УДК 621.391.82

СИНТЕЗ АНСАМБЛЕЙ ДИСКРЕТНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ ПО ЗАДАННЫМ ТРЕБОВАНИЯМ

к.т.н. А.П. Жук, М.А. Трошков*
(представил д.т.н., проф. Л.В. Колосов)

Предложен подход к решению задачи синтеза ансамблей сигналов, описываемых собственными векторами действительных симметрических матриц.

Задача синтеза ансамбля сигналов, удовлетворяющих совокупности заданных требований имеет большое практическое значение при проектировании средств связи для различных радиоканалов.

В ряде работ [1, 2] рассмотрен метод синтеза ансамблей дискретных ортогональных фазоманипулированных сигналов (ДОФМС), описываемых собственными векторами действительных симметрических матриц (ДСМ). Такой подход обладает универсальностью и открывает дополнительные возможности в решении ряда задач, труднодоступных для методов синтеза, разработанных ранее. Однако в прямой постановке задача синтеза в этом случае имеет неоднозначные и неустойчивые решения. Такие задачи согласно Адамару [3] относятся к классу некорректно поставленных.

Для решения этой задачи согласно [1] достаточно рассматривать собственные векторы действительных бидиагональных симметрических матриц вида:

$$\mathbf{A} = \left|\begin{array}{cccccccc} \mathbf{0} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{0} & \mathbf{a_{23}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{0} & \mathbf{a_{34}} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hdotsfor{8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{a_{n-1,n}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{a_{n,n-1}} & \mathbf{0} \end{array}\right| \qquad (1)$$

С целью ограничения числа переборов в пространстве управлений определим, при каких значениях диагональных коэффициентов возможен случай фазоманипулированных сигналов.

Для этого рассмотрим бидиагональную симметрическую матрицу **A** **n**-го порядка вида (1). Определим характеристическое уравнение матрицы **A**, которое в развернутом виде выглядит следующим образом:

$$\lambda^n - \sigma_1\lambda^{n-1} + \sigma_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\sigma_{n-1}\lambda + (-1)^n\sigma_n = 0 \qquad (2)$$

где σ_1-σ_n - диагональные миноры матрицы **A** с первого по **n** - й порядок.

Определим диагональные миноры $\sigma_1 - \sigma_n$

$$\sigma_1 = 0. \qquad (3)$$

$$\sigma_2 = a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32} - \ldots - a_{n-1,n}a_{n,n-1}. \qquad (4)$$

Поскольку у бидиагональной симметрической матрицы попарные элементы диагоналей равны между собой, т.е.

$$a_{12} = a_{21},\ a_{23}=a_{32},\ \ldots,\ a_{n-1,n} = a_{n,n-1}\ , \qquad (5)$$

то запишем (4) в виде:

$$\sigma_2 = -\left(a_{12}^2 + a_{23}^2 + \ldots + a_{n-1,n}^2\right) = -\sum_{\substack{i=1,n-1\\ j=i+1}} a_{ij}^2\ , \qquad (6)$$

$$\sigma_3 = 0,$$

$$\sigma_4 = a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + \ldots + a_{n-3,n-2}a_{n-2,n-3}a_{n-1,n}a_{n,n-1}\ . \qquad (7)$$

С учетом (5) выражение (7) примет вид

$$\sigma_4 = a_{12}^2a_{34}^2 + a_{23}^2a_{45}^2 + \ldots + a_{n-3,n-2}^2a_{n-1,n}^2 = \sum_{\substack{i=1,n-3\\ j=i+1}} a_{ij}^2a_{i+2,j+2}^2\ . \qquad (8)$$

$$\sigma_5 = 0. \qquad (9)$$

$$\sigma_6 = -a_{12}^2a_{34}^2a_{56}^2 - a_{23}^2a_{45}^2a_{67}^2 - \ldots - a_{n-6,n-5}^2a_{n-4,n-3}^2a_{n-2,n-1}^2 - $$
$$- a_{n-5,n-4}^2a_{n-3,n-2}^2a_{n-1,n}^2 = \sum_{\substack{i=1,n-5\\ j=i+1}} a_{ij}^2a_{i+2,j+2}^2a_{i+4,j+4}^2. \qquad (10)$$

