

ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

к.т.н. И.П. Кнышев
(представил д.т.н., проф. П.Ф. Поляков)

Даны определения интегральной и дифференциальной функций распределения детерминированного сигнала по уровням области значений. Получены выражения функций для ряда сигналов.

Корреляционный анализ, как элемент математического аппарата теории вероятностей, с успехом используется при анализе детерминированных сигналов [1]. Для более широкого применения вероятностных методов целесообразно определить функции, аналогичные интегральной и дифференциальной функциям распределения вероятностей случайных сигналов.

Для детерминированного сигнала $\mathbf{u}(t)$ можно воспользоваться относительной долей времени пребывания сигнала на его отдельных значениях. Это позволит определить интегральную $\mathbf{Fd}(x)$ и дифференциальную $\mathbf{Wd}(x)$ функции распределения сигнала по уровням x :

$$\mathbf{Fd}(x) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \mathbf{dir}[x; \mathbf{u}(t)] dt, \quad (1)$$

которая показывает относительную долю времени, когда значения сигнала $\mathbf{u}(t)$ не превышают уровень x ;

$$\mathbf{Wd}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \mathbf{dir}[(x + \Delta x); \mathbf{u}(t)] - \mathbf{dir}[x; \mathbf{u}(t)] dt, \quad (2)$$

которая показывает относительную долю времени пребывания сигнала в бесконечно малом интервале в окрестностях значения x .

Здесь $\mathbf{dir}[x; \mathbf{u}(t)] = \begin{cases} 1, & \mathbf{u}(t) \leq x; \\ 0, & \mathbf{u}(t) > x \end{cases}$ – ступенчатая функция.

В случае периодического сигнала интегрирование в (1) или (2) осуществляется на интервале T_0 , равном периоду сигнала. У непериодического сигнала интегрирование осуществляется на интервале формирования или обработки, который, в частности, может определяться требу-

емой точностью. Этот интервал должен быть существенно больше эффективной длительности сигнала.

Из определения следует, что функция $Fd(x)$ обладает следующими свойствами.

- Функция неотрицательна, $0 \leq Fd(x) \leq 1$, с областью определения x на конечном или бесконечном интервале (на области значений $u(t)$).
- Функция неубывающая: $Fd(x_1) \geq Fd(x_2)$, если $x_1 \geq x_2$.
- Предельные значения: $Fd(-\infty) = 0$ и $Fd(\infty) = 1$.
- Функция $Fd(x)$ не зависит от временного сдвига $u(t)$.

Свойства функции $Wd(x)$.

- Функция неотрицательна, $0 \leq Wd(x) \leq \infty$, с областью определения x на конечном или бесконечном интервале (на области значений $u(t)$).
- Функция $Wd(x)$ не зависит от временного сдвига $u(t)$.

- Функция $Wd(x)$ удовлетворяет условию:
$$\int_{-\infty}^{\infty} Wd(x) dx = 1.$$

Связь между функциями выражается соотношениями:

$$Fd(x) = \int_{-\infty}^x Wd(y) dy; \quad Wd(x) = \frac{dFd(x)}{dx}. \quad (3)$$

Из приведенных свойств и соотношений легко просматривается аналогия функций (1) и (2) с соответствующими функциями распределения вероятности случайного сигнала [2].

Рассмотрим вид функций (1) и (2) для конкретных сигналов.

Гармоническое колебание с периодом $T_r = 1/F_r$

$$u_{rp}(t) = U_0 \cos(2\pi F_r t)$$

имеет на периоде T_r (см. рис.1)

$$\text{dir}[x; u(t)] = \begin{cases} 1, & -\frac{T_r}{2} \leq t \leq -\frac{T_r \arccos(x)}{2\pi}, \frac{T_r \arccos(x)}{2\pi} \leq t \leq \frac{T_r}{2}; \\ 0, & -\frac{T_r \arccos(x)}{2\pi} < t < \frac{T_r \arccos(x)}{2\pi}, \end{cases}$$

где $x = u/U_0$.

