УДК 621.396 : 629.788

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИДЕНТИФИЦИРУЕМЫХ ПРОЦЕССОВ БОРТОВОЙ АППАРАТУРЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

к.т.н. Козелков С.В.
(представил д.т.н., проф. Б.И. Макаренко)

Представлена математическая модель процессов, протекающих в бортовой аппаратуре космического аппарата.

Одной из основных задач контроля космического пространства является идентификация космических аппаратов (КА) [1]. При этом представляется целесообразным поэкземплярно различать КА по результатам анализа функционирования бортовой аппаратуры (БА) [1, 2]. Поэтому актуальной является разработка математической модели идентифицируемых процессов БА КА, рассмотренная в данной статье.

Известны два типа математических моделей нестабильности опорных генераторов: нединамические и динамические. Нединамическая модель процесса нестабильности представляется в виде [1, 3]

$$\varphi(t)=\sum_{i=0}^{N} c_i t^i + \varphi_k(t), \tag{1}$$

где $\mathbf{c_i}$, $\mathbf{i = \overline{1,N}}$ - постоянные коэффициенты модели. При $\mathbf{N = 2}$ коэффициенты имеют определенный физический смысл: $\mathbf{c_0}$ - ошибка начального значения фазы; $\mathbf{c_1}$ - расхождение частоты; $\mathbf{c_2}$ - скорость расхождения частоты.

В случае, когда в процесс нестабильности входит начальный участок $\boldsymbol{\varphi(t)}$, соответствующий выходу генератора в номинальный режим работы, целесообразно применить следующую модель [1, 3]:

$$\varphi(t)=\beta_1\{1-\exp(\beta_2 t)\}+c_1 t+c_2 t^2+\varphi_k(t), \tag{2}$$

где «кратковременную» нестабильность $\boldsymbol{\varphi_k(t)}$ аппроксимируют процессом типа «белый шум» [3].

Нединамические модели (1) и (2) удобны при работе с кварцевыми генераторами, имеющими большую стабильность при относительно небольших интервалах прогнозирования (~ 1 часа), когда справедлива параболическая аппроксимация процесса нестабильности. При этом следует учесть, что появление у процесса нестабильности составляющих типа гармонических, возникающих при действии, например, периодических возмущающих воздействий, не позволяет решить задачу прогнозирования с помощью параболической аппроксимации.

Большими возможностями обладает динамическая модель, построенная на основе метода уравнений состояния. Динамическая модель предполагает, что процесс нестабильности формируют на выходе четырехполюсника, возбужденного белым гауссовым шумом. Параметры возбуждающего шума и формирующего четырехполюсника выбирают такими, чтобы моментные или другие характеристики процесса на выходе четырехполюсника совпали с требуемой точностью с характеристиками экспериментально полученных процессов нестабильностей. Сравнение характеристик процессов можно выполнить следующим образом. На основе экспериментально полученного процесса нестабильности генератора вычисляют его корреляционную функцию $\mathbf{R(\tau)}$. По корреляционной функции получают спектральную плотность средней мощности процесса нестабильности, совпадающей с точностью до постоянных коэффициентов с квадратом модуля коэффициента передачи формирующего четырехполюсника. Динамическая модель представляет собой в данном случае модель белого гауссова шума через формирующий четырехполюсник посредством системы дифференциальных уравнений первого порядка. Системой таких уравнений можно описать всякий процесс с рациональным спектром, приближающимся к нулю на высоких частотах

Обозначим коэффициент передачи формирующего четырехполюсника через $\mathbf{K_f(p)}$; белый гауссов шум, возбуждающий этот четырехполюсник - $\mathbf{\xi(t)}$, а процесс на выходе четырехполюсника - $\mathbf{x(t)}$. Коэффициент передачи формирующего четырехполюсника зададим дробно-рациональной функцией [6, 7]

$$\mathbf{K_f(p)=\frac{\lambda_1 p^q+\lambda_2 p^{q-1}+\ldots+\lambda_q}{p^m+\psi_1 p^{m-1}+\ldots+\psi_m}}, \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{\lambda_1} \ldots \boldsymbol{\lambda_q}$, $\boldsymbol{\psi_1} \ldots \boldsymbol{\psi_m}$ - постоянные, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{q}$ - целые положительные числа.

