



УДК 621.327

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛИАДИЧЕСКИХ КОДОВ ТРАНСФОРМАНТ ДКП К ОШИБКАМ В КАНАЛЕ СВЯЗИ

проф. А.В. Королев, В.В. Баранник

Выводится аналитическое выражение для определения значения отношения сигнал/шум при декодировании полиадических кодов трансформант дискретного косинусного преобразования (ДКП). Предполагается, что кодовые комбинации передаются по каналу связи с ошибками.

Определим помехоустойчивость сжатых данных к ошибкам в канале связи. Для этого вычислим отношение сигнал/шум h :

$$h = 10 \log_2 (\sigma_x^2 / \sigma_{ш}^2), \quad (1)$$

где σ_x^2 - дисперсия отсчетов дискретно-непрерывного сигнала на входе системы передачи данных; $\sigma_{ш}^2$ - сумма дисперсий величин погрешностей, вызванных процессом квантования, сжатия и передачи по каналу связи.

В качестве модели канала выберем двоично-симметричный канал (ДСК). Предполагается, что ошибки в двоичных разрядах возникают независимо друг от друга с вероятностью p_0 .

Для метода сжатия, изложенного в [1], кодовая комбинация состоит из матриц полиадических кодов. Полиадические коды делятся на информационные и служебные.

К информационным полиадическим кодам относятся межтрансформантные коды. В состав служебных полиадических кодов входят коды матриц признаков столбцов, знаков фаз, минимальных элементов, максимальных значений строк трансформант. Следует учитывать, что ошибки в служебной части кода вносят больший вклад в суммарную ошибку восстановления изображения и требуют большей помехозащищенности при передаче по каналу с помехами. При ошибках в информационной части кодовой комбинации существует возможность восстановить изображение с контролируемой погрешностью.

Для кодовой комбинации, состоящей из служебной и информационной части, дисперсия $\sigma_{ш}^2$ ошибки вычисляется по формуле [2]:

$$\sigma_{ш}^2 = (1 - P_c) \sigma_n^2 + P_c \sigma_c^2, \quad (2)$$

где σ_n^2, σ_c^2 - суммарные дисперсии погрешностей, вносимых ошибками квантования, сжатия и канала в информационной и служебной части соответственно.

Если ошибки аппроксимации при сжатии достаточно малы и выполняется неравенство $\sigma_{сж}^2 / \sigma_x^2 < 1$, то справедливо равенство [2]:

$$\sigma_n^2 = \sigma_{сж}^2 + \sigma_{кв}^2 + \sigma_k^2, \quad (3)$$

где $\sigma_{сж}^2, \sigma_{кв}^2, \sigma_k^2$ - дисперсии ошибок, возникающих соответственно при сжатии, квантовании и в канале связи.

В качестве дисперсии σ_c^2 принимают дисперсию σ_x^2 исходного процесса $x(t)$ [2]. Это объясняется тем, что при искажении служебной части кода становится невозможным восстановление изображения с контролируемой погрешностью.

Определим суммарную дисперсию σ_n^2 погрешности, вызванную ошибками в информационной части кода. В декодере источника по принятому полиадическому коду N_η восстанавливаются элементы η -го столбца $\{a_{i\eta}\}$, если N_η сформировано для одного столбца. Если N_η является полиадическим кодом нескольких столбцов, то восстанавливается подмассив (размером $n_b \times n_b$) $\{a_{ij}\}, i, j = \overline{1, n_b}$. Тогда дисперсия $\sigma_{N_\eta}^2$, вызванная погрешностью из-за ошибок в канале связи при декодировании кода N_η , равна

$$\begin{cases} \sigma_{N_\eta}^2 = \left(\sum_{i=1}^m \sigma_{e_{i\eta}}^2 \right) P_{N_0}, & \text{если } N_\eta \in N(1); \\ \sigma_{N_\eta}^2 = \left(\sum_{i=1}^{m_b} \sum_{j=1}^{n_b} \sigma_{e_{ij}}^2 \right) P_{N_0}, & \text{если } N_\eta \in N(2), \end{cases} \quad (4)$$

где P_{N_0} - вероятность случайного события, состоящего в том, что в коде N_η произойдет ошибка. Вероятность такого события равна $P_{N_0} = 1 - (1 - p_0)^M$; $\sigma_{e_{ij}}^2$ - дисперсия погрешности, возникающей при восстановлении величины a_{ij} вследствие возникновения ошибки в коде N_η ; m - длина столбца; M - длина полиадического кода.

