УДК 621.39

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ КОМПРОМИССОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ

А.Н. Костенко
(представил д.т.н., проф. Л.И. Нефедов)

В данной статье изложены подходы к проблеме определения области компромиссов, которая является важной задачей при многокритериальной оценке проектных решений. Статья содержит описание двух методов определения области компромиссов, дается общая сравнительная характеристика подходов с точки зрения простоты и адекватности получаемых результатов.

Подход к выбору и формализации частных критериев, основанный на теории размытых множеств, имеет свои трудности, связанные с выбором вида функций полезности частных критериев [1, 2]. С учетом того, что функция полезности должна изменяться в пределах интервала [0, 1], указанная задача имеет много общего с нормированием частных критериев, т.е. с масштабированием их для приведения к безразмерному виду и единому интервалу изменения. Так как для нормирования необходимо знать интервал изменения критериев, то эта задача является связанной с выделением из допустимой области компромиссов. Такое выделение является необходимым шагом при реализации многокритериальных моделей оптимизации. Оно позволяет существенно уменьшить при необходимости область поиска за счет исключения из рассмотрения области согласия, на которой частные критерии оценки варианта рассматриваемого объекта или набора объектов могут быть улучшены без ухудшения качества по другим критериям. Очевидно, что область согласия не может содержать наилучший вариант в случае противоречивости критериев.

Определение области компромиссов $\mathbf{Q_c}$ (область Парето) заключается в выделении из множества допустимых решений $\mathbf{Q}$ подмножества, обладающего свойством, которое заключается в том, что каждое решение $\mathbf{q} \in \mathbf{Q_c}$, не может быть улучшено без ухудшения хотя бы одного из частных критериев. Так, если $\mathbf{(q_1,q_2)} \in \mathbf{Q_c}$, то в простейшем случае для двух критериев имеем:

$$\begin{cases} \mathbf{K_1(q_1) > K_1(q_2)} \\ \mathbf{K_2(q_1) < K_2(q_2)} \end{cases}, \tag{1}$$

либо наоборот.

Частные критерии $\mathbf{K_j}$ связаны с параметрами объектов проектирования

$$\mathbf{K_j = F_j (X)}\,, \tag{2}$$

где **X** – множество параметров объектов.

Это показывает, что для двух любых решений из $\mathbf{Q_c}$ имеет место противоречие хотя бы пары критериев и выбор возможен только на основе компромисса. Отсюда следует, что если частные критерии, характеризующие объект, находятся в строгом противоречии, то область компромиссов совпадает с допустимой областью и выделение ее теряет смысл.

Точное определение области компромиссов связано с серьезными вычислительными трудностями, которые растут с увеличением размерности задачи. При этом для определения единственного компромиссного решения выделение области компромиссов не обязательно, хотя с вычислительной точки зрения желательно. Необходимо лишь проверить выбранное решение на принадлежность этой области [2]. Исходя из указанных предпосылок, целесообразно в большинстве случаев определить область компромиссов приближенно. Условием корректности такой процедуры является требование о том, чтобы выделенная область $\mathbf{Q_p}$, принадлежащая области допустимых решений **Q**, включала в себя область компромиссов $\mathbf{Q_c}$, а не пересекалась с нею, т.е.

$$\mathbf{Q_c \subset Q_p \subset Q}\,, \tag{3}$$

и была проста в вычислении.

Решение данной задачи может быть осуществлено следующим образом [2]. В области допустимых решений **Q** проводится оптимизация по каждому из локальных критериев $\{\mathbf{K_1, K_2, \ldots, K_n}\}$, результаты которой формируют таблицу. Вид таблицы представлен в табл.1.

Таблица 1

K_m (j=1, 2, …,n)	K_1	K_2	. . .	K_n
K_1	$K_{11экстр}$	K_{12}	. . .	K_{1n}
K_2	K_{21}	$K_{22экстр}$	. . .	K_{2n}
. . . K_n	. . . K_{n1}	. . . K_{n2}	. . . .	. . . $K_{nnэкстр}$

В **j** - х строках таблицы записаны значения всех частных критериев в точке частного оптимума **j** - го частного критерия. Столбцы содержат наборы значений **j** - х частных критериев в точках оптимума по всем частным критериям. Экстремальные значения каждого критерия находятся на главной диагонали. Элементы **j** - го столбца показывают изменения значения **j** - го критерия от экстремального $\mathbf{K_{jэкстр}}$ до самого наихудшего значения $\mathbf{K_{jнх}}$. Этот интервал включает в себя точки экстремумов всех частных критериев. Значения $\mathbf{K_{j экстр}}$ и $\mathbf{K_{jнх}}$ $(\mathbf{j = 1,\ldots, n})$ являются границами отображения приближенной области компромиссов $\mathbf{Q_p}$ на пространство критериев $\overline{\mathbf{K}}$:

$$\mathbf{Q_p \to \overline{K}} \tag{4}$$

Приближенная область компромиссов $\overline{\mathbf{K_p}}$ включает в себя область компромиссов $\overline{\mathbf{K_c}}$, т.е.

$$\overline{\mathbf{K_c}} \subset \overline{\mathbf{K_p}} \tag{5}$$

так как для нее выполняется необходимое условие области компромиссов – включение глобальных экстремумов всех частных критериев. В общем случае область $\overline{\mathbf{K_p}}$ шире области Парето $\overline{\mathbf{K_c}}$, так как может включать в себя некоторые подмножества из области согласия. Поэтому компромиссные решения, выбранные из приближенной области, необходимо проверять на принадлежность области Парето. Данный недостаток не является определяющим, так как предложенный подход позволяет уменьшить область анализа на стадиях поиска компромиссного решения и проверки его на принадлежность к области Парето, а также упростить нормирование частных критериев.

