УДК 623.021:005

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛЕЙ СОПЕРНИЧЕСТВА

к.т.н. В.Ю. Дубницкий
(представил д.т.н., проф. Е.А. Артеменко)

Получены в явном виде решения уравнений Ланчестера для случая ввода в действие подкреплений и учитывающие потери сторон, не связанные непосредственно с процессом соперничества.

Среди процессов протекающих при взаимодействии систем различной природы значительное место занимают процессы соперничества.

В том случае, когда соперничество происходит в форме активных действий сторон, соответствующие дифференциальные уравнения, моделирующие этот процесс, приведены в работах [1, 2, 3].

Основная модель имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\alpha(t)x - \lambda_2(t)y + S_x(t); \\ \dfrac{dy}{dt} = -\beta(t) - \lambda_1(t)x + S_y(t) \end{cases} \tag{1}$$

при начальных условиях:

$$x(0) = x_0; \qquad y(0)=y_0. \tag{2}$$

Принято, что $\mathbf{x(t)}$ - численность активных средств оперирующей стороны $\mathbf{X}$ в момент времени $\mathbf{t}$; $\mathbf{y(t)}$ - то же противоборствующей стороны $\mathbf{Y}$. Коэффициенты $\alpha(t)$, $\beta(t)$ - характеризуют величину безвозвратных потерь стороны $\mathbf{X}$ (стороны $\mathbf{Y}$) в единицу времени, не связанных непосредственно с активными действиями сторон; $\lambda_1(t)$ - эффективность действия выведения из строя стороной $\mathbf{X}$ активных средств стороны $\mathbf{Y}$ в единицу времени; $\lambda_2(t)$ - то же для стороны $\mathbf{Y}$ по отношению к стороне $\mathbf{X}$; $S_x(t)$, $S_y(t)$ - резервы соответствующих сторон, вводимые в действие сторонами во время $\mathbf{t}$. По смыслу задачи следует, что $\alpha \geq 0$; $\beta \geq 0$; $S_x(t) > 0$; $S_y(t) \geq 0$; $x_0 > 0$; $y_0 > 0$.

Если при $x(t_1) = 0$ $y(t_2) = 0$ величина $t_1 < t_2$, то победителем принимают сторону $\mathbf{Y}$, а при $t_1 = t_2$ победитель в соперничестве сторон отсутствует.

Приведенные в упомянутых выше работах варианты исследования системы (1) при начальных условиях (2) можно сгруппировать так.

При условии $\lambda_1(t) = \lambda_1$, $\lambda_2(t) = \lambda_2$, $\alpha(t) = \beta(t) = S_x(t) = S_y(t) = 0$ получены явные зависимости вида:

$$x(t) = \varphi(x_0, y_0, \lambda_1, \lambda_2, t);$$

$$y(t) = \psi(x_0, y_0, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, t).$$

Они позволяют проследить изменение динамики численности сторон **X**, **Y**, и, таким образом, определить победителя. Для этих же условий получено соотношение, позволяющее определить победителя в соперничестве сторон без указания времени осуществления этого события ("закон квадратов").

Аналогичное условие получено для случая $S_x(t) = 0$, $S_y(t) = 0$, $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$.

В настоящем сообщении получены явные решения системы (1), (2) для некоторых важных частных случаев.

Представим систему (1) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\lambda_2 y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -\lambda_1 x. \end{cases} \tag{3}$$

при начальных условиях (2). Ее решение, как известно, имеет вид:

$$x(t) = x_0 ch(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t) - y_0 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} sh(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t); \tag{4}$$

$$y(t) = y_0 ch(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t) - x_0 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} sh(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t). \tag{5}$$

Рассмотрим уравнения (4) и (5) с позиции оперирующей стороны **X**.

Пусть:

$$\lambda_2 = k\lambda_1; \; y_0 = ux_0, \; k > 0; u > 0. \tag{6}$$

Примем, что:

$$\tilde{x}(t) = \frac{x(t)}{x_0}; \; \tilde{y}(t) = \frac{y(t)}{x_0}. \tag{7}$$

Тогда:

$$\tilde{x}(t) = ch(\lambda_1 \sqrt{k} \cdot t) - u\sqrt{k} \cdot sh(\lambda_1 \sqrt{k} \cdot t); \tag{8}$$

$$\tilde{y}(t) = u ch(\lambda_1 \sqrt{k} \cdot t) - \sqrt{\frac{1}{k}} sh(\lambda_1 \sqrt{k} \cdot t). \tag{9}$$

Полученные выражения позволяют исследовать изменение во времени численности соперничающих сторон в относительном виде, где за единицу масштаба принята численность стороны **X** в момент начала соперничества – величина x_0.