Далее, **m**-й диагональный минор матрицы **A** (**m** < **n**) определится как:

$$\sigma_m = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \sum_{\substack{i=1,n-(m-i)\\ j=i+1}} a_{ij}^2a_{i+2,j+2}^2\cdots a_{i+(m-2),j+(m-2)}^2 \qquad (11)$$

$$\sigma_{n-1} = 0. \qquad (12)$$

$$\sigma_n = -a_{12}^2a_{34}^2a_{56}^2a_{78}^2\cdots a_{n-1,n}^2\ . \qquad (13)$$

С учетом (3) - (13) запишем характеристический полином матрицы **A** вида (2):

$$\lambda^n - \sum_{\substack{i=1,n-1\\ j=i+1}} a_{ij}^2 \lambda^{n-2} + \sum_{\substack{i=1,n-3\\ j=i+1}} a_{ij}^2 a_{i+2,j+2}^2 \lambda^{n-4} - \sum_{\substack{i=1,n-5\\ j=i+1}} a_{ij}^2 a_{i+2,j+2}^2 a_{i+4,j+4}^2 \lambda^{n-6} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{\frac{n-m}{2}} \sum_{\substack{i=1,n-(m-i)\\ j=i+1}} a_{ij}^2 a_{i+2,j+2}^2 \cdots a_{i+(m-2),j+(m-2)}^2 \lambda^{n-m} + \cdots \tag{14}$$

$$\cdots + (-1)^n a_{12}^2 a_{34}^2 a_{56}^2 a_{78}^2 \cdots a_{n-1,n}^2 = 0.$$

Как следует из уравнения (14), знаки при коэффициентах второй диагонали матрицы **A** не оказывают влияния на вид этого уравнения, а, следовательно, и на значения корней этого уравнения (собственные значения матрицы **A**), поскольку в уравнении (14) все коэффициенты второй диагонали возведены в квадрат.

Следовательно, корни уравнения (14) определяются только абсолютной величиной коэффициентов второй диагонали матрицы **A**.

Для отыскания собственных векторов матрицы **A** необходимо перейти к рассмотрению матрицы вида **A-λI** **n**-го порядка вида:

$$A - \lambda I = \begin{vmatrix} 0-\lambda & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0-\lambda & a_{23} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0-\lambda & a_{34} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0-\lambda & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n,n-1} & 0-\lambda \end{vmatrix} \tag{15}$$

Для определения собственных векторов матрицы **A**, запишем ее характеристическое уравнение в развернутом виде для собственного значения λ:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + a_{12} x_2 = 0; \\ a_{21} x_1 - \lambda x_2 + a_{23} x_3 = 0; \\ a_{32} x_2 - \lambda x_3 + a_{34} x_4 = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,n-2} x_{n-2} - \lambda x_{n-1} + a_{n-1,n} x_n = 0; \\ a_{n,n-1} x_{n-1} - \lambda x_n = 0. \end{cases} \tag{16}$$

В системе (16) одно уравнение можно отбросить и одну координату считать свободной. Отбросим последнее уравнение и свободной выберем координату $\mathbf{x_1}$.

Выразим координаты $\mathbf{x_2, x_3, \ldots, x_4}$ через $\mathbf{x_1}$ с учетом (5)

$$x_2 = \frac{\lambda}{a_{12}} x_1 . \qquad (17)$$

$$x_3 = -\frac{a_{21}x_1}{a_{23}} + \frac{\lambda x_2}{a_{23}} = -\frac{\lambda^2 - a_{12}^2}{a_{12}a_{23}} x_1 = \frac{\Delta_2}{a_{12}a_{23}} x_1 , \qquad (18)$$

где

$$\Delta_2 = \lambda^2 - a_{12}^2 \qquad (19)$$

минор, составленный из элементов первых двух строк и столбцов бидиагональной матрицы **A-λI**.

