

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛЕЙ СОПЕРНИЧЕСТВА

к.т.н. В.Ю. Дубницкий
(представил д.т.н., проф. Е.А. Артеменко)

Получены в явном виде решения уравнений Ланчестера для случая ввода в действие подкреплений и учитывающие потери сторон, не связанные непосредственно с процессом соперничества.

Среди процессов протекающих при взаимодействии систем различной природы значительное место занимают процессы соперничества.

В том случае, когда соперничество происходит в форме активных действий сторон, соответствующие дифференциальные уравнения, моделирующие этот процесс, приведены в работах [1, 2, 3].

Основная модель имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha(t)x - \lambda_2(t)y + S_x(t); \\ \frac{dy}{dt} = -\beta(t)y - \lambda_1(t)x + S_y(t) \end{cases} \quad (1)$$

при начальных условиях:

$$x(0) = x_0; \quad y(0) = y_0. \quad (2)$$

Принято, что $x(t)$ - численность активных средств оперирующей стороны X в момент времени t ; $y(t)$ - то же противоборствующей стороны Y . Коэффициенты $\alpha(t)$, $\beta(t)$ - характеризуют величину безвозвратных потерь стороны X (стороны Y) в единицу времени, не связанных непосредственно с активными действиями сторон; $\lambda_1(t)$ - эффективность действия выведения из строя стороной X активных средств стороны Y в единицу времени; $\lambda_2(t)$ - то же для стороны Y по отношению к стороне X ; $S_x(t)$, $S_y(t)$ - резервы соответствующих сторон, вводимые в действие сторонами во время t . По смыслу задачи следует, что $\alpha \geq 0$; $\beta \geq 0$; $S_x(t) > 0$; $S_y(t) \geq 0$; $x_0 > 0$; $y_0 > 0$.

Если при $x(t_1) = 0$ $y(t_2) = 0$ величина $t_1 < t_2$, то победителем принимают сторону Y , а при $t_1 = t_2$ победитель в соперничестве сторон отсутствует.

Приведенные в упомянутых выше работах варианты исследования системы (1) при начальных условиях (2) можно сгруппировать так.

При условии $\lambda_1(t) = \lambda_1$, $\lambda_2(t) = \lambda_2$, $\alpha(t) = \beta(t) = S_x(t) = S_y(t) = 0$ получены явные зависимости вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(x_0, y_0, \lambda_1, \lambda_2, t); \\ \mathbf{y}(t) &= \Psi(x_0, y_0, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, t). \end{aligned}$$

Они позволяют проследить изменение динамики численности сторон \mathbf{X} , \mathbf{Y} , и, таким образом, определить победителя. Для этих же условий получено соотношение, позволяющее определить победителя в соперничестве сторон без указания времени осуществления этого события ("закон квадратов").

Аналогичное условие получено для случая $S_x(t) = 0$, $S_y(t) = 0$, $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$.

В настоящем сообщении получены явные решения системы (1), (2) для некоторых важных частных случаев.

Представим систему (1) в виде

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda_2 y; \\ \frac{dy}{dt} = -\lambda_1 x. \end{cases} \quad (3)$$

при начальных условиях (2). Ее решение, как известно, имеет вид:

$$\mathbf{x}(t) = x_0 \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t) - y_0 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t); \quad (4)$$

$$\mathbf{y}(t) = y_0 \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t) - x_0 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t). \quad (5)$$

Рассмотрим уравнения (4) и (5) с позиции оперирующей стороны \mathbf{X} .

Пусть:

$$\lambda_2 = k\lambda_1; \quad y_0 = ux_0, \quad k > 0; u > 0. \quad (6)$$

Примем, что:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathbf{x}(t)}{x_0}; \quad \tilde{\mathbf{y}}(t) = \frac{\mathbf{y}(t)}{x_0}. \quad (7)$$

Тогда:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \operatorname{ch}(\lambda_1 \sqrt{k} \cdot t) - u\sqrt{k} \cdot \operatorname{sh}(\lambda_1 \sqrt{k} \cdot t); \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = u \operatorname{ch}(\lambda_1 \sqrt{k} \cdot t) - \sqrt{\frac{1}{k}} \operatorname{sh}(\lambda_1 \sqrt{k} \cdot t). \quad (9)$$

Полученные выражения позволяют исследовать изменение во времени численности соперничающих сторон в относительном виде, где за

единицу масштаба принята численность стороны X в момент начала соперничества – величина x_0 .