При этом процесс с рациональным спектром можно представить матричным дифференциальным уравнением [6, 7]

$$\mathbf{x(t) = F_x(t) + G(t)\,\xi(t)}, \qquad (4)$$

где $\mathbf{x(t) = [x_1(t), \ldots x_m(t)]}$ - вектор состояния, $\mathbf{x(0) = x_0}$; $\mathbf{t \in [0; T]}$ - интервал наблюдения;

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} -\psi_1 & \psi_1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\psi_2 & 0 & \psi_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\psi_m & 0 & 0 & \ldots & \psi_m \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_m \end{bmatrix}$$ - матрица интенсивностей формирующих шумов.

Нестабильность частоты опишем как

$$\mathbf{Y(t) = H(t)\, x(t)}, \tag{5}$$

где $\mathbf{H(t)}$ – выходная матрица.

Видом нестабильности определяются: порядок системы (4), значения параметров $\psi_1, \psi_2\dots, \psi_m$; $\lambda_1, \lambda_2\dots, \lambda_m$, вид матрицы $\mathbf{F(t)}$. Если, например, нестабильность представляет собой коррелированный стационарный процесс, то в этом случае $\mathbf{F(t) = [0,\ \psi_1]}$ и уравнение (5) вырождается в скалярное уравнение первого порядка $\mathbf{H(t)\, x(t) = Y_1(t)}$. Если процесс нестабильности представляет собой квазигармоническое колебание, то адекватной этому колебанию моделью является модель второго порядка с матрицей [6]

$$\mathbf{F(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \psi_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \psi_2 \end{bmatrix}.$$

Способ решения рассматриваемой задачи состоит в вычислении коэффициентов $\psi_1 \dots \psi_m$ и $\lambda_1 \dots \lambda_m$ формирующего четырехполюсника на основе известной спектральной плотности процесса нестабильности. Требования к точности аппроксимации определяют порядок модели. Этот способ, несмотря на кажущуюся простоту, сложен, так как процесс обработки нестабильности опорных генераторов (ОГ) требует больших затрат машинного времени.

В дальнейшем для упрощения расчетов нестабильность представим тремя основными компонентами [1]. Первая - это медленно меняющаяся компонента $\mathbf{g(t)}$ [1], которая определяет нестационарность процесса и которую можно трактовать как детерминированную компоненту (по крайней мере, на данной выборке). Эта компонента определяется полиномом [6]

$$\mathbf{g(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots}\ .$$

Второй компонентой $\mathbf{m(t)}$ можно считать медленно меняющуюся функцию $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(t)}$ относительно первой компоненты $\mathbf{g(t)}$. Эту компоненту можно считать случайным локальным стационарным процессом с большим временем корреляции. В этом случае при выполнении условия

$$\mathbf{g(t) = g_0 = const}$$

компонента $\mathbf{m(t)}$ также является объектом прогнозирования. Третья компонента $\mathbf{n(t)}$ – это быстрые флуктуации частоты, стационарные по всей выборке, но с малым временем корреляции. Таким образом, процесс нестабильности, характеризуемой уходами фазы, имеет вид [8]

$$\boldsymbol{\varphi(t) = g(t) + m(t) + n(t)}. \tag{6}$$

Исходя из априорного представления процесса нестабильности в виде трех компонент (6) при условии, что параметры стабильности на длительном интервале постоянны, непрерывную модель можно представить в виде схемы [7]. Источники возбуждения рассматриваемой модели $\boldsymbol{\xi_1}$, $\boldsymbol{\xi_2}$, $\boldsymbol{\ldots\xi_m}$, $\boldsymbol{\psi_1}$, …, $\boldsymbol{\psi_m}$ представляют собой белые шумы с единичной спектральной плотностью. Эти шумы ненаблюдаемы. Работа отдельных блоков определяется соответствующими функциями передачи в непрерывном преобразовании Лапласа с оператором $\mathbf{p = \lambda + i\omega}$. При дискретных отсчетах частоты непрерывную модель удобно заменить дискретной, возбуждаемой также белым шумом, но в дискретном виде. Тогда работа блоков определяется функцией передачи, описываемой дискретным преобразованием Лапласа или **z** - преобразованием.