Далее,

$$x_4 = -\frac{a_{32}x_2}{a_{34}} + \frac{\lambda x_3}{a_{34}} = -\frac{a_{32}\lambda}{a_{12}a_{34}} x_1 + \frac{\lambda(\lambda - a_{12})}{a_{12}a_{23}a_{34}} x_1 . \qquad (20)$$

Запишем (20) с учетом (5)

$$x_4 = \frac{\lambda^3 - a_{32}\lambda^2 - a_{12}^2\lambda}{a_{12}a_{23}a_{34}} x_1 = -\frac{\Delta_3}{a_{12}a_{23}a_{34}} x_1 , \qquad (21)$$

где

$$\Delta_3 = -\lambda^3 + a_{32}\lambda^2 + a_{12}^2\lambda \qquad (22)$$

минор, составленный из элементов первых трех строк и столбцов матрицы **A-λI**.

Аналогично, значение **k**-й координаты собственного вектора

$$x_k = (-1)^{k-1} \frac{\Delta_{k-1}}{a_{12}a_{23}\cdots a_{k-1,k}} x_1 , \qquad (23)$$

где согласно [1]

$$\Delta_{k-1} = \lambda^{k-1} - \lambda^{k-3}\left(a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{34}^2 + \cdots + a_{k-2,k-1}^2\right) + \lambda^{k-5}\left(a_{12}^2 a_{34}^2 \cdots \right.$$
$$\left. \cdots a_{k-4,k-3}^2 a_{k-2,k-1}^2\right) + \cdots + \lambda\left(a_{12}^2 a_{34}^2 \cdots a_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}+2}^2 + \cdots + a_{23}^2 a_{45}^2 \cdots a_{k-2,k-1}^2 \right) \qquad (24)$$

минор, составленный из элементов первых **k-1** строк и столбцов матрицы **A-λI**.

Из соотношений (19), (22), (24) следует, что при постоянстве по абсолютной величине диагональных коэффициентов $\mathbf{a_{12}}$, $\mathbf{a_{23}}$ **...** $\mathbf{a_{k-1,k}}$ знаки этих коэффициентов не оказывают влияния на их общий вид. Поэтому при любых знаках этих коэффициентов значение $\mathbf{\Delta_2}$, $\mathbf{\Delta_3}$, **...** $\mathbf{\Delta_{k-1}}$ будет одно и то же.

Абсолютное значение знаменателя соотношений (17), (18), (21), (23) при любых знаках диагональных коэффициентов $\mathbf{a_{12}}$, $\mathbf{a_{23}}$ **...** $\mathbf{a_{k-1,k}}$ будет одним и тем же, поскольку модуль произведения равен произведению модулей. Из этого следует, что абсолютные значения координат собственных векторов действительной бидиагональной симметрической матрицы определяются абсолютной величиной диагональных коэффициентов этой матрицы.

Таким образом, обобщая вышеизложенное, можно сделать вывод, что при синтезе ансамблей ДОФМС, описываемых собственными векторами ДСМ, для сокращения числа переборов в пространстве, задачу синтеза целесообразно разбить на два этапа:

1) этап выбора значений коэффициентов ДСМ, задающих в пространстве совокупность собственных векторов с равными по абсолютной величине координатами и описывающими таким образом пространство ансамблей ДОФМС;

2) этап выбора знаков при коэффициентах ДСМ, обеспечивающих получение собственных векторов в выбранном на первом этапе пространстве ДОФМС, таких ансамблей, которые будут удовлетворять заданным требованиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попенко В.С. Векторный синтез ансамблей ортогональных сигналов. - Ставрополь: МО РФ, ч.1, 1992. – 129 с.
2. Попенко В.С., Жук А.П. Метод синтеза дискретных ортогональных сигналов на ЭВМ // Помехоустойчивость и эффективность систем связи и управления. - МО РФ 1991. - Вып.10. – 131 с.
3. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев.- М.: Наука, 1988. – 269 с.