В том случае, когда сторона X начинает свои действия неожиданно для стороны Y в решение системы (1) вносят следующие изменения.

Принимают, что

$$\lambda_2 = \begin{cases} 0, & t < \tau; \\ \lambda_2, & t \geq \tau \end{cases} \quad (10)$$

или

$$\lambda_2 = \lambda_2 \cdot \mathbf{1}(t - \tau). \quad (11)$$

Тогда вместо y_0 принимают

$$y_0^{(\tau)} = y_0 - \lambda_1 x_0 \tau. \quad (12)$$

Далее решение системы (1) получают по формулам (8) и (9), но вместо y_0 используют величину $y_0^{(\tau)}$. В дальнейшем этот случай не рассматривается, так как в решение системы принципиальных изменений не вносится.

Рассмотрим важный частный случай, когда $\alpha(t) \equiv \beta(t) \equiv 0$, $S_x(t) > 0$, $S_y(t) > 0$, т. е. стороны X и Y получают подкрепление в процессе соперничества.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda_2(t)y + S_x(t); \\ \frac{dy}{dt} = -\lambda_1(t)x + S_y(t), \end{cases} \quad (13)$$

при начальных условиях (2).

Примем, что

$$S_x(t) = S_x \cdot \mathbf{1}(t - \tau_1); \quad S_y(t) = S_y \cdot \mathbf{1}(t - \tau_2).$$

Тогда систему (12) с учетом (2) запишем так:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda_2(t)y + S_x \cdot \mathbf{1}(t - \tau_1); \\ \frac{dy}{dt} = -\lambda_1(t)x + S_y \cdot \mathbf{1}(t - \tau_2). \end{cases} \quad (14)$$

Используя аппарат преобразования Лапласа [4], получим вместо условия (14) систему уравнений

$$\begin{cases} p \cdot X(p) - x_0 = -\lambda_2 Y(p) + \frac{S_x}{p} e^{-p \cdot \tau_1}; \\ p \cdot Y(p) - y_0 = -\lambda_1 X(p) + \frac{S_y}{p} e^{-p \cdot \tau_2}. \end{cases} \quad (15)$$

Откуда следует, что

$$X(p) = \frac{px_0}{p^2 - \lambda_1 \lambda_2} + \frac{S_x e^{-p \tau_1}}{p^2 - \lambda_1 \lambda_2} - \frac{y_0 \lambda_2}{p^2 - \lambda_1 \lambda_2} - \frac{S_y \lambda_2 e^{-p \tau_2}}{p(p^2 - \lambda_1 \lambda_2)}. \quad (16)$$

В выражении (16) оригиналы, соответствующие первым трем слагаемым, приведены в [4], четвертому слагаемому - в [5, стр.264].

Аналогичное выражение может быть получено для $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{py_0}{p^2 - \lambda_1 \lambda_2} + \frac{S_y e^{-p \tau_2}}{p^2 - \lambda_1 \lambda_2} - \frac{x_0 \lambda_1}{p^2 - \lambda_1 \lambda_2} - \frac{S_x \lambda_1 e^{-p \tau_1}}{p(p^2 - \lambda_1 \lambda_2)}. \quad (17)$$

Решением системы (14) с начальным условием (2) относительно $x(t)$ будет:

$$\begin{aligned} x(t) = & \left[x_0 \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t) + \frac{S_x}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t) \cdot \mathbf{1}(t - \tau_1) \right] - \\ & - \left[y_0 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t + \frac{S_y}{\lambda_1} \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t - 1) \cdot \mathbf{1}(t - \tau_2) \right]; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} y(t) = & \left[y_0 \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t) + \frac{S_y}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t) \cdot \mathbf{1}(t - \tau_2) \right] - \\ & - \left[x_0 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t) + \frac{S_x}{\lambda_2} \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t - 1) \cdot \mathbf{1}(t - \tau_1) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Сравнивая пары (18), (4) и (19), (5) и принимая, что $\bar{X}_4(t)$ есть решение вида (4), а $\bar{Y}_5(t)$ - решение вида (5), получим

$$\begin{aligned} x(t) = & \left[\bar{X}_4(t) + \frac{S_x}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t) \cdot \mathbf{1}(t - \tau_1) \right] - \\ & - \left[\frac{S_y}{\lambda_1} \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t - 1) \cdot \mathbf{1}(t - \tau_2) \right]. \end{aligned}$$