В том случае, когда сторона **X** начинает свои действия неожиданно для стороны **Y** в решение системы (1) вносят следующие изменения.

Принимают, что

$$\lambda_2 = \begin{cases} 0, & t < \tau; \\ \lambda_2, & t \geq \tau \end{cases} \tag{10}$$

или

$$\lambda_2 = \lambda_2 \cdot 1(t - \tau). \tag{11}$$

Тогда вместо y_0 принимают

$$y_0^{(\tau)} = y_0 - \lambda_1 x_0 \tau. \tag{12}$$

Далее решение системы (1) получают по формулам (8) и (9), но вместо y_0 используют величину $y_0^{(\tau)}$. В дальнейшем этот случай не рассматривается, так как в решение системы принципиальных изменений не вносится.

Рассмотрим важный частный случай, когда $\alpha(t) \equiv \beta(t) \equiv 0$, $S_x(t) > 0,\ S_y(t) > 0$, т. е. стороны **X** и **Y** получают подкрепление в процессе соперничества.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\lambda_2(t)y + S_x(t); \\ \dfrac{dy}{dt} = -\lambda_1(t)x + S_y(t), \end{cases} \tag{13}$$

при начальных условиях (2).

Примем, что

$$S_x(t) = S_x \cdot 1(t - \tau_1);\ S_y(t) = S_y \cdot 1(t - \tau_2).$$

Тогда систему (12) с учетом (2) запишем так:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\lambda_2(t)y + S_x \cdot 1(t - \tau_1); \\ \dfrac{dy}{dt} = -\lambda_1(t)x + S_y \cdot 1(t - \tau_2). \end{cases} \tag{14}$$

Используя аппарат преобразования Лапласа [4], получим вместо условия (14) систему уравнений

$$\begin{cases} p\cdot X(p)-x_0=-\lambda_2 Y(p)+\dfrac{S_x}{p}e^{-p\cdot\tau_1}; \\ p\cdot Y(p)-y_0=-\lambda_1 X(p)+\dfrac{S_y}{p}e^{-p\cdot\tau_2}. \end{cases} \tag{15}$$

Откуда следует, что

$$X(p)=\frac{px_0}{p^2-\lambda_1\lambda_2}+\frac{S_x e^{-p\tau_1}}{p^2-\lambda_1\lambda_2}-\frac{y_0\lambda_2}{p^2-\lambda_1\lambda_2}-\frac{S_y\lambda_2 e^{-p\tau_2}}{p(p^2-\lambda_1\lambda_2)}. \tag{16}$$

В выражении (16) оригиналы, соответствующие первым трем слагаемым, приведены в [4], четвертому слагаемому - в [5, стр.264].

Аналогичное выражение может быть получено для $\mathbf{Y(p)}$:

$$Y(p)=\frac{py_0}{p^2-\lambda_1\lambda_2}+\frac{S_y e^{-p\tau_3}}{p^2-\lambda_1\lambda_2}-\frac{x_0\lambda_1}{p^2-\lambda_1\lambda_2}-\frac{S_x\lambda_1 e^{-p\tau_1}}{p\left(p^2-\lambda_1\lambda_2\right)}. \tag{17}$$

Решением системы (14) с начальным условием (2) относительно $\mathbf{x(t)}$ будет:

$$\begin{aligned} x(t)=&\left[x_0 ch(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\cdot t)+\frac{S_x}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}sh(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\cdot t)\cdot 1(t-\tau_1)\right]- \\ &-\left[y_0\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\cdot sh\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\cdot t+\frac{S_y}{\lambda_1}ch(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\cdot t-1)\cdot 1(t-\tau_2))\right]; \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} y(t)=&\left[y_0 ch(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\cdot t)+\frac{S_y}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}sh(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\cdot t)\cdot 1(t-\tau_2)\right]- \\ &-\left[x_0\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\cdot sh(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\cdot t)+\frac{S_x}{\lambda_2}ch(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\cdot t-1)\cdot 1(t-\tau_1)\right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Сравнивая пары (18), (4) и (19), (5) и принимая, что $\overline{X}_4(t)$ есть решение вида (4), а $\overline{Y}_5(t)$ - решение вида (5), получим

$$\begin{aligned} x(t)=&\left[\overline{X}_4(t)+\frac{S_x}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}sh(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\cdot t)\cdot 1(t-\tau_1)\right]- \\ &-\left[\frac{S_y}{\lambda_1}ch(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\cdot t-1)\cdot 1(t-\tau_2)\right]. \end{aligned}$$

