УДК 389.2

СПОСОБ ИЗМЕРЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ ФАЗОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ МЕР ЧАСТОТЫ

к.ф.м.-н. Ю.И. Евдокименко
(представил д.т.н., проф. Э.Н. Хомяков)

В работе рассмотрен один из косвенных способов измерения спектральной плотности мощности фазовых флуктуаций (СПМФФ) мер частоты, основанный на обращении интегрального уравнения Фредгольма первого рода, связывающего между собой дисперсию и энергетический спектр шума меры частоты.

Энергетический спектр $\mathbf{S_y(f)}$ и дисперсия $\mathbf{D(\tau)}$ относительных частотных флуктуаций мер частоты, измеренных на интервале измерения τ, связаны межу собой посредством интегрального уравнения Фредгольма первого рода [1]

$$\mathbf{D(\tau) = \int_0^{\infty} \left| H(f,\tau) \right|^2 S_y(f) df}, \qquad 1)$$

где $\mathbf{H(f,\tau)}$ - частотная характеристика соответствующей оценки $\mathbf{D(\tau)}$.

При выборе ядра $\mathbf{|H(f,\tau)|^2}$ в виде импульсной функции Дирака: $\mathbf{|H(f,\tau)|^2 = k\delta(f - r/\tau)}$ связь между показателями нестабильности частоты во временной и частотной областях имеет вид

$$\mathbf{D_y(\tau) = \int_0^{\infty} k\delta(f - r/\tau) S_y(f) df = kS_y(r/\tau)}. \qquad (2)$$

В этом случае косвенный метод измерения по сути преобразуется в прямой метод измерения СПМФФ с помощью селективного микровольтметра с квадратичным детектором на выходе, поскольку его частотная характеристика также эквивалентна δ-функции.

Частотную характеристику с узкой главной полосой синтезированного фильтра имеет взвешенная биномиальными коэффициентами дисперсия Адамара, которой соответствует следующая процедура обработки последовательно измеренных на интервале τ средних значений относительных частотных флуктуаций $\mathbf{\overline{y}_i}$:

$$\left\langle \mathbf{D}_{\mathbf{N},\bar{\mathbf{y}}}(\mathbf{T},\tau)\right\rangle = \left\langle \left(\mathbf{C}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{0}}\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{0}} - \mathbf{C}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{1}}\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{1}} + \mathbf{C}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{2}}\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{2}} - \ldots - \mathbf{C}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{N}}\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{N}}\right)^{2}\right\rangle, \qquad (3)$$

где **T** – интервал времени между началами двух соседних измерений величины $\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{i}}$;

N – количество измерений в одной выборке;

$\mathbf{C_N}^{\mathbf{k}}$ **= (N!)/(k!(N-k)!)** – биномиальные коэффициенты.

Частотная характеристика взвешенной дисперсии Адамара определяется выражением

$$\left|\mathbf{H}_{\mathbf{H},\mathbf{N}}(\mathbf{f},\tau,\mathbf{T})\right|^{2} = \mathbf{2}^{\mathbf{2N}}\sin^{\mathbf{2N}}(\pi\mathbf{fT})\left[\frac{\sin(\pi\mathbf{fT})}{\pi\mathbf{fT}}\right]^{2} \qquad (4)$$

и при $\mathbf{N}\to\infty$ стремится по форме к бесконечной сумме сдвинутых по частоте одна относительно другой δ - функций.

При $\tau=\mathbf{T}$ с учетом связи $\mathbf{S}_{\varphi}(\mathbf{F})=(\mathbf{f_0}/\mathbf{F})^2\mathbf{S}_{\mathbf{y}}(\mathbf{F})$ уравнение (1) будет иметь следующий вид:

$$\int_{0}^{\infty}\left[\sin(\pi\mathbf{F}\tau)\right]^{2(\mathbf{N}+1)}\mathbf{S}_{\varphi}(\mathbf{F})\mathbf{dF} = \frac{(\pi\tau\mathbf{f_0})^{2}}{\mathbf{2}^{\mathbf{2N+1}}}\mathbf{D}_{\mathbf{H},\mathbf{N}}(\tau). \qquad (5)$$

Ядро интегрального уравнения (5) тождественно равно нулю в точках $\mathbf{F}=\mathbf{k}/\tau$. Если предположить, что внутри частотных интервалов $\Delta\mathbf{F_k}=[(2\mathbf{k}+1)/(2\tau)-\varepsilon,\ (2\mathbf{k}+1)/(2\tau)+\varepsilon]$ функция $\mathbf{S}_{\varphi}(\mathbf{F})$ является неизменной или слабо меняющейся, то уравнение (5) может быть преобразовано к виду

$$\sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty}\mathbf{S}_{\varphi}(\mathbf{F_k})\int_{\mathbf{k}/\tau}^{(\mathbf{k}+1)/\tau}\left[\sin(\pi\mathbf{F}\tau)\right]^{2(\mathbf{N}+1)}\mathbf{dF} = \frac{(\tau\mathbf{f_0})^{2}}{\mathbf{2}^{\mathbf{2N+3}}}\mathbf{D}_{\mathbf{H},\mathbf{N}}(\tau), \qquad (6)$$

где $\mathbf{F_k}=(2\mathbf{k}+1)/(2\tau)$, а интеграл имеет аналитическое значение.

