

СВЯЗЬ МЕЖДУ РОСТОМ МОДУЛЯ И РОСТОМ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НАД ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

к.ф.-м.н. С.В. Львова, к.т.н. В.И. Барсов, И.В. Московченко
(представил д.т.н., проф. В.М. Бильчук)

Для функций, мероморфных в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, рассматривается вопрос о связи между величинами $\ln^+ |f(re^{i\varphi} \sin \varphi)|$ и $\widehat{T}(r, f)$.

1. Формулировка теорем

Пусть $f(x)$ - функция, мероморфная в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ и не равная тождественной постоянной, $\widehat{n}(r, f)$, $r \geq 1$ - число ее полюсов, лежащих в области

$\left\{ \left| z - \frac{ir}{2} \right| \leq \frac{r}{2}, |z| \geq 1 \right\}$. Положим $\widehat{N}(r, f) = \int_1^r \frac{\widehat{n}(t, f)}{t^2} dt$, $r > 1$;

$$\widehat{T}(r, f) = \widehat{m}(r, f) + \widehat{N}(r, f); \quad \widehat{m}(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(r)}^{\pi - \kappa(r)} \ln^+ |f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| \frac{d\varphi}{r \sin^2 \varphi}, \quad \text{где}$$

$\kappa(r) = \arcsin r^{-1}$. Рассмотрим вопрос о связи между величинами $\ln^+ |f(re^{i\varphi} \sin \varphi)|$ и $\widehat{T}(r, f)$ для функций, мероморфных в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Для этого докажем теоремы 1 и 2, которые аналогичны соответствующим теоремам 7.3 и 7.4 [1] для функций, мероморфных в плоскости.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ - функция, мероморфная в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ и голоморфная в некоторой окрестности начала координат. Тогда при любом фиксированном $k > 1$ и некотором δ ($0 < \delta < \pi$, для любого измеримого множества $E_r \subset (0, \pi)$ $\operatorname{mes} E = \delta$) справедливо неравенство

$$\int_{E_r} \ln^+ |f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| d\varphi \leq \alpha_1(k) r \delta \widehat{T}(kr, f) + \alpha_2(f, k) r \delta, \quad \forall r > 0. \quad (1)$$

Теорема 2. Пусть E - измеримое подмножество $(0, \pi)$; $\Phi(\varphi)$ - суммируемая неотрицательная функция на E ; $R(r)$ - некоторая положительная функция на $(r \geq r_0 > 0)$ ($R(r) \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty, \exists k > 1$, что $R(kr) = O(R(r))$).

Предположим, что задана мероморфная функция $f(z)$ в $\{\text{Im } z > 0\}$ такая, что $\widehat{T}(r, f) = O\{R(r)\}$ и для любого $\delta > 0$ существует множество $E_\delta \subset E$, $\text{mes } E_\delta = \delta$, что одно из трех условий:

$$\text{а) } \ln^+ |f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| \leq \Phi(\varphi)rR(r) + o(R(r));$$

$$\text{б) } \ln^+ |f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| \geq \Phi(\varphi)rR(r) + o(R(r));$$

$$\text{в) } \ln^+ |f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| = \Phi(\varphi)rR(r) + o(R(r))$$

выполняется равномерно по φ при $\varphi \in E \setminus E_\delta$. Тогда а), б), в) соответствующим неравенствам:

$$\text{г) } \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{rR(r)} \int_E \ln^+ |f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| d\varphi \leq \int_E \Phi(\varphi) d\varphi; \quad (2)$$

$$\text{д) } \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{rR(r)} \int_E \ln^+ |f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| d\varphi \geq \int_E \Phi(\varphi) d\varphi; \quad (3)$$

$$\text{е) } \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{rR(r)} \int_E \ln^+ |f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| d\varphi = \int_E \Phi(\varphi) d\varphi. \quad (4)$$

2. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 проводится по той же схеме, что и теорема 7.3 [1] с использованием нижеприведенных лемм [2].

Лемма 1. Пусть $s > 2r$; $\chi(r) = \arcsin r^{-1}$; $\Phi(\varphi) = \text{Re} \frac{\frac{s}{2} e^{i(2\tau - \frac{\pi}{2})} + z}{\frac{s}{2} e^{i(2\tau - \frac{\pi}{2})} - z}$,

где $z = re^{i\varphi} \sin \varphi - \frac{is}{2}$; $\tau_1 = \arcsin \frac{r}{\sqrt{s^2 r^2 - s^2 + r^2}}$; $\tau_2 = \pi - \tau_1$. Тогда

$$\sup_{\kappa(r) \leq \varphi \leq \pi - \kappa(r)} (\varphi, \tau) = \begin{cases} \frac{r}{s-r} \frac{1}{\sin^2 \tau}, & \tau \in [\tau_1, \tau_2]; \\ \frac{s-r}{s^2 r \sin^2 \tau - (s-r) - s\sqrt{r^2 - 1} \sin 2\tau + s \cos 2\tau}, & \tau \notin [\tau_1, \tau_2]. \end{cases}$$

Лемма 2. Пусть: $\mathbf{b} = \rho e^{i\mu} \sin \mu$, $0 < \mu < \pi$, $z = re^{i\varphi} \sin \varphi - \frac{is}{2}$, $0 < \varphi < \pi$,

$$0 < r < \frac{s}{2}, \rho < s. \text{ Тогда } \ln \left| \frac{\frac{s^2}{4} - (\mathbf{b} - \frac{is}{2})z}{\frac{s}{2}(z - (\mathbf{b} - \frac{is}{2}))} \right| \leq \ln \frac{2s}{|r-s|}.$$

