

СПОСОБ ИЗМЕРЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ ФАЗОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ МЕР ЧАСТОТЫ

к.ф.м.-н. Ю.И. Евдокименко
(представил д.т.н., проф. Э.Н. Хомяков)

В работе рассмотрен один из косвенных способов измерения спектральной плотности мощности фазовых флуктуаций (СПМФФ) мер частоты, основанный на обращении интегрального уравнения Фредгольма первого рода, связывающего между собой дисперсию и энергетический спектр шума меры частоты.

Энергетический спектр $S_y(\mathbf{f})$ и дисперсия $\mathbf{D}(\tau)$ относительных частотных флуктуаций мер частоты, измеренных на интервале измерения τ , связаны между собой посредством интегрального уравнения Фредгольма первого рода [1]

$$\mathbf{D}(\tau) = \int_0^{\infty} |\mathbf{H}(\mathbf{f}, \tau)|^2 S_y(\mathbf{f}) d\mathbf{f}, \quad (1)$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{f}, \tau)$ - частотная характеристика соответствующей оценки $\mathbf{D}(\tau)$.

При выборе ядра $|\mathbf{H}(\mathbf{f}, \tau)|^2$ в виде импульсной функции Дирака: $|\mathbf{H}(\mathbf{f}, \tau)|^2 = k\delta(\mathbf{f} - \mathbf{r}/\tau)$ связь между показателями нестабильности частоты во временной и частотной областях имеет вид

$$\mathbf{D}_y(\tau) = \int_0^{\infty} k\delta(\mathbf{f} - \mathbf{r}/\tau) S_y(\mathbf{f}) d\mathbf{f} = kS_y(\mathbf{r}/\tau). \quad (2)$$

В этом случае косвенный метод измерения по сути преобразуется в прямой метод измерения СПМФФ с помощью селективного микровольтметра с квадратичным детектором на выходе, поскольку его частотная характеристика также эквивалентна δ -функции.

Частотную характеристику с узкой главной полосой синтезированного фильтра имеет взвешенная биномиальными коэффициентами дисперсия Адамара, которой соответствует следующая процедура обработки последовательно измеренных на интервале τ средних значений относительных частотных флуктуаций \bar{y}_i :

$$\langle \mathbf{D}_{N, \bar{y}}(\mathbf{T}, \tau) \rangle = \left\langle \left(C_N^0 \bar{y}_0 - C_N^1 \bar{y}_1 + C_N^2 \bar{y}_2 - \dots - C_N^N \bar{y}_N \right)^2 \right\rangle, \quad (3)$$

где \mathbf{T} – интервал времени между началами двух соседних измерений величины \bar{y}_i ;

N – количество измерений в одной выборке;

$C_N^k = (N!)/(k!(N-k)!)$ – биномиальные коэффициенты.

Частотная характеристика взвешенной дисперсии Адамара определяется выражением

$$|\mathbf{H}_{H,N}(\mathbf{f}, \tau, \mathbf{T})|^2 = 2^{2N} \sin^{2N}(\pi \mathbf{f} \mathbf{T}) \left[\frac{\sin(\pi \mathbf{f} \mathbf{T})}{\pi \mathbf{f} \mathbf{T}} \right]^2 \quad (4)$$

и при $N \rightarrow \infty$ стремится по форме к бесконечной сумме сдвинутых по частоте одна относительно другой δ -функций.

При $\tau = \mathbf{T}$ с учетом связи $S_\varphi(\mathbf{F}) = (\mathbf{f}_0/\mathbf{F})^2 S_y(\mathbf{F})$ уравнение (1) будет иметь следующий вид:

$$\int_0^\infty [\sin(\pi \mathbf{F} \tau)]^{2(N+1)} S_\varphi(\mathbf{F}) d\mathbf{F} = \frac{(\pi \mathbf{f}_0)^2}{2^{2N+1}} \mathbf{D}_{H,N}(\tau). \quad (5)$$

Ядро интегрального уравнения (5) тождественно равно нулю в точках $\mathbf{F} = \mathbf{k}/\tau$. Если предположить, что внутри частотных интервалов $\Delta \mathbf{F}_k = [(2\mathbf{k}+1)/(2\tau) - \varepsilon, (2\mathbf{k}+1)/(2\tau) + \varepsilon]$ функция $S_\varphi(\mathbf{F})$ является неизменной или слабо меняющейся, то уравнение (5) может быть преобразовано к виду

$$\sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} S_\varphi(\mathbf{F}_k) \int_{\mathbf{k}/\tau}^{(\mathbf{k}+1)/\tau} [\sin(\pi \mathbf{F} \tau)]^{2(N+1)} d\mathbf{F} = \frac{(\pi \mathbf{f}_0)^2}{2^{2N+3}} \mathbf{D}_{H,N}(\tau), \quad (6)$$

где $\mathbf{F}_k = (2\mathbf{k}+1)/(2\tau)$, а интеграл имеет аналитическое значение.

