

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВОРОТА АВТОПОЕЗДА

В.М. Немировский  
(представил проф. В.А. Прокопов)

Рассматривается математическая модель поворота автопоезда, составленного из тягача и одноосного полуприцепа, в которой описываются все фазы поворота: вход в поворот, собственно поворот и выход из поворота.

Маневренность – одно из важнейших свойств подвижного агрегата. Нередко она обеспечивается построением подвижного агрегата по схеме автопоезда (АП). Основным элементом маневренности является поворот, состоящий, как известно, из трех фаз движения: входа в поворот, собственно поворота и выхода из поворота. Поэтому для решения различных задач использования АП нужна аналитическая модель поворота, в которой описывались бы все фазы маневра, а не только отдельные из них, как это сделано в [1 - 3].

Построим такую математическую модель для АП, составленного из тягача и одноосного полуприцепа. За основную точку тягача (рис. 1) примем его центр тяжести  $C$ , а полуприцепа – точку  $T$ , место сцепки тягача и полуприцепа. Считаем, что точка  $C$  движется по окружности радиуса  $R$ , а точка  $T$  – по окружности радиуса  $R_T = \sqrt{d_T^2 + R^2}$ , где  $d_T$  – расстояние  $C_0T_0$ . Начало абсолютной системы координат  $XOY$  совместим с мгновенным центром поворота, ось  $Y$  проведем через точки  $O$  и  $C_0$ , начальное положение АП изобразим прямой  $C_0T_0P_0$ , где  $P_0$  – центр оси полуприцепа. Начальное положение точки  $T_0$  относительно мгновенного центра поворота тягача  $O$  будем характеризовать углом  $U_0 = \text{arctg}(d_T / R)$  между линией  $T_0O$  и осью  $Y$ . Текущее положение точки  $T$  охарактеризуем углом  $u$ , который отсчитывается от линии  $T_0O$  в направлении оси  $X$ .

Тягач представляется двухосным агрегатом с передними поворотными колесами, движение которого описывается уравнениями [3]:

$$v_T = \sqrt{\frac{L_T \cdot K_{yB} \cdot d_T}{m_T \cdot (L_T - d_T)}};$$

$$R = \frac{L_T \cdot K_{yB} + m_T \cdot v_T^2 \cdot \left(1 - \frac{(L_T - d_T) \cdot (K_{yП} + K_{yB})}{L_T \cdot K_{yB}}\right)}{\alpha_{П} \cdot K_{yП}},$$

где  $V_T, m_T, L_T$  - соответственно скорость, масса и длина тягача;  
 $\alpha_{\Pi}$  - угол поворота передних управляемых колес тягача;  
 $K_{УП}, K_{УВ}$  - коэффициенты увода колес соответственно передней  
(П) и задней (В) осей тягача;  
 $R$  - радиус траектории характерной точки тягача.

