УДК 621.327

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛИАДИЧЕСКИХ КОДОВ ТРАНСФОРМАНТ ДКП К ОШИБКАМ В КАНАЛЕ СВЯЗИ

проф. А.В. Королев, В.В. Баранник

Выводится аналитическое выражение для определения значения отношения сигнал/шум при декодировании полиадических кодов трансформант дискретного косинусного преобразования (ДКП). Предполагается, что кодовые комбинации передаются по каналу связи с ошибками.

Определим помехоустойчивость сжатых данных к ошибкам в канале связи. Для этого вычислим отношение сигнал/шум $\mathbf{h}$:

$$\mathbf{h} = 10\,\ell\mathbf{og}_2(\sigma_x^2 / \sigma_ш^2), \qquad (1)$$

где σ_x^2 - дисперсия отсчетов дискретно-непрерывного сигнала на входе системы передачи данных; $\sigma_ш^2$ - сумма дисперсий величин погрешностей, вызванных процессом квантования, сжатия и передачи по каналу связи.

В качестве модели канала выберем двоично-симметричный канал (ДСК). Предполагается, что ошибки в двоичных разрядах возникают независимо друг от друга с вероятностью $\mathbf{p_0}$.

Для метода сжатия, изложенного в [1], кодовая комбинация состоит из матриц полиадических кодов. Полиадические коды делятся на информационные и служебные.

К информационным полиадическим кодам относятся межтрансформантные коды. В состав служебных полиадических кодов входят коды матриц признаков столбцов, знаков фаз, минимальных элементов, максимальных значений строк трансформант. Следует учитывать, что ошибки в служебной части кода вносят больший вклад в суммарную ошибку восстановления изображения и требуют большей помехозащищенности при передачи по каналу с помехами. При ошибках в информационной части кодовой комбинации существует возможность восстановить изображение с контролируемой погрешностью.

Для кодовой комбинации, состоящей из служебной и информационной части, дисперсия $\sigma_{ш}^2$ ошибки вычисляется по формуле [2]:

$$\sigma_{ш}^2 = (1 - P_c)\sigma_{и}^2 + P_c \sigma_c^2, \qquad (2)$$

где $\sigma_{и}^2, \sigma_c^2$ - суммарные дисперсии погрешностей, вносимых ошибками квантования, сжатия и канала в информационной и служебной части соответственно.

Если ошибки аппроксимации при сжатии достаточно малы и выполняется неравенство $\sigma_{сж}^2 / \sigma_x^2 < 1$, то справедливо равенство [2]:

$$\sigma_{и}^2 = \sigma_{сж}^2 + \sigma_{кв}^2 + \sigma_{к}^2, \qquad (3)$$

где $\sigma_{сж}^2$, $\sigma_{кв}^2$, $\sigma_{к}^2$ - дисперсии ошибок, возникающих соответственно при сжатии, квантовании и в канале связи.

В качестве дисперсии σ_c^2 принимают дисперсию σ_x^2 исходного процесса $x(t)$ [2]. Это объясняется тем, что при искажении служебной части кода становится невозможным восстановление изображения с контролируемой погрешностью.

Определим суммарную дисперсию $\sigma_{и}^2$ погрешности, вызванную ошибками в информационной части кода. В декодере источника по принятому полиадическому коду N_η восстанавливаются элементы η - го столбца $\{a_{i\eta}\}$, если N_η сформировано для одного столбца. Если N_η - является полиадическим кодом нескольких столбцов, то восстанавливается подмассив (размером $n_b \times n_b$) $\{a_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n_b}$. Тогда дисперсия $\sigma_{N_\eta}^2$, вызванная погрешностью из-за ошибок в канале связи при декодировании кода N_η, равна

$$\begin{cases} \sigma_{N_\eta}^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \sigma_{e_{i\eta}}^2 \right) P_{No}, & \text{если } N_\eta \in N_{(1)}; \\ \sigma_{N_\eta}^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{m_b} \sum\limits_{j=1}^{n_b} \sigma_{e_{ij}}^2 \right) P_{No}, & \text{если } N_\eta \in N_{(2)}, \end{cases} \qquad (4)$$

где P_{N_o} - вероятность случайного события, состоящего в том, что в коде N_η произойдет ошибка. Вероятность такого события равна $P_{N_o} = 1 - (1 - p_0)^M$; $\sigma_{e_{ij}}^2$ - дисперсия погрешности, возникающей при восстановлении величины a_{ij} вследствие возникновения ошибки в коде N_η; m - длина столбца; M - длина полиадического кода.

