

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ПОНТРЯГИНА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БОЛЬШОЙ СИСТЕМЫ

Т.С. Писклова  
(представил д.т.н., проф. О.Е. Федорович)

Рассматривается вопрос оценки хозяйственной деятельности предприятия на основе определения оптимального соотношения между инвестициями и потреблением. При решении полученной оптимизационной задачи используется принцип максимума Понтрягина с вводом функции Гамильтона.

Хозяйственная деятельность предприятия любой формы собственности (имеются в виду производители продукции) неотделима от основных показателей: полученная прибыль и инвестиции. Наиболее приемлемыми математическими методами, используемыми при определении оценки хозяйственной деятельности предприятия, являются методы многоцелевой оптимизации планов функционирования предприятия, интегральный метод факторного анализа и матричный метод.

Производственные показатели в общем виде можно представить в векторной форме

$$\mathbf{\Pi}(t) = \mathbf{C}(t) + \mathbf{I}(t), \quad (1)$$

где

$$\mathbf{I}(t) = \mu \Phi_0(t) + \frac{d\Phi_0}{dt};$$

(2)

$\mathbf{\Pi}(t)$  - прибыль;  $\mathbf{I}(t)$  - инвестиции;  $\mu$  - норма амортизации;  $\Phi_0(t)$  - вектор основных производственных фондов;  $\mathbf{C}(t)$  - вектор потребления.

Капитальные вложения используются как для покрытия амортизационных отчислений, так и для увеличения объема капиталовложений.

Хозяйственная деятельность любого производителя характеризуется производственной функцией

$$\Pi = f(\Phi_0, T), \quad (3)$$

где  $T$  - трудовые ресурсы.

Эта функция предположительно однородная первой степени, т.е.

$$f(a\Phi_0, aT) = af(\Phi_0, T) = a\Pi \quad (4)$$

и, если  $a = \frac{1}{T}$ , то получим

$$\frac{\Pi}{T} = f\left(\frac{\Phi_0}{T}, 1\right) = f\left(\frac{\Phi}{T}\right). \quad (5)$$

Кроме того, большая экономическая система (каким является производственное предприятие) не изменяет в период времени  $t_0$  от  $t_1$  ( $t_0 \leq t_1$ ) свои параметры. Значит

$$\begin{cases} \frac{df}{d\Phi_0} > 0; & \frac{d^2\varphi}{d\Phi_0^2} < 0; \\ \frac{df}{dT} > 0; & \frac{d^2\varphi}{dT^2} < 0, \end{cases} \quad (6)$$

а изменение трудовых ресурсов приводит к уравнениям:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = t_p; \quad (7)$$

$$C(t) = \frac{d\Phi_0}{dt} + (\mu + t_p)\Phi_0 = \frac{d\Phi_0}{dt} + \lambda\Phi_0; \quad (8)$$

$$\lambda = \mu + t_p. \quad (9)$$

Анализ (8) показывает, что, если:

1)  $t_p < 0$ ;  $\lambda > 0$ , то фондовооруженность увеличивается за счет капитальных вложений и уменьшения трудовых ресурсов производственных фондов;

2)  $t_p < 0$ ;  $\lambda = 0$ , то фондовооруженность не изменятся даже при нулевых капитальных вложениях и все инвестиции идут на прирост фондовооруженности;

3)  $t_p < 0$ ;  $\lambda < 0$ , то фондовооруженность увеличивается без инвестиций за счет уменьшения численности работающих.

Из уравнений (1), (3), (8) получаем дифференциальное уравнение модели экономического роста

$$T(\dot{n}(t)) = C(t) + \frac{d\Phi_0}{dt} + \lambda\Phi_0(t). \quad (10)$$

Рассматривая уравнение (10), можно установить, что  $C(t)$  является управляющим параметром и управление должно обеспечивать распределение прибыли, при котором в последующем должен быть получен максимальный объем прибыли. Кроме того, управляющий параметр определяет потребление. В связи с этим, вводим понятие "полезность потребления"

$$И = И(C(t)). \quad (11)$$

Оптимальность решения достигается при

$$\frac{d\Pi(C)}{dC} = \Pi'(C) > 0, \quad (12)$$

где  $\Pi''(C) < 0$ ;

$$0 < C < \infty.$$

Показателем кривизны функции (11) является эластичность предельной полезности

$$\tau(C) = -C \frac{\Pi''(C)}{\Pi'(C)}. \quad (13)$$

Следует иметь в виду, что для каждого работающего предпочтительно наибольшее потребление в ближайшее время и поэтому вводим функцию весов для полезности

$$\omega = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\zeta(t-t_0)} \Pi(C(t)) dt, \quad (14)$$

где  $\zeta$  - параметр заинтересованности.