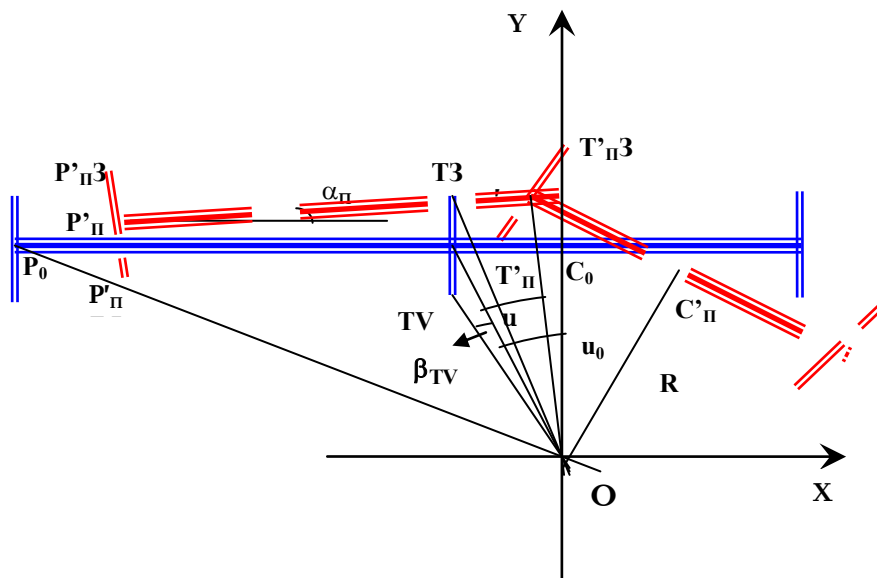


Рис.1. Схема автопоезда при входе в поворот

Поворот АП как сочлененной машины усложняется тем, что тягач и полуприцеп движутся по различным траекториям, а посему имеют разные фазы движения. Примем, что тягач сразу с началом движения входит в поворот, т.е. управляемые колеса передней оси мгновенно отклоняются на требуемый угол, а при выходе тягача из поворота они мгновенно устанавливаются вдоль продольной оси машины. Считаем, что полуприцеп не влияет на движение тягача, а тягач движется с постоянной линейной скоростью  $V_T$  и угловой скоростью  $\omega_T = \frac{V_T}{R}$ . Поэтому угол  $u$  изменяется по закону  $u = \omega_T \cdot \tau$ . Относительно полуприцепа в качестве рабочей гипотезы предположим, что он вводится в поворот тягачом в том момент, когда точка  $T$  сцепки пересечет ось  $Y$ . В этот момент полуприцеп займет положение, параллельное оси  $X$ .

Вывод полуприцепа из поворота начнется тогда, когда продольная ось тягача станет перпендикулярной оси  $X$ , а точка  $C$ , его центр тяжести,

совпадет с этой осью. Тогда текущее положение АП (рис.1) на входе в поворот определяется координатами точек  $C_{\Pi}'$ ,  $T_{\Pi}'$ ,  $P_{\Pi}'$  ( $\Pi$  – поворот, штрих – текущее значение).

Математическая модель входа АП в поворот может быть представлена системой уравнений (1) и выражениями координат точек  $C_{\Pi}'$ ,  $T_{\Pi}'$ ,  $P_{\Pi}'$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{C_{\Pi}} = R \cdot \sin u; \quad Y_{C_{\Pi}} = R \cdot \cos u; \\ X_{T_{\Pi}} = -R_T \cdot \sin(u_0 - u); \quad Y_{T_{\Pi}} = R_T \cdot \cos(u_0 - u); \\ X_{P_{\Pi}} = -L_{III} \cdot \cos \alpha_{\Pi} - R_T \cdot \sin(u_0 - u); \\ Y_{P_{\Pi}} = R_T \cdot \cos(u_0 - u) - L_{III} \cdot \sin \alpha_{\Pi}; \\ \alpha_{\Pi} = \arcsin \left[ \frac{2 \cdot R_T}{L_{III}} \cdot \sin \frac{u}{2} \cdot \sin(u_0 - u) \right], \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $L_{III} = P \cdot T$  - длина полуприцепа.

Положение габаритных точек АП  $T'_{\Pi 3}$ ,  $T'_{\Pi V}$ ,  $P'_{\Pi 3}$ ,  $P'_{\Pi V}$ , описывается их координатами:

$$Y_{T'_{\Pi 3}} = R_T \cdot \cos(u_0 - u - \beta_{T3}); \quad X_{T'_{\Pi 3}} = -R_T \cdot \sin(u_0 - u - \beta_{T3});$$

$$R_{T3} = \sqrt{d_T^2 + \left(R + \frac{W_T}{2}\right)^2}; \quad \beta_{T3} = \arccos \frac{R_{T3}^2 + R_T^2 - \left(\frac{W_T}{2}\right)^2}{2 \cdot R_{T3} \cdot R_T};$$

$$X_{T'_{\Pi V}} = R_{TV} \cdot \sin(u_0 - u + \beta_{TV}); \quad Y_{T'_{\Pi V}} = R_{TV} \cdot \cos(u_0 - u - \beta_{TV});$$

$$R_{TV} = \sqrt{d_T^2 + \left(R - \frac{W_T}{2}\right)^2}; \quad \beta_{TV} = \arccos \frac{R_{TV}^2 + R_T^2 - \left(\frac{W_T}{2}\right)^2}{2 \cdot R_{TV} \cdot R_T};$$

$$X_{P'_{\Pi 3}} = X_{P_{\Pi}} - \frac{W_{III}}{2} \cdot \sin \alpha_{\Pi}; \quad Y_{P'_{\Pi 3}} = Y_{P_{\Pi}} + \frac{W_{III}}{2} \cdot \cos \alpha_{\Pi};$$

$$X_{P'_{\Pi V}} = X_{P_{\Pi}} + \frac{W_{III}}{2} \cdot \sin \alpha_{\Pi}; \quad Y_{P'_{\Pi V}} = Y_{P_{\Pi}} - \frac{W_{III}}{2} \cdot \cos \alpha_{\Pi};$$

где  $W_T$  и  $W_{III}$  - ширина соответственно тягача и полуприцепа.