Тогда, из (1) можно получить:

$$Fd_{rp}(x) = \frac{2}{T_r} \int_{T_r \arccos(x)/2\pi}^{T_r/2} 1 dt = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos(x), \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (4)$$

Из свойства функции и выражения (4) следует, что начальная фаза гармонического колебания не влияет на $Fd_{rp}(x)$.

Воспользовавшись соотношением (3), из (4) получим:

$$Wd_{rp}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (5)$$

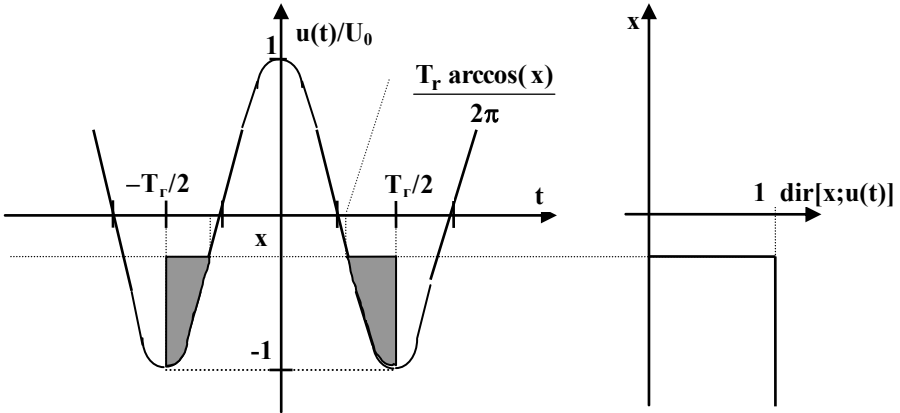


Рис. 1. Гармонические колебания

На рис. 2а) приведен график функции (4) - (кривая 1) и график функции (5) - (кривая 2).

Периодическая последовательность треугольных импульсов с периодом $T_r = t_n$

$$u_r(t) = U_0 \left(\frac{4|t|}{t_n} - 1 \right), \quad |t| \leq \frac{t_n}{2},$$

имеет функцию

$$\text{dir}[x;u(t)] = \begin{cases} 1, & -\frac{(x+1)t_n}{2} \leq t \leq \frac{(x+1)t_n}{2}; \\ 0, & t < -\frac{(x+1)t_n}{2}, t > \frac{(x+1)t_n}{2}, \end{cases}$$

где $x = u/U_0$.

Используя соотношения (1) и (3), можно получить:

$$Fd_r(x) = \frac{2}{t_n} \int_0^{t_n(x+1)/4} 1 dt = \frac{x+1}{2}, \quad (6)$$

$$Wd_r(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (7)$$

Прямоугольный импульс с амплитудой U_0 и длительностью t_n имеет:

$Fd_n(x) = I(x-1)$ - функция Хевисайда;

$Wd_n(x) = \delta(x-1)$ - δ -функция.

Здесь также $x = u/U_0$.

Гауссовский сигнал $u_r(t) = U_0 \exp(-t^2/2\bar{a}^2)$ имеет на некотором временном интервале $T_0 \gg \bar{a}$ функцию:

$$\text{dir}[x; u(t)] = \begin{cases} 1, & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq -\sqrt{-2\bar{a}^2 \ln(x)}, \sqrt{-2\bar{a}^2 \ln(x)} \leq t \leq \frac{T_0}{2}; \\ 0, & t < -\frac{T_0}{2}, -\sqrt{-2\bar{a}^2 \ln(x)} < t < \sqrt{-2\bar{a}^2 \ln(x)}, t > \frac{T_0}{2}, \end{cases}$$

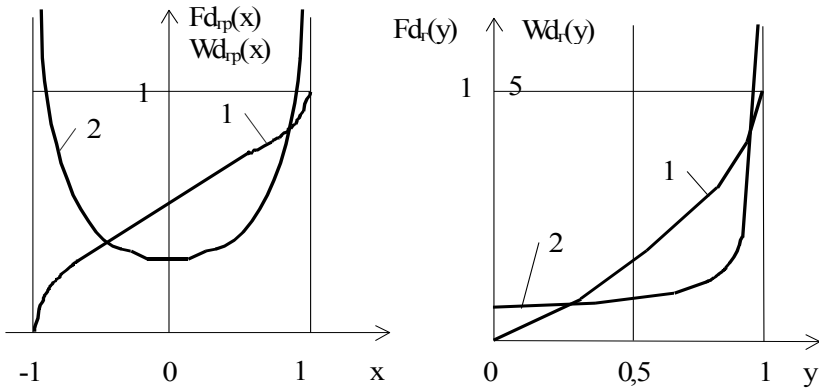
где $x = u/U_0$.