Из формулы Пуассона - Иенсена, примененной к функции $\mathbf{f}(z + (\mathbf{is}/2))$ в круге $|z| < s/2$, следует, что

$$\ln \left| \mathbf{f}\left(z + \frac{is}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \mathbf{f}\left(\frac{s}{2} e^{i\varphi} + \frac{is}{2}\right) \right| \operatorname{Re} \frac{\frac{s}{2} e^{i\varphi} + z}{\frac{s}{2} e^{i\varphi} - z} d\varphi + \sum_{\left| \mathbf{b}_n - \frac{is}{2} \right| < \frac{s}{2}} \ln \left| \frac{\frac{s^2}{4} - (\mathbf{b}_n - \frac{is}{2})z}{\frac{s}{2}(z - (\mathbf{b}_n - \frac{is}{2}))} \right|,$$

где \mathbf{b}_n - полюсы функции $\mathbf{f}(z)$.

Полагая $\varphi = 2\tau - \frac{\pi}{2}$ и оценивая интеграл и члены ряда с помощью лемм 1 и 2, получаем неравенство

$$\ln |\mathbf{f}(\zeta)| \leq \frac{2sr}{s-r} \frac{1}{2\pi} \int_{\kappa(s)}^{\pi - \kappa(s)} \ln \left| \mathbf{f}(se^{i\tau} \sin \tau) \right| \frac{d\tau}{s \sin^2 \tau} + \sum_{\left| \mathbf{b}_n - \frac{is}{2} \right| < \frac{s}{2}} \ln \frac{2s}{|r - \rho_n|} + c_1(\mathbf{f})s,$$

где

$$\mathbf{b}_n = \rho_n e^{i\mu_n} \sin \mu_n, \quad 0 < \mu_n < \pi, \quad \zeta = z + \frac{is}{2}, \quad = re^{i\varphi} \sin \varphi, \quad \kappa(s) = \arcsin s^{-1}. \quad (5)$$

Далее, учитывая, что $\ln \frac{2s}{|r - \rho_n|} \leq \ln \frac{2s}{|r - s|}$, получаем, что при любых

$\mathbf{t} \in (0, r)$, $\varphi \in [\kappa(r), \pi - \kappa(r)]$ и $r = \frac{s}{k}$, $k > 1$, справедливо неравенство

$$\ln \left| \mathbf{f}(te^{i\varphi} \sin \varphi) \right| \leq c_2(k) \widehat{\mathbf{sm}}(s, \mathbf{f}) + \ln \frac{2k}{k-1} \widehat{\mathbf{n}}(s, \mathbf{f}) + c_1(\mathbf{f})s, \quad (6)$$

где $c_2(k) = \frac{2}{k-1}$, а $c_1(\mathbf{f})$ зависит от выбора функции.

Учитывая, что при $\frac{s'}{s} = k$,

$$\widehat{\mathbf{N}}(s', \mathbf{f}) \geq \int_s^{s'} \frac{\widehat{\mathbf{n}}(\mathbf{t}, \mathbf{f})}{\mathbf{t}^2} \geq \widehat{\mathbf{n}}(s, \mathbf{f}) \frac{s-s'}{s \bullet s'} = c_3(k) \widehat{\mathbf{m}}(s, \mathbf{f}) \frac{1}{s},$$

а также то, что правая часть неравенства (6) неотрицательна, в левой части (6) можно $\ln|f(re^{i\varphi} \sin \varphi)|$ заменить на $\ln^+|f(re^{i\varphi} \sin \varphi)|$. Далее, получаем неравенство

$$\ln^+|f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| \leq c_2(k)s\widehat{T}(s, f) + c_4(k)s\widehat{N}(ks, f) + c_1(f)s.$$

Интегрируя полученное неравенство по E_r и с учетом $\frac{s}{r} = k, \frac{s'}{s} = k$, получим $\int_{E_r} \ln^+|f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| d\varphi \leq c_5(k)r\delta\widehat{T}(k^2r, f) + kr\delta c_1(f)$.

Отсюда и из свойства почти монотонности функции $\widehat{T}(r, f)$ вытекает, что при всех r справедлива оценка

$$\int_{E_r} \ln^+|f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| d\varphi \leq \alpha_1(k)r\delta\widehat{T}(kr, f) + r\delta\alpha_2(k, f)$$

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Докажем неравенство г). С учетом (1) и условия а), получаем

$$\begin{aligned} \int_E \ln^+|f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| d\varphi &= \int_{E \setminus E_\delta} \ln^+|f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| d\varphi + \int_{E_\delta} \ln^+|f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| d\varphi \leq \\ &\leq rR(r) \int_{E \setminus E_\delta} \Phi(\varphi) d\varphi + o(R(r)) + \alpha_1(k)r\delta O(R(r)) + \alpha_2(k, f)r\delta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{rR(r)} \int_E \ln^+|f(re^{i\varphi} \sin \varphi)| d\varphi \leq \int_E \Phi(\varphi) d\varphi + \alpha_1(k)\delta A,$$

где A - некоторая константа.

Устремляя δ к нулю, получим неравенство г). Неравенства д) и е) доказываются аналогично. Теорема 2 доказана.

Полученные теоремы важны для изучения асимптотического поведения и свойств мероморфных функций, заданных над полуплоскостью, которые естественным образом возникают при решении дифференциальных уравнений и в теории самосопряженных операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.

2. Львова С.В. О величинах отклонения мероморфных функций и целых кривых над полуплоскостью // Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. – К.: Наукова думка, 1981. – С. 67 - 81.

