УДК 617.535.4

СВЯЗЬ МЕЖДУ РОСТОМ МОДУЛЯ И РОСТОМ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НАД ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

к.ф.-м.н. С.В. Львова, к.т.н. В.И. Барсов, И.В. Московченко
(представил д.т.н., проф. В.М. Бильчук)

Для функций, мероморфных в полуплоскости **{Im z > 0}**, рассматривается вопрос о связи между величинами $\ln^+\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|$ и $\widehat{T}(r,f)$.

1.Формулировка теорем

Пусть **f(x)** - функция, мероморфная в полуплоскости **{Im z > 0}** и не равная тождественной постоянной, $\widehat{n}(r,f)$, $r \ge 1$ - число ее полюсов, лежащих в области $\left\{\left|z-\frac{ir}{2}\right| \le \frac{r}{2},\ |z| \ge 1\right\}$. Положим $\widehat{N}(r,f) = \int\limits_1^r \frac{\widehat{n}(t,f)}{t^2}dt,\ r > 1$;

$\widehat{T}(r,f) = \widehat{m}(r,f) + \widehat{N}(r,f)$; $\quad \widehat{m}(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\kappa(r)}^{\pi-\kappa(r)} \ln^+\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|\frac{d\varphi}{r\sin^2\varphi}$, где

$\kappa(r) = \arcsin r^{-1}$. Рассмотрим вопрос о связи между величинами $\ln^+\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|$ и $\widehat{T}(r,f)$ для функций, мероморфных в полуплоскости **{Im z > 0}**. Для этого докажем теоремы 1 и 2, которые аналогичны соответствующим теоремам 7.3 и 7.4 [1] для функций, мероморфных в плоскости.

Теорема 1. Пусть **f(z)** – функция, мероморфная в полуплоскости **{Im z>0}** и голоморфная в некоторой окрестности начала координат. Тогда при любом фиксированном **k > 1** и некотором δ ($0<\delta<\pi$, для любого измеримого множества $E_r \subset (0,\pi)$ $\ mesE = \delta$) справедливо неравенство

$$\int\limits_{E_r} \ln^+\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|d\varphi \le \alpha_1(k)r\delta\widehat{T}(kr,f) + \alpha_2(f,k)r\delta,\quad \forall r > 0\ . \qquad (1)$$

Теорема 2. Пусть **E** – измеримое подмножество $(0,\pi)$; $\Phi(\varphi)$ - суммируемая неотрицательная функция на **E**; **R(r)** – некоторая положительная функция на **(r≥r0>0)** ($R(r) \to \infty,\ r \to \infty$, $\exists k > 1$, что **R(kr)=O(R(r))**).

Предположим, что задана мероморфная функция $\mathbf{f(z)}$ в $\{\mathbf{Im\, z>0}\}$ такая, что $\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{r},\mathbf{f})=\mathbf{O}\{\mathbf{R(r)}\}$ и для любого $\delta>0$ существует множество $\mathbf{E_\delta\subset E}$, $\mathbf{mes E_\delta=\delta}$, что одно из трех условий:

$$\text{а) } \ln^+\left|f(r)e^{i\varphi}\sin\varphi\right|\le\Phi(\varphi)rR(r)+o(R(r));$$

$$\text{б) } \ln^+\left|f(r)e^{i\varphi}\sin\varphi\right|\ge\Phi(\varphi)rR(r)+o(R(r));$$

$$\text{в) } \ln^+\left|f(r)e^{i\varphi}\sin\varphi\right|=\Phi(\varphi)rR(r)+o(R(r))$$

выполняется равномерно по φ при $\varphi\in E\setminus E_\delta$. Тогда а),б),в) соответствуют неравенства:

$$\text{г) } \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{rR(r)}\int_E\ln^+\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|d\varphi\le\int_E\Phi(\varphi)d\varphi; \qquad (2)$$

$$\text{д) } \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{rR(r)}\int_E\ln^+\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|d\varphi\ge\int_E\Phi(\varphi)d\varphi; \qquad (3)$$

$$\text{е) } \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{rR(r)}\int_E\ln^+\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|d\varphi=\int_E\Phi(\varphi)d\varphi. \qquad (4)$$

2. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 проводится по той же схеме, что и теорема 7.3 [1] с использованием нижеприведенных лемм [2].

Лемма 1. Пусть $s>2r$; $\chi(r)=\arcsin r^{-1}$; $\Phi(\varphi)=\mathrm{Re}\dfrac{\frac{s}{2}e^{i(2\tau-\frac{\pi}{2})}+z}{\frac{s}{2}e^{i(2\tau-\frac{\pi}{2})}-z}$,

где $z=re^{i\varphi}\sin\varphi-\dfrac{is}{2}$; $\tau_1=\arcsin\dfrac{r}{\sqrt{s^2r^2-s^2+r^2}}$; $\tau_2=\pi-\tau_1$. Тогда

$$\sup_{\kappa(r)\le\varphi\le\pi-\kappa(r)}(\varphi,\tau)=\begin{cases}\dfrac{r}{s-r}\dfrac{1}{\sin^2\tau}, & \tau\in[\tau_1,\tau_2];\\[2ex] \dfrac{s-r}{s^2r\sin^2\tau-(s-r)-s\sqrt{r^2-1}\sin 2\tau+s\cos 2\tau}, & \tau\notin[\tau_1,\tau_2].\end{cases}$$

Лемма 2. Пусть: $b = \rho e^{i\mu}\sin\mu,\ \ 0<\mu<\pi,\ \ z = re^{i\varphi}\sin\varphi - \frac{is}{2},\ \ 0<\varphi<\pi,$

$0 < r < \frac{s}{2},\ \rho < s$. Тогда $\ln\left|\dfrac{\frac{s^2}{4} - \overline{(b-\frac{is}{2})}z}{\frac{s}{2}(z-(b-\frac{is}{2}))}\right| \le \ln\dfrac{2s}{|r-s|}$.

