УДК 621.372

СИНТЕЗ СТРУКТУРЫ СЕТИ ОБМЕНА ДАННЫМИ

Г.И. Линец, Л.А. Фомин, С.Н. Зданевич, Н.А. Павленко, П.А. Будко*
(представил д.т.н., проф. О.Н. Фоменко)

Дан подход к оптимальному синтезу магистральной части сети обмена данными путём выбора пропускных способностей линий связи, не зависящих от вида функции стоимости и обеспечивающих минимальное среднее время задержки.

Задача синтеза структуры сети связи формулируется следующим образом [1]. Имеется $\mathbf{k}$ абонентов $\mathbf{Q_1, \ldots, Q_k}$, места расположения которых заданы географическими координатами. Абоненты должны обмениваться информацией в соответствии с матрицей тяготения $\Lambda = \| \lambda_{v,w} \|$ размером $\mathbf{k \times k}$, где $\lambda_{v,w}$ – планируемый объём информации, передаваемой от абонента $\mathbf{Q_v}$ к абоненту $\mathbf{Q_w}$ в единицу времени. Предполагается, что абоненты должны подключаться к ближайшему узлу коммутации (УК). Матрица тяготения между абонентами пересчитывается в матрицу тяготения между УК $\Lambda = \| \lambda_{i\,j} \|$ ($\lambda_{i\,j}$ – интенсивность потока сообщений между УК $\mathbf{A_i}$ и $\mathbf{A_j}$, причём $| \lambda_{i\,j} | = | \lambda_{j\,i} |$). Топология межузловой связи не определена. Далее задаётся стоимостная функция $\mathbf{C(v,l)}$ в виде явной функции пропускной способности ветвей $\mathbf{V_{i\,j}}$ и их длины $l_{i\,j}$ [2]. Необходимо для каждой пары УК $\mathbf{A_i}$ и $\mathbf{A_j}$ выбрать пропускную способность $\mathbf{V_{ij}}$ так, чтобы линейная стоимость всей сети $\sum \mathbf{C_{ij}}$ была минимальной при условии, что средняя задержка пакета на превышала заданное значение [3]: $\mathbf{T_{ср} \le T_{треб}}$.

Однако, поскольку топология сети пока неизвестна, то любая выбранная форма функции стоимости не может отражать истинную стоимость сети. Кроме того, многообразие форм данной функции вносит субъективизм в выбор её вида, поскольку применение той или иной формы функции стоимости недостаточно аргументировано для конкретных условий задачи.

При оптимизации пропускных способностей часто пользуются второй постановкой задачи : при фиксированной стоимости сети $\mathbf{C(v, l) \le C_{зад}}$ минимизируется среднее время задержки $\mathbf{T_{ср} \to min}$, которая, впрочем, приводит к аналогичным результатам. Поток по каждой линии $\mathbf{(i,j)}$ $\mathbf{F_{i\,j} = L\lambda_{i\,j}}$, где $\mathbf{L}$ – длина пакета, и величина потока выражается в тех же единицах (бит / с), что и пропускная способность $\mathbf{V_{i\,j} = L\mu_{i\,j}}$, причём $\mu_{i\,j}$ $\mathbf{(c^{-1})}$ – интенсивность обслуживания пакетов на входе в каждый канал.

Для получения функционала оптимизации большинство авторов [1,2,3] исходят из модели сети в виде системы массового обслуживания типа **М/М/1**, основанной на клейнроковской аппроксимации

$$\mathbf{T_{cp} = \frac{1}{\gamma}\sum_{(i,j)}\frac{F_{ij}}{V_{ij}-F_{ij}} \to min}\,,\quad \mathbf{i < j}\,, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ - общий трафик сети.

Функция (1) является выпуклой, но не содержит экстремумов по переменным $\mathbf{F_{ij}}$ и $\mathbf{V_{ij}}$, поэтому задача оптимизации этой функции может быть только условной, при этом выбор ограничения в виде функции стоимости не лишён перечисленных выше недостатков.

Предлагаемая процедура оптимизации пропускных способностей предполагает использовать в качестве функционала оптимизации среднее время задержки (1) при ограничениях в виде объективно существующих линейных функций, выражающих закон сохранения потока в каждом узле сети

$$\mathbf{\sum_{i=1}^{n} F_{ij} = aF_j^0}\,,\ \mathbf{i \neq j}\,, \tag{2}$$

причём $\mathbf{F_{ij} = -F_{ji}}$ и $\mathbf{F_j^0}$ - начальный поток, принадлежащий узлу $\mathbf{j}$;

$$\mathbf{a} = \begin{cases} \mathbf{1,} & \textbf{при} \quad \mathbf{j = S;} \\ \mathbf{0,} & \textbf{при} \quad \mathbf{j \neq S, T;} \\ \mathbf{-1,} & \textbf{при} \quad \mathbf{j = T.} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{S} \ - \ \text{узел-"источник"}, \\ \mathbf{T} \ - \ \text{узел-"получатель"}. \end{array}$$

Такая постановка является задачей условной оптимизации и может быть решена методом неопределённых множителей Лагранжа. Функционал оптимизации представим в следующем виде в соответствии с (1) и (2):

$$\mathbf{\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{F_{ij}}{V_{ij}-F_{ij}} + \sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{j=1}^{n} F_{ij} + aF_j^0}\,, \tag{3}$$

где $\mathbf{P_i}$ – неопределённые множители Лагранжа.