Поворот полуприцепа (рис.2) начинается с момента, когда  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{Y}_T = \mathbf{R}_T$ ,  $\mathbf{X}_T = \mathbf{0}$ ,  $\alpha = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{X}_{P_K} = \mathbf{L}_{III}$ ,  $\mathbf{Y}_{P_K} = \mathbf{R}_T$ .

Тогда поворот АП опишется текущими значениями координат характерных точек  $\mathbf{C}_K, \mathbf{T}'_K, \mathbf{P}'_K$ :

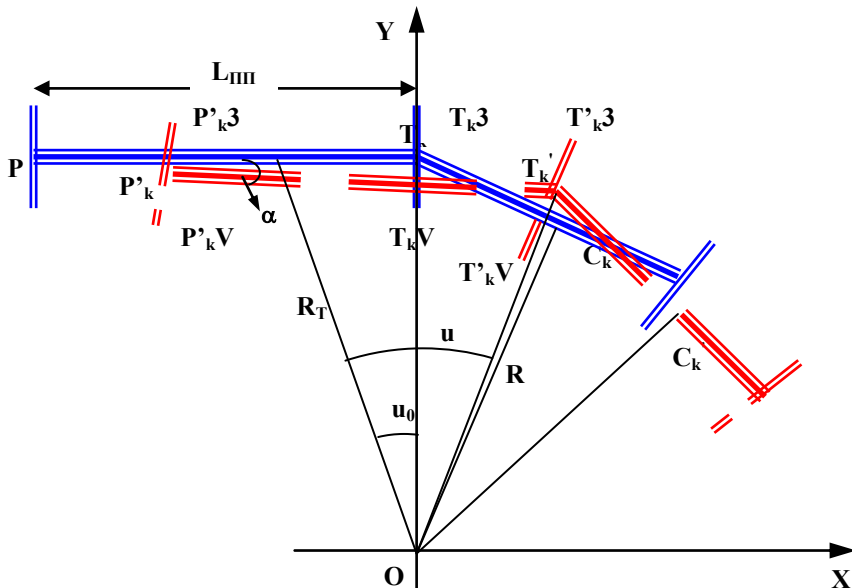


Рис.2. Схема поворота автопоезда

$$\alpha_K = \arcsin \left\{ \frac{2 \cdot R_T \cdot \sin^2 \left( \frac{u - u_0}{2} \right)}{\sqrt{L_{III}^2 + 4 \cdot R_T^2 \cdot \sin^2 \left( \frac{u - u_0}{2} \right) + 2 \cdot L_{III} \cdot R_T \cdot \sin(u - u_0)}} \right\};$$

$$X_{C_K} = R \cdot \sin(u + u_0); \quad Y_{C_K} = R \cdot \cos(u + u_0);$$

$$X_{T_K} = R \cdot \sin(u - u_0); \quad Y_{T_K} = R \cdot \cos(u - u_0);$$

$$X_{P_K} = L_{III} \cdot \cos \alpha_K + X_{T_K}; \quad Y_{P_K} = R_T - (L_{III} - X_{P_K}) \cdot \operatorname{tg} \alpha_K.$$

Текущие координаты габаритных точек тягача и полуприцепа могут быть вычислены по выражениям:

$$X_{T_{K3}} = R_{T3} \cdot \sin(u - u_0 + \beta_{T3});$$

$$Y_{TK3} = R_{T3} \cdot \cos(u - u_0 + \beta_{T3});$$

$$X_{TKV} = R_{TV} \cdot \sin(u - u_0 - \beta_{TV});$$

$$Y_{TKV} = R_{TV} \cdot \cos(u - u_0 - \beta_{TV}).$$

Выход из поворота АП (рис. 3) осуществляется с постоянной скоростью  $V$  тягача.