Для использования этой модели необходимо определить значения $\boldsymbol{c_i}$, $\boldsymbol{\lambda_i}$, $\boldsymbol{\psi_i}$ и мощностей шумов. В настоящее время эта процедура при неизвестных возбуждениях практически неразрешима [8]. Параметры $\mathbf{C_0}$, $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, и $\boldsymbol{\lambda_i}$ входят в числители соответствующих функций передачи. При этом, если записать следующие векторные уравнения:

$$\mathbf{X(t) = Fx(t) + Gq(t)}; \tag{7}$$

$$\mathbf{Y(t) = Hx(t)}, \tag{8}$$

то приходится идентифицировать сразу три матрицы: матрицу коэффициентов **F**, входящих в знаменатель соответствующей функции передачи, матрицу - столбец возбуждения **G** - коэффициенты числителя, матрицу - строку **H**.

Существующие методы идентификации линейной модели, представленной в [6], хорошо разработаны для случаев, когда нет числителя в соотношении (3) или когда $\mathbf{G^T = [10, \ldots, 0]}$ и $\mathbf{H = [10, \ldots, 0]}$, т.е. когда система имеет один вход и один выход. При работе с моделью нестабильности возможны следующие варианты. Если удается разделить составляющие **g(t)** и **m(t)**, то по этим разделенным данным можно оценивать параметры соответствующих каналов модели, причем функции передачи этих каналов следует модифицировать таким образом, чтобы они не содержали числитель. Если, например, в функции передачи **K(z)**, полученной из (3), числитель и знаменатель разделить на числитель, то получим [7] коэффициент передачи формирующего четырехполюсника

$$\mathbf{H(z) = \frac{1}{1 + \psi_1 z^{-1} + \psi_2 z^{-2} + \ldots}}.$$

Ограничивая ряд знаменателя, получим приближенную формулу. Однако это приводит к увеличению числа отсчетов, которое нужно производить при идентификации. Такая методика неудобна для практического применения.

Можно представить $\mathbf{H(z)}$ [7] в виде

$$\mathbf{H(z)=\frac{\varphi_{вых}(z)}{\varphi_{вх}(z)}=\frac{B(z)}{A(z)}=C_1z^{-1}+C_2z^{-2}+C_3z^{-3}+\ldots}$$

или в виде функции от времени [7]

$$\mathbf{\varphi_{вых}(kt)=C_1\varphi_{вх}(kT-T)+C_2\varphi_{вх}(kT-2T)+\ldots}, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\varphi_{вых}}$ и $\boldsymbol{\varphi_{вх}}$ - сигналы на выходе и входе фильтра $\mathbf{H(z)}$.

Поскольку на практике выборка ограничена, то, ограничивая число весовых коэффициентов, можно получить приближенное решение и использовать его для вычисления соответствующих компонент в соотношении (6).

Помимо подходов, связанных с определением передаточной функции $\mathbf{H(z)}$ или определением матриц векторного уравнения, задача обоснования моделей решается методом последовательного усложнения модели. Выбирается простейшая модель и анализируется качество аппроксимации реального процесса. Если аппроксимация неудачна, то для описания процесса используется более сложная модель. Для оценивания параметров модели или вектора состояния могут быть применены метод наименьших квадратов (МНК) или метод динамической фильтрации. МНК широко известен. Применение его на конечных выборах при детерминированном сигнале и априори неизвестных характеристиках помех, как правило, оправдывается. Использование этого метода, однако, имеет свои особенности. Они заключаются в следующем. Допустим, что для выделения $\mathbf{m(t)}$ в (6) использованы результаты измерений на интервале времени от единицы до кТ. Если $\mathbf{m(t)}$ является нестационарной функцией, то желательно строить рекуррентную процедуру обработки при поступлении новых данных. Такая процедура приводит к форме фильтра, подобного фильтру Калмана. Однако в случае нестационарности $\mathbf{m(t)}$ она требует большого времени обработки и большого объема измерении Другое направление заключается в разбиении имеющейся выборки на небольшие участки, содержащие примерно 4-5 точек (скользящее наблюдение). Получающиеся при этом частные оценки в дальнейшем составляют ряд, по которому рассчитываются прогнозируемые оценки параметров процесса $\mathbf{m(t)}$. При большом значении "скользящего окна" значения $\mathbf{m(t)}$ в (6) выступают в роли помех. Напротив, при малой длине "окна" они могут сильно влиять на значения оценок параметров

m(t). При этом существует определенная мера выбора "скользящего окна" в зависимости от характеристики составляющей **m(t)**. Оценивание по МНК при гауссовом априорном распределении оцениваемых параметров эквивалентно оцениванию по методу максимума правдоподобия (ММП) [8].