Суммарная дисперсия погрешности $\sigma_{N_k}^2$ при декодировании всех кодов N_η равна $\sigma_{N_k}^2 = \sum_{\eta=1}^b \sigma_{N_\eta}^2$, где b - число подмассивов, для которых вычисляется один код. Дисперсия ошибки $\sigma_k^2(y_{ij})$ отсчета y_{ij} связана с дисперсией ошибки в кодирующем ее числе a_{ij} соотношением

$$\sigma_k^2(y_{ij}) = \Delta_{cp}^2 \sigma_{e_{ij}}^2,$$

где Δ_{cp}^2 - шаг равномерного квантования, равный $\Delta_{cp}^2 = 12 \sigma_{кв}^2$. Суммарная дисперсия для всех компонент ДКП y_{ij} равна $\sigma_k^2(y) = \Delta_{cp}^2 \sigma_{N_k}^2$.

Дисперсии σ_k^2 на приемной стороне после обратного ДКП равна

$$\sigma_k^2 = \Phi_{ДКП}^{-1} \left\{ \Delta_{cp}^2 \sigma_{N_k}^2 \right\}, \quad (5)$$

где $\Phi_{ДКП}^{-1}$ - оператор обратного преобразования ДКП.

Найдем дисперсию $\sigma_{e_{ij}}^2$, вызванную ошибками в числе a_{ij} . Для этого дадим определение и докажем утверждение.

Определение. Величина e_{ij} погрешности, образующейся при восстановлении по числу N^* значения величины a_{ij}^* , равна

$$e_{ij} = a_{\eta ij} - a_{\eta ij}^*, \quad (6)$$

где a_{ij}^* - ошибочно декодированное исходное число a_{ij} .

Значение дисперсии $\sigma_{e_{ij}}^2$ можно получить, если известны пределы изменения значений e_{ij} . Для определения этих пределов сформулируем и докажем следующее утверждение.

Утверждение. Абсолютная величина погрешности, вызванная ошибкой в полиадическом коде при его передачи и обратном преобразовании, в общем случае не превышает величины $\lambda_i - 1$, если N_η вычисляется для одного столбца и $\delta_{\eta ij} - 1$, если N_η найдено для нескольких столбцов:

$$1) \left| e_{ij} \right| \leq \lambda_i - 1, \quad \text{если } N_\eta \in N(1); \quad 2) \left| e_{ij} \right| \leq \delta_{ij} - 1, \quad \text{если } N_\eta \in N.$$

Доказательство. Докажем сначала пункт 1 утверждения. Для $N(1)$

процедура декодирования задается выражением $\mathbf{a}_{ij} = \left[\frac{N_\eta}{p_i} \right] - \left[\frac{N_\eta}{p_i \lambda_i} \right] \lambda_i$, где величина p_i является функцией от системы оснований λ_i .

Если в результате ошибки в канале передачи принято число N^* , то вместо \mathbf{a}_{ij} будет получено \mathbf{a}_{ij}^* , т.е. $\mathbf{a}_{ij}^* = \left[\frac{N_\eta \pm \varepsilon}{p_i} \right] - \left[\frac{N_\eta \pm \varepsilon}{p_i \lambda_i} \right] \lambda_i$. Введем

величину $A = \frac{N_\eta \pm \varepsilon}{p_i}$. Тогда $\mathbf{a}_{ij}^* = [A] - \left[\frac{A}{\lambda_i} \right] \lambda_i$. Отсюда

$0 \leq \mathbf{a}_{ij}^* \leq \lambda_i - 1$. Но поскольку по определению $0 \leq \mathbf{a}_{ij} \leq \lambda_i - 1$, то

$0 \leq |e_{ij}| \leq \lambda_i - 1$. Аналогично доказывается пункт 2 утверждения

$0 \leq |e_{ij}| \leq \delta_{ij} - 1$, где оценка δ_{ij} - определена в [3]. Утверждение доказано.