Однако в ряде случаев проектирования технических объектов целесообразно для определения области компромиссов использовать метод на основе систематического просмотра многомерных областей, который позволяет более точно и адекватно оценить область компромиссов на основе исходных данных для решения задачи [3]. При использовании данного метода в качестве пробных точек в пространстве параметров используются точки равномерно распределенных последовательностей. Математически модель объекта зависит от параметров $\boldsymbol{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$, которые могут иметь размерную или безразмерную форму. Под пространством параметров будем понимать $\mathbf{n}$ - мерное пространство, состоящее из точек $\mathbf{A_p}$ с дискретными координатами $(\boldsymbol{\alpha_1, \ldots, \alpha_n})$. В пространстве параметров вводят параметрические, функциональные и качественные ограничения. Параметрические ограничения составляют выражения вида

$$\boldsymbol{\alpha_j^* \le \alpha_j \le \alpha_j^{**}}, \qquad \mathbf{j = \overline{1, n}}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\alpha_j^*}$, $\boldsymbol{\alpha_j^{**}}$ - соответственно нижние и верхние границы $\mathbf{j}$-го параметра.

Обозначим подобласть, определяемую в пространстве параметров совокупностью параметрических ограничений как $\mathbf{O_1}$.

Тогда можно сказать, что ограничения (6) выделяют в пространстве параметров область

$$\mathbf{П_p = \{A_p / O_1\}} \tag{7}$$

Функциональные ограничения в общем виде определяются выражениями вида

$$\mathbf{C_e^* \le f_e(A_p) \le C_e^{**}}, \qquad \mathbf{e = \overline{1,t}} \tag{8}$$

где $\mathbf{f_e(A_p)}$ – некоторые функции от параметров $\mathbf{A_p = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$, которые могут быть заданы явно, либо функциональные зависимости от интегральных кривых дифференциальных уравнений;

$\mathbf{C_e^*}$, $\mathbf{C_e^{**}}$ - соответственно нижние и верхние границы **e** - й функции.

Обозначим подобласть, определяемую в пространстве параметров совокупностью функциональных ограничений как $\mathbf{O_2}$. Предполагается, что $\mathbf{f_e(A_p)}$ непрерывны в пространстве параметров. Тогда обозначим область, принадлежащую $\mathbf{\Pi_p}$ и ограниченную $\mathbf{f_e(A_p)}$

$$\mathbf{G_p = \{A_p / O_1, O_2\}}. \tag{9}$$

Качественные ограничения или критерии качества представляют собой характеристики ТС, которые связаны с их качеством монотонной зависимостью

$$\mathbf{\Phi_1(A_p), \Phi_2(A_p), \ldots, \Phi_к(A_p)}. \tag{10}$$

Примем, что по условиям задачи $\mathbf{\Phi_\upsilon(A_p)}$ необходимо минимизировать, и они предполагаются непрерывными в области $\mathbf{\Pi_p}$. Тогда качественные критериальные ограничения запишем в форме

$$\mathbf{\Phi_\upsilon(A_p) \le \Phi_\upsilon^{**}}, \mathbf{\upsilon = \overline{1,K}} \tag{11}$$

где $\mathbf{\Phi_\upsilon^{**}}$ - граничное значение $\mathbf{\Phi_\upsilon(A_p)}$, как качественной характеристики.

Область пространства параметров, удовлетворяющая всем трем видам ограничений обозначим

$$\mathbf{D_p = \{A_p / O_1, O_2, O_3\}}, \tag{12}$$

где $\mathbf{O_3}$ - условное обозначение подобласти в пространстве параметров, определяемой совокупностью критериев качества.

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению точки $\mathbf{A_p^{opt}}$ в области $\boldsymbol{D}_p$, где $\mathbf{A_p^{opt}}$ -оптимальная совокупность параметров, характеризующих проектируемые объекты.

При определении процедуры выбора метода определения области компромиссного решения необходимо учитывать особенности проектной ситуации и предъявляемые к искомым оптимальным проектным решениям требования. Предложенная методика использована при разработке алгоритмов и инструментальных средств оптимизации параметрических рядов и выбора оптимальных количества и типов технических средств информационно-вычислительных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Э.Г. и др. Территориально-распределенные системы обслуживания. К.: Техніка, 1992. - 208 с.

2. Автоматизированные системы управления городским хозяйством. Кузьмин И.В. и др. К.: Будівельник, 1978. – 144 с.
3. Быков В.П. Методическое обеспечение САПР в машиностроении. Ленинград: Машиностроение, 1989. – 258 с.