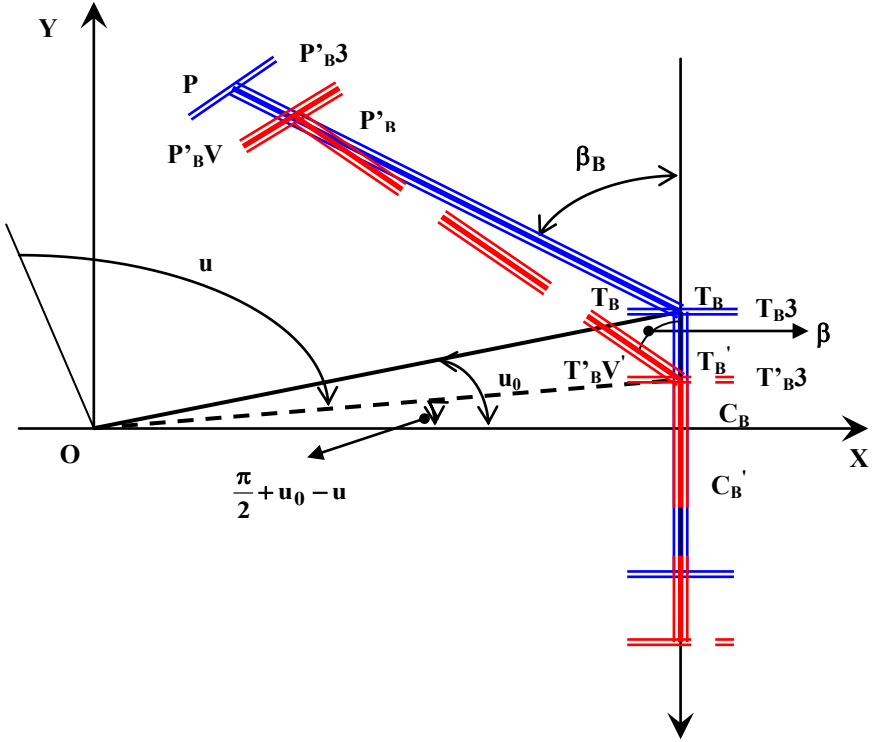


Рис. 3. Схема выхода автопоезда из поворота

Положение АП описывается координатами точек  $C'_B, T'_B, P'_B$ :

$$X_{C'_B} = R; \quad Y_{C'_B} = -V \cdot \tau;$$

$$X_{T'_B} = R; \quad Y_{T'_B} = R_T \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + u_0 - u\right) = d_T - V \cdot \tau;$$

$$X_{P'_B} = R - L_{III} \cdot \sin\beta; \quad Y_{P'_B} = L_{III} \cdot \cos\beta + R_T \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + u_0 - u\right);$$

$$\beta = \arcsin \frac{L_{III} \cdot \sin \beta_B}{\sqrt{L_{III}^2 + V^2 \cdot \tau^2 - 2 \cdot L_{III} \cdot V \cdot \tau \cdot \cos \beta_B}},$$

где  $\beta_B$  - значение угла  $\beta$  в момент начала выхода АП из поворота;

$\tau$  - время.

Отметим, что

$$\beta_B = \arcsin \frac{R - X_{PB}}{L_{III}},$$

где  $X_{PB}, Y_{PB}$  - координаты точки  $P$  полуприцепа к началу выхода из поворота;

$$X_{PB3} = X_{PB} + \frac{W_{III}}{2} \cdot \cos \beta; \quad Y_{PB3} = Y_{PB} + \frac{W_{III}}{2} \cdot \sin \beta;$$

$$X_{PBV} = X_{PB} - \frac{W_{III}}{2} \cdot \cos \beta; \quad Y_{PBV} = Y_{PB} - \frac{W_{III}}{2} \cdot \sin \beta.$$

Закон изменения угла  $u$  можно найти из треугольника  $OT'_B C_B$ :

$$u = \frac{\pi}{2} + u_0 - \arctg \frac{d_T - V \cdot \tau}{R}.$$

Координаты габаритных точек тягача и полуприцепа могут быть определены с помощью выражений:

$$X_{TB3} = R + \frac{W_T}{2}; \quad X_{TV3} = R - \frac{W_T}{2}; \quad Y_{TB3} = Y_{TV3} = Y_{TB}.$$

Поворот заканчивается, когда  $\beta$  близко к 0 ( $1^\circ - 2^\circ$ ).

Математическая модель имеет ту особенность, что описание координат характерных точек автопоезда сделано для каждой из фаз в предположении, что координаты АП в начале фазы известны. Поэтому для определения траектории какой-либо точки нужно решение на одной фазе сшивать с решением на другой.

Координаты точки  $P$  полуприцепа вычисляются пошагово. Причем, на каждом  $i$ -м шаге вычислений используются координаты, полученные на  $i - 1$  шаге.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Закин Я.Х. Маневренность автомобиля и автопоезда. – М.: Транспорт, 1986. – 136 с.
2. Марголин И.И. Криволинейное движение автопоезда // Автомобильная промышленность. – 1972. – №2.

3. Фаробин Я. Е. Теория поворота колесных машин. – М.: Машиностроение, 1970. – 120 с.

*Поступила в редколлегию 5.09.2000*

---