.
4. Первачев С.В., Перов А.И. Адаптивная фильтрация сообщений. – М.: Радио и связь, 1991. – 160 с.
5. Пушкарев Ю.А. Анализ и синтез дискретных систем оценивания. – Житомир: ЖВУРЭ, 1989. – 326 с.
6. Пічугін М.Ф., Зімчук І.В., Канкін І.О. Методика синтезу інваріантних алгоритмів оцінювання параметрів траєкторій літальних об'єктів // Вісник ЖДТУ. – 2004. № 29. – С. 42-45.
7. Сильверстов С.Д., Лазарев В.М., Корниенко А.И., Панишин М.И. Точность измерения параметров движения космических аппаратов радиотехническими методами. – М.: Сов. радио, 1970. – 320 с.
8. Шульце К.П., Реберг К.Ю. Инженерный анализ адаптивных систем: Пер. с нем. – М.: Мир, 1992. – 280 с.

Надійшла до редколегії 23.09.2008

Рецензент: д-р техн. наук, с.н.с. Г.В. Худов, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

### ИНВАРИАНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ТРАЕКТОРИЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

В.В. Воротников, И.О. Канкин, В.В. Уминский

Проведен анализ алгоритмов оценивания параметров траекторий летательных объектов при априорной неопределённости возмущений в динамике их движения. На основе теории инвариантности и операторного метода разработаны алгоритмы оценивания с повышенными точностными характеристиками. Возможность уменьшения динамических ошибок появляется за счёт использования дополнительных компенсационных связей в каналах фильтрации и экстраполяции. Приведены результаты исследований аналитическим методом.

**Ключевые слова:** инвариантность, оценивание, фильтрация, экстраполяция, адаптация.

**INVARIANT ALGORITHMS OF ESTIMATION TRAJECTORY PARAMETERS OF FLYING OBJECTS**

B.B. Vorotnikov, I.O. Kankin, V.V. Uminskiy

*The analysis of algorithms of evaluation of parameters of trajectories of flying objects is conducted at a priori vagueness of indications in the dynamics of their motion. On the basis of theory of invariance and statement method evaluation algorithms are developed with enhanceable tochnosnimi descriptions. Possibility of diminishing of dynamic errors appears due to the use of additional compensative connections in ductings of filtration and extrapolation. The results of researches are resulted by an analytical method.*

**Keywords:** invariance, estimation, filtration, extrapolation, adaptation.