Задачу оптимального управления  $C^*(t)$  можно представить системой уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{C(t)} \omega = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\zeta(t-t_0)} \Pi(C(t)) dt; \\ \frac{d\Phi_0}{dt} = f(\Phi_0) = \lambda\Phi_0 - C; \\ \Phi_0(t_0) = \Phi_0; \\ 0 \leq C \leq f(\Phi_0). \end{array} \right. \quad (15)$$

Решение этой задачи проводится с использованием принципа максимума Понтрягина и функции Гамильтона. Принцип максимума Понтрягина гласит, что необходимым условием оптимальности допустимого управления  $\mathbf{I}(t)$  и решения  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  является существование неисчезающего решения  $\hat{\Psi}(t)$ , которое принадлежит  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  и  $\hat{\mathbf{I}}(t)$  и удовлетворяет системе сопряжения таким образом, что для всех  $t(t_0 \leq t \leq T)$  функция Гамильтона  $\hat{\mathbf{H}}$  принимает по переменной  $\mathbf{I}$  свое наибольшее значение.

Опишем алгоритм решения рассматриваемой задачи оптимизации.

1. Определяют начальные условия  $t = t_0$ . Интегральный функционал расширяют и вводят функцию Гамильтона  $\mathbf{H}$ .

2. Из условия  $\frac{d\mathbf{H}}{dx} = 0$  определяют оптимальное управление  $\hat{\mathbf{I}}$ .

3. Из условия  $\overset{\circ}{\Psi} = -\frac{dH}{dx}$  получают дифференциальное уравнение сопряженной системы.

4. Оптимальное управление  $\overset{\circ}{Y}$  подставляют в полученное дифференциальное уравнение.

5. Из краевых условий для  $x$ :

$$\begin{aligned} x_i(t_0) &= x_{i0}, \quad i = 1, \dots, P \leq I; \\ x_k(T) &= x_{kT}, \quad k = 1, \dots, q \leq I, \end{aligned}$$

а также из условия трансверсальности для  $\Psi$  определяют неизвестные постоянные интегрирования. При этом условие трансверсальности для  $\Psi(t)$  определяется в момент  $t = T$ .

Рассмотрим функцию Гамильтона

$$H = e^{-\zeta(t-t_0)} \{H(c) + q[f(\Phi_0) - \lambda\Phi - C]\}, \quad (16)$$

где  $q$  - сопряженная переменная, которая интегрируется как стоимость дополнительных производственных фондов.

Из принципа максимума Гамильтона  $\frac{dH}{dc} = 0$  следует, что функция

$$q = H'(C) \quad (17)$$

является предельной “полезности потребления” на одного работающего.

Рассматривая условие

$$\frac{dH}{d\Phi_0} = -\frac{d}{df}(e^{-\zeta(t-t_0)} q(t)), \quad (18)$$

получаем

$$\frac{dq}{dt} = -[f'(\Phi_0) - (\lambda + \zeta)]q. \quad (19)$$

Из (19) находим

$$f'(\Phi_0) + \frac{1}{q} \frac{dq}{dt} - \mu - I - \zeta = 0. \quad (20)$$

Подставляя (17) в (20), получим

$$\frac{1}{q} \frac{dq}{dt} = \frac{H''(C)}{H'(C)} \frac{dC}{dt} = -\tau(C) \frac{1}{C} \frac{dC}{dt}. \quad (21)$$

Дифференциальное уравнение для управляющего параметра имеет вид

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{\zeta(C)} [f'(\Phi_0) - (\lambda + \zeta)]. \quad (22)$$

Оптимальные траектории  $\Phi^*$  и  $C^*(t)$  должны удовлетворять дифференциальным уравнениям (19) и (22).

Интеграл заинтересованности имеет конечный верхний предел  $t_1$  и в конце планового периода фондовооруженность должна быть не меньше фиксированного объема  $\Phi_1$ . Тогда условие для сопряженной величины определяется как

$$e^{-\zeta(t-t_0)} q(t_1)(\Phi(t_1) - \Phi_1) = 0. \quad (23)$$

Таким образом, в случае, если в момент  $t_1$  достигается  $\Phi_1$ , то траектория оптимального роста удовлетворит магистральному свойству, т.е. если плановый период достаточно длинный, то траектория потребления на одного работника и фондовооруженность в течении сколь угодно долгого времени находится вблизи линии равновесия, соответствующая сбалансированному росту или же находится в оптимальном конусе вокруг луча фон Неймана (принцип магистрального свойства).

Связь между прибылью и фондовооруженностью можно представить как

$$\Pi = v\Phi_0^\alpha, \quad (24)$$

где  $0 < \alpha < 1$ .

Функцию полезности потребления можно представить значением удельного веса фондов магистрального стимулирования

$$И(C) = m / e, \quad (25)$$

где  $m$  - объем фондов стимулирования (без учета фондов развития производства).