Аналогично для $y(t)$ имеем

$$y(t) = \left[\bar{Y}_5(t) + \frac{S_y}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t) \cdot \mathbf{1}(t - \tau_2) \right] - \left[\frac{S_x}{\lambda_2} \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t - 1) \cdot \mathbf{1}(t - \tau_1) \right]. \quad (21)$$

В относительных единицах, кратных x_0 , условия (20) и (21) примут вид:

$$\tilde{x}(t) = \left[\tilde{\bar{X}}(t) + \frac{\tilde{S}_x}{\lambda_1 \sqrt{k}} \operatorname{sh}(\lambda_1 \sqrt{k} \cdot t) \cdot \mathbf{1}(t - \tau_1) \right] - \left[\frac{\tilde{S}_y}{\lambda_1} \operatorname{ch}(\lambda_1 (\sqrt{k} \cdot t - 1)) \cdot \mathbf{1}(t - \tau_2) \right]; \quad (22)$$

$$\tilde{y}(t) = \left[\tilde{\bar{Y}}(t) + \frac{\tilde{S}_y}{\lambda_1 \sqrt{k}} \operatorname{sh}(\lambda_1 \sqrt{k} \cdot t) \cdot \mathbf{1}(t - \tau_1) \right] - \left[\frac{\tilde{S}_x}{\lambda_2} \operatorname{ch}(\lambda_1 (\sqrt{k} \cdot t - 1)) \cdot \mathbf{1}(t - \tau_2) \right]. \quad (23)$$

В том случае, когда подкрепление получает только сторона X (сторона Y), приравнивая нулю соответствующие значения $S_y(S_x)$, получим выражения аналогичные (19) - (22). Например, в случае $S_y = 0$ имеем:

$$x(t) = \bar{X}(t) + \frac{S_x}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t) \cdot \mathbf{1}(t - \tau_1); \quad (24)$$

$$y(t) = \bar{Y}(t) - \frac{S_x}{\lambda_2} \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot t - 1) \cdot \mathbf{1}(t - \tau_1). \quad (25)$$

Рассмотрим еще один важный частный случай: $S_x(t) = S_y(t) = 0$; $\alpha > 0$; $\beta > 0$, для которого:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha x - \lambda_2 y; \\ \frac{dy}{dt} = -\beta y - \lambda_1 x, \end{cases} \quad (26)$$

при начальных условиях (2).

Используя преобразования Лапласа, представим (25) в виде:

$$\begin{cases} (p + \alpha)X(p) + \lambda_2 Y(p) = x_0; \\ \lambda_1 X(p) + (p + \beta)Y(p) = y_0. \end{cases} \quad (27)$$

Откуда следует, что

$$X(p) = \frac{x_0 p + x_0 \beta - y_0 \lambda_2}{(p + \alpha)(p + \beta) - \lambda_1 \lambda_2}. \quad (28)$$

Воспользовавшись тем, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ по смыслу задачи, знаменатель в (28) представим в виде

$$\left(p + \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 - \frac{4\lambda_1 \lambda_2 + (\alpha - \beta)^2}{4}.$$

Обозначив

$$x_0 \beta - y_0 \lambda_2 = \mu_x \quad (29)$$

и

$$\frac{4\lambda_1 \lambda_2 + (\alpha - \beta)^2}{4} = z^2, \quad (30)$$

а также используя [6], получим, что

$$x(t) = x_0 \exp\left(-\frac{\alpha + \beta}{2} t\right) \text{ch}(zt) + \frac{1}{z} \left(\mu_x - \frac{\alpha + \beta}{2} x_0\right) \exp\left(-\frac{\alpha + \beta}{2} t\right) \text{sh}(zt). \quad (31)$$

Приняв, что

$$\beta x_0 - y_0 \lambda_2 = \mu_y, \quad (32)$$

получим

$$y(t) = y_0 \exp\left(-\frac{\alpha + \beta}{2} t\right) \text{ch}(zt) + \frac{1}{z} \left(\mu_y - \frac{\alpha + \beta}{2} x_0\right) \exp\left(-\frac{\alpha + \beta}{2} t\right) \text{sh}(zt). \quad (33)$$

Приведенные в настоящем сообщении решения расширяют возможности качественного анализа результатов моделирования двухстороннего соперничества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: - Сов. радио, 1972. - 552 с.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. - М.: - Наука, 1997. - 320 с.
3. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. - М.: - Наука, 1987. - 157 с.
4. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. - М.: Физматгиз, 1961. - 520 с.
5. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. - М.: Наука, 1965. - 288 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований Т.1. - М.: Наука, 1969. - 343 с.