Из формулы Пуассона - Иенсена, примененной к функции $f(z+(is/2))$ в круге $|z|<s/2$, следует, что

$$\ln\left|f(z+\frac{is}{2})\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(\frac{s}{2}e^{i\varphi}+\frac{is}{2})\right|\mathrm{Re}\,\frac{\frac{s}{2}e^{i\varphi}+z}{\frac{s}{2}e^{i\varphi}-z}d\varphi + \sum_{\left|b_n-\frac{is}{2}\right|<\frac{s}{2}}\ln\left|\frac{\frac{s^2}{4}-\overline{(b_n-\frac{is}{2})}z}{\frac{s}{2}(z-(b_n-\frac{is}{2}))}\right|,$$

где b_n - полюсы функции $f(z)$.

Полагая $\varphi = 2\tau - \frac{\pi}{2}$ и оценивая интеграл и члены ряда с помощью лемм 1 и 2, получаем неравенство

$$\ln|f(\varsigma)| \le \frac{2sr}{s-r}\frac{1}{2\pi}\int_{\kappa(s)}^{\pi-\kappa(s)}\ln\left|f(se^{i\tau}\sin\tau)\right|\frac{d\tau}{s\sin^2\tau} + \sum_{\left|b_n-\frac{is}{2}\right|<\frac{s}{2}}\ln\frac{2s}{|r-\rho_n|} + c_1(f)s,$$

где

$$b_n = \rho_n e^{i\mu_n}\sin\mu_n,\ 0<\mu_n<\pi,\ \varsigma = z+\frac{is}{2}, = re^{i\varphi}\sin\varphi,\ \kappa(s) = \arcsin s^{-1}. \quad (5)$$

Далее, учитывая, что $\ln\dfrac{2s}{|r-\rho_n|} \le \ln\dfrac{2s}{|r-s|}$, получаем, что при любых

$t\in(0,r)$, $\varphi\in[\kappa(r),\pi-\kappa(r)]$ и $r=\frac{s}{k}$, $k>1$, справедливо неравенство

$$\ln\left|\ f(te^{i\varphi}\sin\varphi)\ \right| \le c_2(k)s\widehat{m}(s,f) + \ln\frac{2k}{k-1}\widehat{n}(s,f) + c_1(f)s, \quad (6)$$

где $c_2(k) = \frac{2}{k-1}$, а $c_1(f)$ зависит от выбора функции.

Учитывая, что при $\frac{s'}{s} = k$,

$$\widehat{N}(s',f) \ge \int_s^{s'}\frac{\widehat{n}(t,f)}{t^2} \ge \widehat{n}(s,f)\frac{s-s'}{s\bullet s'} = c_3(k)\widehat{m}(s,f)\frac{1}{s},$$

а также то, что правая часть неравенства (6) неотрицательна, в левой части (6) можно $\ln\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|$ заменить на $\ln^+\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|$. Далее, получаем неравенство

$$\ln^+\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right| \le c_2(k)s\widehat{T}(s,f) + c_4(k)s\widehat{N}(ks,f) + c_1(f)s\,.$$

Интегрируя полученное неравенство по E_r и с учетом $\frac{s}{r}=k, \frac{s'}{s}=k$, получим $\int\limits_{E_r}\ln^+\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|d\varphi \le c_5(k)r\delta\widehat{T}(k^2r,f) + kr\delta c_1(f)$.

Отсюда и из свойства почти монотонности функции $\widehat{T}(r,f)$ вытекает, что при всех r справедлива оценка

$$\int\limits_{E_r}\ln^+\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|d\varphi \le \alpha_1(k)r\delta\widehat{T}(kr,f) + r\delta\alpha_2(k,f)$$

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Докажем неравенство г). С учетом (1) и условия а), получаем

$$\int\limits_{E}\ln^+\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|d\varphi = \int\limits_{E\setminus E_\delta}\ln^+\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|d\varphi + \int\limits_{E_\delta}\ln^+\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|d\varphi \le$$

$$\le rR(r)\int\limits_{E\setminus E_\delta}\Phi(\varphi)d\varphi + o(R(r)) + \alpha_1(k)r\delta O(R(r)) + \alpha_2(k,f)r\delta.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{rR(r)}\int\limits_{E}\ln^+\left|f(re^{i\varphi}\sin\varphi)\right|d\varphi \le \int\limits_{E}\Phi(\varphi)d\varphi + \alpha_1(k)\delta A\,,$$

где A - некоторая константа.

Устремляя δ к нулю, получим неравенство г). Неравенства д) и е) доказываются аналогично. Теорема 2 доказана.

Полученные теоремы важны для изучения асимптотического поведения и свойств мероморфных функций, заданных над полуплоскостью, которые естественным образом возникают при решении дифференциальных уравнений и в теории самосопряженных операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.

2. Львова С.В. О величинах отклонения мероморфных функций и целых кривых над полуплоскостью // Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. – К.: Наукова думка, 1981. – С. 67 - 81.