В соответствии с утверждением и предложенной в [2] методики значение дисперсии $\sigma_{e_{ij}}^2$ будет ограничена сверху величинами

$$\begin{cases} \sigma_{e_{ij}}^2 = \frac{(\lambda_i - 1)^2}{3}, & \text{если } N_\eta \in N(1); \\ \sigma_{e_{ij}}^2 = \frac{(\delta_{ij} - 1)^2}{3}, & \text{если } N_\eta \in N(2). \end{cases} \quad (7)$$

Поскольку e_{ij} изменяется в пределах от $-(\lambda_i - 1)$ до $(\lambda_i - 1)$ или от $-(\delta_{ij} - 1)$ до $(\delta_{ij} - 1)$, то возможны случаи, когда, $e_{ij} = 0$. Если $\lambda_i = 1$ (случай когда в массиве вся i -я строка нулевая), то $e_{ij} = 0$, т.е. происходит самокоррекция ошибок.

С учетом (7) получим выражение для определения дисперсии $\sigma_{\mathbf{u}}^2$ погрешности, вызванной ошибками в информационной части кода

$$\begin{cases} \sigma_{\mathbf{k}(1)}^2 = \sum_{\eta=1}^{\bar{n}1} \left\{ 4\sigma_{\text{КВ}}^2 \left(\sum_{i=1}^n (\lambda_{i\eta} - 1)^2 \right) P_{N_0} \right\}, & \text{если } N_\eta \in N(1); \\ \sigma_{\mathbf{k}(2)}^2 = \sum_{\eta=1}^{\bar{n}2} \left\{ 4\sigma_{\text{КВ}}^2 \left(\sum_{i=1}^{n_b} \sum_{j=1}^{n_b} (\delta_{\eta ij} - 1)^2 \right) P_{N_0} \right\}, & \text{если } N_\eta \in N(2). \end{cases}$$

$$\sigma_{\mathbf{u}}^2 = \sigma_{\text{КВ}}^2 + \Phi_{\text{ДКП}}^{-1} \left\{ \sigma_{\mathbf{k}(1)}^2 + \sigma_{\mathbf{k}(2)}^2 \right\} + \sigma_{\text{сж}}^2, \quad (8)$$

где $\overline{n_1}, \overline{n_2}$ - математическое ожидание количества полиадических кодов, вычисляемых соответственно для одного и нескольких столбцов.

Если при сжатии видеоданных компоненты ДКП не сглаживаются, то ошибка e_{ij} равна нулю. Отсюда следует, что дисперсия $\sigma_{сж}^2 = 0$. Тогда формула (8) запишется в виде

$$\sigma_{н}^2 = \sigma_{кв}^2 + \varphi^{-1} \left\{ \sigma_k^2(1) + \sigma_k^2(2) \right\} \quad (9)$$

Подставляя выражения (7) и (9) в (1), получим выражение для определения значения отношения сигнал/шум h на приемной стороне

$$h = \frac{\sigma_x^2}{(1 - P_c) \left(\sigma_{кв}^2 + \left(\varphi^{-1} \left\{ 4\sigma_{кв}^2 \left(\sum_{\eta=1}^{\overline{n_1}} (\lambda_i - 1)^2 + \sum_{\eta=1}^{\overline{n_2}} (\delta_{\eta_{ij-1}})^2 \right) P_{N_0} \right\} / mn \right) \right) + P_c \sigma_x^2}$$

Определим количество корректирующих разрядов, требуемых для обеспечения заданного значения ОСШ. Для этого введем понятие вероятности P_{0k} случайного события в том, что кодовая комбинация будет декодирована ошибочно при использовании корректирующих кодов [2]:

$$P_{0k} = 1 - (1 - P_M)^{1/k},$$

где P_M - вероятность случайного события в том, что кодовая комбинация, состоящей из M бит, будет декодирована правильно;

k - число корректирующих разрядов.

Вероятность P_{0k} находится для информационной ($k = r_i$) и адресной ($k = r_a$) частей кодовой комбинации.

Таким образом, получено выражение для определения значения отношения сигнал/шум (ОСШ) на выходе канала передачи с ошибками. На основе этого выражения можно дать рекомендации по количеству корректирующих разрядов, необходимых для обеспечения заданного значения ОСШ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Королев А.В., Баранник В.В. Метод комплексной обработки изображений // ИУСЖТ. – 1999. – №5. – С.10 - 17.
2. Свириденко В.А. Анализ систем со сжатием данных. – М.: Связь, 1978. – 183 с.
3. Королев А.В., Баранник В.В. Модифицированный метод адаптивного нумерационного кодирования // ИУСЖТ. – 1999. – №4. – С. 19 - 27.

Поступила в редколлегию 20.10.2000