Метод с использованием динамической модели основан на представлении процесса как результата возбуждения белым шумом формирующего фильтра. Исследования этого метода показывают, что хорошие результаты получаются для выборок измерений процесса объемом от сотен до тысяч [2, 9]. Такой объем информации означает оценивание вектора состояния для стабильных кварцевых генераторов в течение достаточно длительных (до единиц часов) интервалов времени. Техника применения этого метода разработана до простых рекуррентных соотношении Однако, практическое применение этого метода для оценивания сигнала нестабильности сопряжено с определенными трудностями, вызванными чувствительностью алгоритма к выбору начальных условий. Кроме того, если дисперсия случайной составляющей **n(t)** неизвестна, то этот факт изменяет и существенно усложняет алгоритм получения оценки. На практике в этом случае в качестве значения дисперсии принимают наиболее возможное значение и в дальнейшем считают его постоянным. Принятие значения дисперсии меньшего, чем в реализации, приводит к неустойчивости алгоритма и делает его неработоспособным.

В том случае, когда реализация нестабильности охватывает большой интервал времени, предложение о постоянстве отдельных параметров модели оказывается несостоятельным. Эти параметры следует считать переменными и их можно представить как случайный процесс, порожденный марковской моделью.

Алгоритмы идентификации на основе динамических моделей разработаны в виде рекуррентных соотношений как для критерия максимума правдоподобия, так и для критерия максимума апостериорной вероятности распределения оцениваемого параметра. Однако, если неизвестные параметры распределены равномерно или имеется значительная неопределенность в априорном распределении, то алгоритмы идентификации для названных выше критериев эквивалентны. Так, исходя из соотношений (7), (8), для составляющих **m(t)** и **n(t)** будут справедливы следующие выражения:

$$\mathbf{X(t) = Fx(t) + Gq(t)}; \tag{10}$$

$$\mathbf{m(t) = H(t)\,x(t)}, \tag{11}$$

а уравнение наблюдения можно представить в виде

$$\mathbf{z(t) = H_1 m(t) + n(t)}, \tag{12}$$

где **n(t)** - составляющая нестабильности, имеющая малое время корреляции; $\mathbf{H_1(t)}$ – матрица наблюдений для рассматриваемого случая $\mathbf{H_1 = [100, ..., 0]}$.

Оптимальная оценка вектора **x(t)** имеет вид

$$\mathbf{x}(\mathbf{k}+1) = \mathbf{\Phi x}(\mathbf{k}) + \mathbf{K}(\mathbf{k}+1)\,[\mathbf{z}(\mathbf{k}+1) - \mathbf{H}_1\mathbf{\Phi x}(\mathbf{k})], \qquad (13)$$

где **Φ** - переходная матрица; **K(k + 1)** - матрица коэффициентов усиления; **k** - номер измерения, поступающего в обработку.

Матричный коэффициент усиления определяется из уравнения Риккати как функция характеристик шумов **q(k)**, **n(k)** и матриц **F**, **H** и **G** уравнений (10) - (12).

Таким образом, показана возможность идентификации каждого конкретного блока БА КА. Рассмотрены направления создания математической модели идентифицируемых процессов. Проведенный выше анализ особенностей сигналов неконтролируемых излучений и обоснование математических моделей идентифицируемых процессов БА КА показывают на принципиально возможное создание наземного аппаратно - программного комплекса идентификации КА, что позволит повысить эффективность контроля космического пространства и обеспечить получение дополнительных сведений о работе БА КА. При этом применение полученной таким образом информации повысит надежность функционирования космических систем, что особо важно для наземных контуров однопунктного управления КА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов М.А., Козелков С.В. Анализ условий применения антенных устройств СВЧ и КВЧ диапазонов на спутниках. – М., 1989. – 12 с. – Деп. в ЦИВТИ МО СССР, вып. 10, № 4238, В – 1384.
2. ГОСТ 11.006 - 74. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим.
3. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастные алгоритмы адаптации // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 10. – С. 91 – 97.
4. Мостеллер Ф., Тьюки Дж. Анализ данных и регрессия. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 239 с.
5. Кендел А.А. Ранговые корреляции. – М.: Статистика, 1975. – 269 с.
6. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. – М.: Мир, 1983. – 420 с.
7. Бреммер К. Зиффлинг Г. Фильтр Калмана - Бьюси. – М.: Наука; 1982. – 144 с.
8. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. –- М.: Наука, 1979. – 230 с.
9. Гихман И.П., Скороход А.К., Ядренко М.И. Теория вероятности и математическая статистика. – К.: Вища школа. 1979. – 324 с.