Аналогично для $\mathbf{y(t)}$ имеем

$$\mathbf{y(t)=\left[\overline{Y}_5(t)+\frac{S_y}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}sh(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\cdot t)\cdot 1(t-\tau_2)\right]-}$$
$$\mathbf{-\left[\frac{S_x}{\lambda_2}ch(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\cdot t-1)\cdot 1(t-\tau_1)\right].} \tag{21}$$

В относительных единицах, кратных $\mathbf{x_0}$, условия (20) и (21) примут вид:

$$\mathbf{\tilde{x}(t)=\left[\tilde{\overline{X}}(t)+\frac{\tilde{S}_x}{\lambda_1\sqrt{k}}sh(\lambda_1\sqrt{k}\cdot t)\cdot 1(t-\tau_1)\right]-}$$
$$\mathbf{-\left[\frac{\tilde{S}_y}{\lambda_1}ch(\lambda_1(\sqrt{k}\cdot t-1))\cdot 1(t-\tau_2)\right];} \tag{22}$$

$$\mathbf{\tilde{y}(t)=\left[\tilde{\overline{Y}}(t)+\frac{\tilde{S}_y}{\lambda_1\sqrt{k}}sh(\lambda_1\sqrt{k}\cdot t)\cdot 1(t-\tau_1)\right]-}$$
$$\mathbf{-\left[\frac{\tilde{S}_x}{\lambda_2}ch(\lambda_1(\sqrt{k}\cdot t-1))\cdot 1(t-\tau_2)\right].} \tag{23}$$

В том случае, когда подкрепление получает только сторона **X** (сторона **Y**), приравнивая нулю соответствующие значения $\mathbf{S_y(S_x)}$, получим выражения аналогичные (19) - (22). Например, в случае $\mathbf{S_y=0}$ имеем:

$$\mathbf{x(t)=\overline{X}(t)+\frac{S_x}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}sh(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\cdot t)\cdot 1(t-\tau_1);} \tag{24}$$

$$\mathbf{y(t)=\overline{Y}(t)-\frac{S_x}{\lambda_2}ch(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\cdot t-1)\cdot 1(t-\tau_1).} \tag{25}$$

Рассмотрим еще один важный частный случай: $\mathbf{S_x(t)=S_y(t)=0;\ \alpha>0;\ \beta>0}$, для которого:

$$\begin{cases}\mathbf{\dfrac{dx}{dt}=-\alpha x-\lambda_2 y;}\\ \mathbf{\dfrac{dy}{dt}=-\beta y-\lambda_1 x,}\end{cases} \tag{26}$$

при начальных условиях (2).

Используя преобразования Лапласа, представим (25) в виде:

$$\begin{cases}\mathbf{(p+\alpha)X(p)+\lambda_2 Y(p)=x_0;}\\ \mathbf{\lambda_1 X(p)+(p+\beta)Y(p)=y_0.}\end{cases} \tag{27}$$

Откуда следует, что

$$X(p)=\frac{x_0p+x_0\beta-y_0\lambda_2}{(p+\alpha)(p+\beta)-\lambda_1\lambda_2}. \quad (28)$$

Воспользовавшись тем, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ по смыслу задачи, знаменатель в (28) представим в виде

$$\left(p+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\frac{4\lambda_1\lambda_2+(\alpha-\beta)^2}{4}.$$

Обозначив

$$x_0\beta - y_0\lambda_2 = \mu_x \quad (29)$$

и

$$\frac{4\lambda_1\lambda_2+(\alpha-\beta)^2}{4}=z^2, \quad (30)$$

а также используя [6], получим, что

$$x(t)=x_0\exp\left(-\frac{\alpha+\beta}{2}t\right)ch(zt)+\frac{1}{z}\left(\mu_x-\frac{\alpha+\beta}{2}x_0\right)\exp\left(-\frac{\alpha+\beta}{2}t\right)sh(zt). \quad (31)$$

Приняв, что

$$\beta x_0 - y_0\lambda_2 = \mu_y, \quad (32)$$

получим

$$y(t)=y_0\exp\left(-\frac{\alpha+\beta}{2}t\right)ch(zt)+\frac{1}{z}\left(\mu_y-\frac{\alpha+\beta}{2}x_0\right)\exp\left(-\frac{\alpha+\beta}{2}t\right)sh(zt). \quad (33)$$

Приведенные в настоящем сообщении решения расширяют возможности качественного анализа результатов моделирования двухстороннего соперничества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: – Сов. радио, 1972. – 552 с.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. – М.: – Наука, 1997. – 320 с.
3. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: – Наука, 1987. – 157 с.
4. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 520 с.
5. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1965. – 288 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований Т.1. – М.: Наука, 1969. – 343 с.