Суммарная дисперсия погрешности $\sigma^2_{N_k}$ при декодировании всех кодов N_η равна $\sigma^2_{N_k} = \sum_{\eta=1}^{b} \sigma^2_{N_\eta}$, где **b** - число подмассивов, для которых вычисляется один код. Дисперсия ошибки $\sigma^2_k(y_{ij})$ отсчета y_{ij} связана с дисперсией ошибки в кодирующем ее числе a_{ij} соотношением

$$\sigma^2_k(y_{ij}) = \Delta^2_{cp} \sigma^2_{e_{ij}} ,$$

где Δ^2_{cp} - шаг равномерного квантования, равный $\Delta^2_{cp} = 12\sigma^2_{кв}$. Суммарная дисперсия для всех компонент ДКП y_{ij} равна $\sigma^2_к(y) = \Delta^2_{cp}\, \sigma^2_{N_k}$.

Дисперсии σ^2_k на приемной стороне после обратного ДКП равна

$$\sigma^2_к = \varphi^{-1}_{ДКП}\left\{\Delta^2_{cp} \sigma^2_{N_k}\right\}, \tag{5}$$

где $\varphi^{-1}_{ДКП}$ - оператор обратного преобразования ДКП.

Найдем дисперсию $\sigma^2_{e_{ij}}$, вызванную ошибками в числе a_{ij}. Для этого дадим определение и докажем утверждение.

Определение. Величина e_{ij} погрешности, образующейся при восстановлении по числу N^* значения величины a^*_{ij}, равна

$$e_{\eta ij} = a_{\eta\, ij} - a^*_{\eta\, ij} , \tag{6}$$

где a^*_{ij} - ошибочно декодированное исходное число a_{ij}.

Значение дисперсии $\sigma^2_{e_{ij}}$ можно получить, если известны пределы изменения значений e_{ij}. Для определения этих пределов сформулируем и докажем следующее утверждение.

Утверждение. Абсолютная величина погрешности, вызванная ошибкой в полиадическом коде при его передачи и обратном преобразовании, в общем случае не превышает величины $\lambda_i - 1$, если N_η вычисляется для одного столбца и $\delta_{\eta ij} - 1$, если N_η найдено для нескольких столбцов:

1) $\left| e_{ij} \right| \le \lambda_i - 1,$ если $N_\eta \in N_{(1)}$; 2) $\left| e_{ij} \right| \le \delta_{ij} - 1,$ если $N_\eta \in N$.

Доказательство. Докажем сначала пункт 1 утверждения. Для $N_{(1)}$

процедура декодирования задается выражением $\mathbf{a}_{ij} = \left[\frac{N_\eta}{p_i}\right] - \left[\frac{N_\eta}{p_i \lambda_i}\right]\lambda_i$, где величина p_i является функцией от системы оснований λ_i.

Если в результате ошибки в канале передачи принято число N^*, то вместо $\mathbf{a}_{ij}$ будет получено $\mathbf{a}^*_{ij}$, т.е. $\mathbf{a}^*_{ij} = \left[\frac{N_\eta \pm \varepsilon}{p_i}\right] - \left[\frac{N_\eta \pm \varepsilon}{p_i \lambda_i}\right]\lambda_i$. Введем величину $A = \frac{N_\eta \pm \varepsilon}{p_i}$. Тогда $\mathbf{a}^*_{ij} = [A] - \left[\frac{A}{\lambda_i}\right]\lambda_i$. Отсюда $0 \le \mathbf{a}^*_{ij} \le \lambda_i - 1$. Но поскольку по определению $0 \le \mathbf{a}_{ij} \le \lambda_i - 1$, то $0 \le \left|e_{ij}\right| \le \lambda_i - 1$. Аналогично доказывается пункт 2 утверждения $0 \le \left|e_{ij}\right| \le \delta_{ij} - 1$, где оценка δ_{ij} - определена в [3]. Утверждение доказано.