Определимся относительно количества значимых членов ряда в левой части уравнения (6). С одной стороны, как известно [1], функция $S_\varphi(\mathbf{f})$ из-за наличия белых фазовых шумов меры остается постоянной и не равной нулю при $\mathbf{f} \rightarrow \infty$. Поэтому все члены ряда являются значимыми. Однако, измерение величины $\mathbf{D}_{H,N}(\tau)$ производится реальными средствами измерительной техники, среди которых все без исключения имеют конечную полосу пропускания частот. Поэтому исходное уравнение (1) и, соответственно, уравнение (6) являются физически некорректными. Корректным будет вычисление интеграла в уравнении (1) в полосе пропускания частот средств измерительной техники, используемой при измерениях относительной разности частот \bar{y} .

Наименьшей полосой пропускания из средств измерительной техники, используемых при измерениях частотных флуктуаций мер, обладают частотные компараторы типа Ч7-12 и Ч7-39, для которых частота среза $f_{гр}$ находится в диапазоне 1 кГц. В этом случае верхний предел интеграла в уравнении (1) будут иметь значение $f_{гр}$. Непосредственно из сказанного следует, что в левой части уравнения (6) значимыми будут только первые M членов ряда. При этом число M определяется из условия

$$M = \text{entier}[(\tau f_{гр} + 1)/2], \text{ т.е. имеем}$$

$$\sum_{k=0}^M S_{\varphi} \left(\frac{2k+1}{\tau} \right) = \frac{\tau^3 (f_0)^2 [(N+1)!]^2}{2 \cdot (2N+2)!} D_{N,N}(\tau). \quad (7)$$

Таким образом, уравнение (1) сведено к линейному алгебраическому уравнению с M неизвестными и параметром τ , вариация которого определенным способом может позволить преобразовать уравнение (7) в совместную систему алгебраических уравнений относительно M неизвестных $S_{\varphi}(F_k)$.

Если выбрать $\tau_{max} = \Theta/N$ и $\Theta = (2M+1)/(N f_{гр})$, где Θ - общее время наблюдения частотных флуктуаций исследуемой меры, то реализуя измерения дисперсии Адамара при значениях параметра

$$\tau = \tau_n = \frac{\tau_{max}}{2n+1} \text{ при } n \in [0, M], \quad (8)$$

получим систему линейных алгебраических уравнений относительно M значений СПМФФ $S_{\varphi}(f_k)$ на частотах $f_k = (2k+1)/\tau_{max}$. Таким образом, в результате проведенных преобразований решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода (1) свелось к решению системы линейно независимых алгебраических уравнений, которая в общем виде может быть представлена следующим образом:

$$A \cdot S_{\varphi} = B, \quad (9)$$

где S_{φ} - вектор размерностью $(M+1)$ искомых значений СПМФФ в

$M+1$ узлах сетки частот $F_k = (2k+1)/\tau_{max}$, $k \in [0, M]$;

A - матрица размерностью $(M+1) \times (M+1)$, элементы $a_{i,j}$ которой могут принимать значения 0 или 1 (при этом все элементы главной диагонали равны 1, все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны 0, а единичные элементы, расположенные выше главной диагонали, прорежены нулями);

B - вектор размерностью $(M+1)$, элемент b_i которого определяется по результатам измерений $D_{N,N}(\tau_i)$ и задается выражением

$$\mathbf{b}_i = \left(\frac{\tau_i^3 (f_0)^2 [(N+1)!]^2}{2 \cdot (2N+2)!} \mathbf{D}_{N,N}(\tau_i) \right). \quad (10)$$

Матрица \mathbf{A} коэффициентов уравнения (10) является верхнетреугольной матрицей с элементами главной диагонали, равными единице. Детерминант такой матрицы всегда равен 1. Поэтому существует и притом единственное решение уравнения (9)

$$\mathbf{S}_\varphi = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}. \quad (11)$$

При представлении решения системы уравнений (9) в форме (11) при неточно заданных значениях элементов вектора \mathbf{B} (полученных экспериментально с некоторой погрешностью измерений) ставится вопрос об устойчивости полученного решения. Устойчивость решения (при заданном \mathbf{M}) определяется числом обусловленности [2]

$$\mathbf{q} = \lambda_{\max} / \lambda_{\min},$$

где λ_{\max} , λ_{\min} - соответственно максимальное и минимальное собственные значения матрицы \mathbf{A} . Поскольку матрица \mathbf{A} является треугольной матрицей, ее собственные значения будут равны ее же диагональным элементам. Поскольку все диагональные элементы матрицы \mathbf{A} равны единице, то и число обусловленности \mathbf{q} также равно единице. Как показано в [2], решение в виде (11) будет устойчивым (оставаться корректным с ростом \mathbf{M}), до тех пор, пока число $\mathbf{q} < 100$. Поэтому можно утверждать об устойчивости решения в виде (11) системы уравнений (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кварцевые и квантовые меры частоты / Под ред. Б.И. Макаренко. – М: СССР, 1989. – 536 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 224 с.