Задавшись интервалом T_0 или минимальным значением сигнала (точностью определения) x_0 , причем $T_0 = 2\sqrt{-2\bar{a}^2 \ln(x_0)}$, введем переменную y с областью определения $y \in [0; 1]$ такую, что $x = x_0^{(1-y)}$. Тогда из (1.4.6) можно получить:

$$Fd_r(x) = \frac{2}{T_0} \int_{\sqrt{-2\bar{a}^2 \ln(x)}}^{T_0/2} 1 dt = 1 - \frac{2}{T_0} \sqrt{-2\bar{a}^2 \ln(x)} = 1 - \sqrt{1-y}; \quad (8)$$

$$Wd_r(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-y}}, \quad y \in [0; 1]. \quad (9)$$

На рис. 2б) приведены графики зависимости (8) — кривая 1 и зависимости (9) — кривая 2.



а) гармонические колебания

б) гауссовский сигнал

Рис.2. Графики интегральной и дифференциальной функций распределения сигнала

Экспоненциальный импульс

$$u_r(t) = \begin{cases} U_0 e^{-\sigma t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

также имеет функции:

$$Fd_3(x) = \frac{1}{T_0} \int_{-\ln(x)/2}^{T_0} 1 dt = 1 - \frac{\ln(x)}{\ln(x_0)} = y; \quad (10)$$

$$Wd_3(x) = -\frac{1}{x \ln(x_0)}; \quad Wd_3(y) = 1; \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (11)$$

где $x = u/U_0$. Как и в случае гауссовского сигнала, задаемся временным интервалом T_0 , связанным соотношением $T_0 = -\ln(x_0)/\zeta$, и используем замену переменной $x = x_0^{(1-y)}$ с областью определения $y \in [0; 1]$.

Сигнал с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) во временной области описывается выражением [3]

$$u_{\text{ЛЧМ}}(t) = \begin{cases} U_0 \exp(j\mu t^2) & 0 < t < T_B; \\ 0, & t > T_B, \quad t < 0, \end{cases}$$

где $\mu = 2\pi\Delta f/T_B$ - крутизна частотной модуляции; Δf - девиация частоты; T_B - длительность сигнала.

Воспользовавшись методикой получения функций распределения для гармонического сигнала, получим для сигнала с ЛЧМ:

$$Fd_{\text{ЛЧМ}}(x) = \frac{1}{\sqrt{B}} \sum_{i=0}^{B-1} \left[\sqrt{(i+1) - \frac{\arccos(x)}{2\pi}} - \sqrt{i + \frac{\arccos(x)}{2\pi}} \right];$$

$$Wd_{\text{ЛЧМ}}(x) = \frac{1}{4\pi\sqrt{B(1-x^2)}} \sum_{i=0}^{B-1} \left[\frac{1}{\sqrt{(i+1) - \arccos(x)/2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{i + \arccos(x)/2\pi}} \right],$$

где $B = T_B \Delta f$ - база сигнала.

При $B \rightarrow \infty$ получаем распределения (4) и (5) соответственно.

Полученные функции позволяют, в частности, определять параметры сигналов (среднее значение, дисперсию и др.) [2], проводить оптимизацию аналого-цифровых преобразователей [4] и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Сов. радио, 1971. – 672 с.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн.1. – М.: Сов. радио, 1974. – 552 с.
3. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. – М.: Сов. радио, 1971. – 567 с.
4. Кнышев И.П. Оптимизация аналого-цифрового преобразователя по параметрам одномерного распределения // Радиотехника и электроника. –1987. – Т.ХХХII, вып. 5. – С. 971 - 979.