Определимся относительно количества значимых членов ряда в левой части уравнения (6). С одной стороны, как известно [1], функция $\mathbf{S}_{\varphi}(\mathbf{f})$ из-за наличия белых фазовых шумов меры остается постоянной и не равной нулю при $\mathbf{f}\to\infty$. Поэтому все члены ряда являются значимыми. Однако, измерение величины $\mathbf{D}_{\mathbf{H},\mathbf{N}}(\tau)$ производится реальными средствами измерительной техники, среди которых все без исключения имеют конечную полосу пропускания частот. Поэтому исходное уравнение (1) и, соответственно, уравнение (6) являются физически некорректными. Корректным будет вычисление интеграла в уравнении (1) в полосе пропускания частот средств измерительной техники, используемой при измерениях относительной разности частот $\bar{\mathbf{y}}$.

Наименьшей полосой пропускания из средств измерительной техники, используемых при измерениях частотных флуктуаций мер, обладают частотные компараторы типа Ч7-12 и Ч7-39, для которых частота среза $\mathbf{f_{гр}}$ находится в диапазоне 1 кГц. В этом случае верхний предел интеграла в уравнении (1) будут иметь значение $\mathbf{f_{гр}}$. Непосредственно из сказанного следует, что в левой части уравнения (6) значимыми будут только первые **M** членов ряда. При этом число **M** определяется из условия $\mathbf{M = entier[(\tau f_{гр}+1)/2]}$, т.е. имеем

$$\sum_{k=0}^{M} S_{\varphi}\left(\frac{2k+1}{\tau}\right) = \frac{\tau^3 (f_0)^2 [(N+1)!]^2}{2 \cdot (2N+2)!} D_{H,N}(\tau). \tag{7}$$

Таким образом, уравнение (1) сведено к линейному алгебраическому уравнению с **M** неизвестными и параметром τ, вариация которого определенным способом может позволить преобразовать уравнение (7) в совместную систему алгебраических уравнений относительно **M** неизвестных $S_{\varphi}(F_k)$.

Если выбрать $\tau_{max} = \Theta/N$ и $\Theta = (2M+1)/(N\ f_{гр})$, где Θ - общее время наблюдения частотных флуктуаций исследуемой меры, то реализуя измерения дисперсии Адамара при значениях параметра

$$\tau = \tau_n = \frac{\tau_{max}}{2n+1} \quad \text{при} \quad n \in [0, M], \tag{8}$$

получим систему линейных алгебраических уравнений относительно **M** значений СПМФФ $S_{\varphi}(f_k)$ на частотах $f_k=(2k+1)/\tau_{max}$. Таким образом, в результате проведенных преобразований решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода (1) свелось к решению системы линейно независимых алгебраических уравнений, которая в общем виде может быть представлена следующим образом:

$$A \cdot S_{\varphi} = B, \tag{9}$$

где S_{φ} - вектор размерностью **(M+1)** искомых значений СПМФФ в **M+1** узлах сетки частот $F_k = (2k+1)/\tau_{max}$, $k \in [0,M]$;

A - матрица размерностью **(M+1)*(M+1)**, элементы $a_{i,j}$ которой могут принимать значения **0** или **1** (при этом все элементы главной диагонали равны **1**, все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны **0**, а единичные элементы, расположенные выше главной диагонали, прорежены нулями);

B – вектор размерностью **(M+1)**, элемент b_i которого определяется по результатам измерений $D_{H,N}(\tau_i)$ и задается выражением

$$\mathbf{b_i} = \left(\frac{\tau_i^3 (f_0)^2 [(N+1)!]^2}{2 \cdot (2N+2)!} D_{H,N}(\tau_i) \right). \qquad (10)$$

Матрица **A** коэффициентов уравнения (10) является верхнетреугольной матрицей с элементами главной диагонали, равными единице. Детерминант такой матрицы всегда равен 1. Поэтому существует и притом единственное решение уравнения (9)

$$\mathbf{S_\varphi = A^{-1}B} \ . \qquad (11)$$

При представлении решения системы уравнений (9) в форме (11) при неточно заданных значениях элементов вектора **B** (полученных экспериментально с некоторой погрешностью измерений) ставится вопрос об устойчивости полученного решения. Устойчивость решения (при заданном **M**) определяется числом обусловленности [2]

$$\mathbf{q = \lambda_{max}/\lambda_{min}} \ ,$$

где λ_{max} , λ_{min} - соответственно максимальное и минимальное собственные значения матрицы **A**. Поскольку матрица **A** является треугольной матрицей, ее собственные значения будут равны ее же диагональным элементам. Поскольку все диагональные элементы матрицы **A** равны единице, то и число обусловленности **q** также равно единице. Как показано в [2], решение в виде (11) будет устойчивым (оставаться корректным с ростом **M**), до тех пор, пока число $\mathbf{q < 100}$. Поэтому можно утверждать об устойчивости решения в виде (11) системы уравнений (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кварцевые и квантовые меры частоты / Под ред. Б.И. Макаренко. – МО СССР, 1989. – 536 с.

2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 224 с.