Тогда задача оптимального управления представляется как:

$$\begin{cases} \max_{e(t)} \omega = \int_{t_0}^{\infty} e^{-(t-t_0)} \frac{m}{e}(t) dt; \\ \frac{d\Phi_0}{dt} = f(\Phi_0) - \lambda\Phi_0 - C = v\Phi_0^\alpha - \lambda k - e; \\ \Phi_0(t_0) = \Phi_0; \\ 0 \leq C \leq f(\Phi_0). \end{cases} \quad (26)$$

Предположим, что функция “полезности потребления” линейна, т.е.

$$C(t) = a_0 + a_1 t. \quad (27)$$

Тогда  $q = И'(C) = a$ ,  $И''(C) = 0$ . При  $\tau = 0$   $И(C) = C$ . Принимаем  $\zeta = 1$ . Целевой функционал задачи будет иметь вид

$$\omega = \int_{t_0}^{\infty} e^{(t-t_0)} e(t) dt. \quad (28)$$

Естественно, потребление не может опускаться ниже допустимого минимума  $\bar{C}$ . Следовательно

$$\bar{C} \leq C(t) \leq f(\Phi_0). \quad (29)$$

При описанных ограничениях гамильтониан имеет вид

$$H = e^{-(t-t_0)} \{C(1-q) + q[f(\Phi_0) - f\Phi_0]\}, \quad (30)$$

и, как видно, линейно зависит от  $C$ . Значит, решение  $C^*$  при  $q > 1$  равно  $C$ , при  $q < 1$  равно  $C'(t)$ , а при  $q = 1$  равно  $f(\Phi_0)$ .

Дифференциальные уравнения (10) и (19) соответственно преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_0}{dt} &= f(\Phi_0) - \lambda\Phi_0 - C; \\ \frac{dq}{dt} &= -[f'(\Phi_0) - (\lambda + 1)]q. \end{aligned} \quad (31)$$

Система будет равновесна в точке  $(\Phi_0^*, q)$ , координаты которой можно определить при условии

$$\frac{d\Phi_0}{dt} = \frac{dq}{dt} = 0. \quad (32)$$

Учитывая (10), (19) и (22), получим

$$\begin{cases} f'(\Phi_0^*) = \lambda + 1; \\ q^* = 1; \\ C^* = f(\Phi_0^*) - \lambda\Phi_0^*. \end{cases} \quad (33)$$

Оптимальная траектория будет существовать, если

$$\bar{C} < C^*; \quad \Phi_0(0) = K_T,$$

где  $K_T$  - точка пересечения прямой  $C = \bar{C}$  и кривой  $\Pi = f(\Phi_0) - \lambda\Phi_0$ .

Правило поведения оптимальной траектории будет следующим:

- если начальное значение фондовооруженности меньше, чем в точке равновесия, то необходимо на потребление направить минимальную сумму из прибыли и обеспечить тем самым быстрое увеличение фондовооруженности;
- если достигнуто равновесие  $\Phi = \Phi_0^*$ , то потребление перейдет скачком на уровень

$$C^* = f(\Phi_0^*) - \lambda\Phi_0^*. \quad (34)$$

В большой экономической системе в показателях работы мгновенного скачка не может произойти, т.е. здесь необходим переходной период времени.

Если  $\Phi_0(0) < \Phi_0^* < \Phi_0$  и интеграл имеет предел  $t_1$  при постоянной предельной полезности, то магистральное свойство выполняется.

Кроме вышерассмотренной, возможна функция полезности

$$H(C) = C^\gamma. \quad (35)$$

где  $\gamma = m/e$ .

Тогда:

$$\begin{aligned} H'(C) &= \gamma C^{\gamma-1} > 0; \\ H''(C) &= \gamma^{\gamma-1} C^{\gamma-1} < 0, \end{aligned}$$

что соответствует (12), так как  $0 < \gamma < 1$ .

Эластичность предельной полезности описывается уравнением

$$\tau(C) = (\gamma - 1) > 0. \quad (36)$$

Стоимость дополнительных производственных фондов определяется формулой (17)

$$q = H'(C) = \gamma C^{\gamma-1} > 0. \quad (37)$$

Система дифференциальных уравнений (32, 33) при  $\zeta = 1$  примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = \frac{1}{\gamma-1} [\alpha v \Phi_0^{\alpha-1} - (\lambda+1)]; \\ \frac{d\Phi_0}{dt} = v \Phi_0^\alpha - \lambda \Phi_0 = C. \end{cases} \quad (38)$$

Условие  $\frac{de}{dt} = \frac{d\Phi_0}{dt} = 0$  приводит к решению

$$C^* = f(\Phi_0^*) - \lambda \Phi_0^* \quad (39)$$

и

$$f(\Phi_0^*) = \lambda + 1, \quad (40)$$

характеризующему траектории сбалансированности и роста.

В случае  $\Phi_0(0) < \Phi_0^*$  происходит увеличение фондовооруженности до достижения точки равновесия. При  $\Phi_0(0) \geq \Phi_0^*$  условие  $\frac{d\Phi_0}{dt} = 0$  выполняется до достижения границы траектории. При этом точка равновесия достигается быстрее при выполнении условия  $H > 0$ .

Изложенный подход применим для решения прикладных задач, в которых необходимо определять оптимальную траекторию управляемого объекта в необходимое состояние за кратчайшее время.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

2. Хофер Э., Лундерштадт Р. Численные методы оптимизации. – М.: Машиностроение, 1981. – 192с.

3. Бергстром А. Построение и применение экономических моделей. – М.: Прогресс, 1970. – 176с.

---