Поскольку закон сохранения потока имеет место для всех без исключения $\mathbf{n}$ узлов сети, то всегда для одного из узлов сумма потоков является линейной комбинацией потоков всех остальных узлов. В этой связи в выражении (3) для $\mathbf{\Phi_1}$ $\mathbf{i}$ изменяется от $\mathbf{1}$ до $\mathbf{n - 1}$. Однако, для получения симметричного решения положено $\mathbf{i = \overline{1,n}}$. Учёт данного обстоятельства будет выполнен после решения задачи оптимизации путем задания $\mathbf{P_n = 0}$.

Задача решается в два этапа. На первом этапе находятся оптимальные значения потоков $\mathbf{F_{ij}^{опт}}$, обеспечивающие минимум функционала (3), путем вычисления частных производных $\mathbf{d\Phi/dF_{ij} = 0}$.

Дифференцирование по всему набору значений $\mathbf{i, j = \overline{1,n}}$ предполагает, таким образом, начальную структуру сети полносвязной.

Вычисление производных приводит к системе уравнений вида

$$\frac{1}{\gamma}\frac{V_{kl}}{(V_{kl} - F_{kl})^2} + (P_k - P_l) = 0\,, \quad k,l = \overline{1,n}\,, \tag{4}$$

причём $\mathbf{k < l}$.

Число этих уравнений для полносвязной сети определяется количеством ветвей графа сети и равно $\mathbf{m = n(n-1)/2}$.

Находим оптимальное значение потока в каждой ветви из уравнений (4)

$$F_{kl} = V_{kl} - \sqrt{\frac{V_{kl}}{\gamma(P_l - P_k)}}\,. \tag{5}$$

Неопределённые множители Лагранжа $\mathbf{P_l}$ и $\mathbf{P_k}$ находятся путём подстановки уравнений (5) в ограничения (2):

$$\sum_{k=1}^{n}\left(V_{kl} - \sqrt{\frac{V_{kl}}{\gamma(P_l - P_k)}}\right) = aF_l\,, \qquad l = \overline{1,n-1} \tag{6}$$

и совместного решения **(n - 1) -** го уравнения системы (6).

Нахождение истинных значений $\mathbf{P_l^*}$ и $\mathbf{P_k^*}$ позволяет определить оптимальные значения потоков $\mathbf{F_{kl}^{опт}}$ в каждой виртуальной ветви полносвязной сети :

$$F_{kl}^{опт} = V_{kl} - \sqrt{\frac{V_{kl}}{\gamma(P_l^* - P_k^*)}} \tag{7}$$

Преобразуем выражение (7) к виду, более удобному для интерпретации:

$$F_{kl}^{опт} = V_{kl} - d_{kl}\sqrt{V_{kl}}\,, \tag{8}$$

где $\mathbf{d_{kl} = 1\Big/\sqrt{\gamma(P_l^* - P_k^*)}}$.

Таким образом, оптимальный поток, проходящий в каждой ветви, должен быть меньше её пропускной способности на величину, пропорциональную корню квадратному из пропускной способности этой ветви, что является необходимым условием исключения блокировки сети. Знание величины $\mathbf{d_{kl}}$ позволяет вычислить значение этого превышения, обеспечивающего минимум среднего времени задержки

$$T_{ср}^{min} = \frac{1}{\gamma}\sum_{(k,l)}\left(\frac{\sqrt{V_{kl}}}{d_{kl}} - 1\right)\,. \tag{9}$$

На втором этапе осуществляется замена значений $\mathbf{F_{kl}^{опт}}$ соответствующими значениями потоков, заданных матрицей тяготений в выражениях (8):

$$L\lambda_{kl} = V_{kl} - d_{kl}\sqrt{V_{kl}} \quad . \tag{10}$$

Это означает, что варьированием значениями пропускных способностей ветвей связи мы добиваемся совмещения координат точки минимума выражения (9) в пространстве оптимальных решений с координатами пространства тяготений. Решая уравнение (9) относительно $\mathbf{V_{kl}}$, получаем

$$V_{kl} = \frac{\left(d_{kl} \pm \sqrt{d_{kl}^2 + 4L\lambda_{kl}}\right)^2}{4} \quad . \tag{11}$$

Анализ выражения (11) показывает, что значения пропускных способностей $\mathbf{V_{kl}}$ являются оптимальными в том смысле, что они дают минимальное среднее время задержки без учёта стоимости сети, которая может быть оценена на этом этапе синтеза по одной из наиболее удобных для условий задачи функции стоимости, например, [2]

$$C = k\sum_{(k,l)} V_{kl} \le C_{зад} \quad . \tag{12}$$

Если стоимость сети превысит $\mathbf{C}_{зад}$, то необходимо изменить топологию сети, применив, например, метод исключения ветвей. При этом естественно перейти к путевым потокам $\mathbf{X_p}$ именно на этом этапе синтеза, положив $L\lambda_{ij} = \sum X_p$.

Таким образом, в статье дан подход к оптимальному синтезу структуры межузловой сети, принципиально отличающийся от традиционных методов решения данной задачи, который не требует задания функции стоимости на этапе оптимизации, устраняя тем самым определённый субъективизм результатов. На втором этапе оценку стоимости сети можно осуществить по любой стоимостной функции. Кроме того, предложенный метод оптимизации потоков не зависит от выбора метода маршрутизации, что позволило в значительной мере сократить размерность решаемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мизин И.А., Богатырёв К.А., Кулешов А.П. Сети коммутации пакетов. – М.: Радио и связь, 1986. – 407 с.
2. Девис Д., Барбер Д. Вычислительные сети и сетевые протоколы. – М.: Мир, 1982. – 564 с.
3. Бертсекас Д., Галагер Р. Сети передачи данных. – М.: Мир, 1988. – 544 с.