В соответствии с утверждением и предложенной в [2] методики значение дисперсии $\sigma^2_{e_{ij}}$ будет ограничена сверху величинами

$$\begin{cases} \sigma^2_{e_{ij}} = \dfrac{(\lambda_i - 1)^2}{3}, & \text{если } N_\eta \in N_{(1)}; \\ \sigma^2_{e_{ij}} = \dfrac{(\delta_{ij} - 1)^2}{3}, & \text{если } N_\eta \in N_{(2)}. \end{cases} \tag{7}$$

Поскольку e_{ij} изменяется в пределах **от** $-(\lambda_i - 1)$ **до** $(\lambda_i - 1)$ или **от** $-(\delta_{ij} - 1)$ **до** $(\delta_{ij} - 1)$, то возможны случаи, когда, $e_{ij} = 0$. Если $\lambda_i = 1$ (случай когда в массиве вся **i**-я строка нулевая), то $e_{ij} = 0$, т.е. происходит самокоррекция ошибок.

С учетом (7) получим выражение для определения дисперсии $\sigma^2_{и}$ погрешности, вызванной ошибками в информационной части кода

$$\begin{cases} \sigma^2_{k(1)} = \sum\limits_{\eta=1}^{\bar{n}1} \left\{ 4\sigma^2_{кв} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_{i\eta} - 1)^2 \right) P_{N_o} \right\}, & \text{если } N_\eta \in N_{(1)}; \\ \sigma^2_{k(2)} = \sum\limits_{\eta=1}^{\bar{n}2} \left\{ 4\sigma^2_{кв} \left(\sum\limits_{i=1}^{n_b} \sum\limits_{j=1}^{n_b} (\delta_{\eta ij} - 1)^2 \right) P_{No} \right\}, & \text{если } N_\eta \in N_{(2)}. \end{cases}$$

$$\sigma^2_{и} = \sigma^2_{кв} + \varphi^{-1}_{ДКП}\left\{ \sigma^2_{k(1)} + \sigma^2_{k(2)} \right\} + \sigma^2_{сж}, \tag{8}$$

где $\overline{\mathbf{n}}_1, \overline{\mathbf{n}}_2$ - математическое ожидание количества полиадических кодов, вычисляемых соответственно для одного и нескольких столбцов.

Если при сжатии видеоданных компоненты ДКП не сглаживаются, то ошибка $\mathbf{e_{ij}}$ равна нулю. Отсюда следует, что дисперсия $\sigma^2_{\text{сж}} = \mathbf{0}$. Тогда формула (8) запишется в виде

$$\sigma^2_{\text{и}} = \sigma^2_{\text{кв}} + \varphi^{-1}\left\{\sigma^2_{k(1)} + \sigma^2_{k(2)}\right\} \quad . \tag{9}$$

Подставляя выражения (7) и (9) в (1), получим выражение для определения значения отношения сигнал/шум $\mathbf{h}$ на приемной стороне

$$\mathbf{h} = \frac{\sigma^2_x}{(1-P_c)\left(\sigma^2_{\text{кв}} + \left(\varphi^{-1}\left\{4\sigma^2_{\text{кв}}\left(\sum\limits_{\eta=1}^{\bar{n}1}(\lambda_i - 1)^2 + \sum\limits_{\eta=1}^{\bar{n}2}\left(\delta_{\eta\, ij} - 1\right)^2\right)P_{N_o}\right\} \Big/ mn\right)\right) + P_c\sigma^2_x} \; .$$

Определим количество корректирующих разрядов, требуемых для обеспечения заданного значения ОСШ. Для этого введем понятие вероятности $\mathbf{p_{0k}}$ случайного события в том, что кодовая комбинация будет декодирована ошибочно при использовании корректирующих кодов [2]:

$$p_{0k} = 1 - (1 - P_M)^{1/k} \, ,$$

где $\mathbf{P_M}$ - вероятность случайного события в том, что кодовая комбинация, состоящей из **M** бит, будет декодирована правильно;

k - число корректирующих разрядов.

Вероятность $\mathbf{p_{0k}}$ находится для информационной ($\mathbf{k = r_i}$) и адресной ($\mathbf{k = r_a}$) частей кодовой комбинации.

Таким образом, получено выражение для определения значения отношения сигнал/шум (ОСШ) на выходе канала передачи с ошибками. На основе этого выражения можно дать рекомендации по количеству корректирующих разрядов, необходимых для обеспечения заданного значения ОСШ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Королев А.В., Баранник В.В. Метод комплексной обработки изображений // ИУСЖТ. –1999. – №5. – С.10 - 17.

2.Свириденко В.А. Анализ систем со сжатием данных. – М.: Связь, 1978. – 183 с.

3. Королев А.В., Баранник В.В. Модифицированный метод адаптивного нумерационного кодирования // ИУСЖТ. – 1999. – №4. – С. 19 - 27.

Поступила в редколлегию 20.10.2000