УДК 681.511

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ЭВОЛЮЦИИ МАКРОПАРАМЕТРОВ

к.ф.-м.н. Д.В. Дмитришин, д.т.н. В.М. Вартанян, к.ф.-м.н. Г.М. Вартанян

На основании характера зависимости, связывающей макро- и микропараметры, исследуются системы управления, содержащие линейные звенья с запаздыванием. Формулируются необходимые и достаточные условия устойчивости с учетом неполноты информации об изменениях макропараметров.

Передаточная функция линейного звена с запаздыванием представима в виде

$$\mathbf{W(p)=\frac{R(p)}{Q(p)}e^{-\tau p}},$$

где **R(p)** и **Q(p)** — квазиполиномы от **p**:

$$\mathbf{Q(p)=p^n e^{p\theta}+\sum_{j=1}^{n}p^{k-j}\sum_{k=1}^{m}a_{kj}e^{p\theta\alpha_j}}\ ;\quad \mathbf{R(p)=\sum_{j=1}^{n}p^{k-j}\sum_{k=1}^{m}b_{kj}e^{p\theta\beta_j}}\ ;$$

θ, a_{kj}, b_{kj}, α_j, β_j - некоторые вещественные числа; $\theta > 0$, $0 \le \alpha_1 < \dots < \alpha_n \le 1$, $0 \le \beta_1 < \dots < \beta_n \le 1$, $(k = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$.

Характеристическое уравнение для систем с передаточной функцией **W(p)** имеет вид

$$\mathbf{Q(p)+R(p)e^{-\tau p}=0}\ . \tag{1}$$

Известно [1], что для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части. Левая часть уравнения (1) называется характеристическим квазиполиномом, который, в свою очередь, называется устойчивым, если устойчива система. Основным критерием устойчивости квазиполиномов является теорема Л.С. Понтрягина [2].

Если при $\tau = 0$ система устойчива, то при малых положительных τ система остается устойчивой, что следует из теоремы о непрерывной зависимости корней квазиполинома от параметров [1]. Нетрудно найти критическое запаздывание $\tau_{кр}$, обеспечивающее устойчивость системы при всех $\tau_{кр} < \tau_{кр}$.

Исследуем систему автоматического управления, состоящую из нескольких динамических звеньев. Пусть имеется **N** линейных звеньев, параллельно соединенных между собой, с передаточными функциями

$$W_j(p) = \frac{\gamma_j R(p)}{Q(p)} \cdot e^{-\tau p \sigma_j}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

где $\sum_{j=1}^{N} \gamma_j = 1$. Результирующая передаточная функция такой системы

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} \cdot \sum_{j=1}^{N} \gamma_j e^{-\tau p \sigma_j}.$$

Пусть некоторые макропараметры системы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ связаны между собой линейной зависимостью и их эволюция определяется изменением микропараметров системы $x_1, x_2, \ldots, x_N, y_1, y_2, \ldots, y_N$, которые, в свою очередь, связаны между собой соотношениями вида

$$y_j = \frac{R(p)}{Q(p)} \cdot e^{-\tau p \sigma_j} x_j, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Множители $e^{-\tau p \sigma_j}$ обуславливают запаздывание во времени изменения выходной величины после начала изменения входной. Если предположить, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_N$, а микро - и макропараметры связаны между собой зависимостями

$$X = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j, \; Y = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j y_j,$$

то получаем $\mathbf{Y = W(p)X}$. При исследовании эволюции макропараметра $\mathbf{X}$ с помощью микропараметров, мы можем выбирать различные совокупности идентичных микропараметров. При этом связь между макропараметром $\mathbf{Y}$ и соответствующими микропараметрами $y_1, y_2, \ldots, y_N$ становится существенно более сложной. Даже в простейших случаях необходимо учитывать, что величины γ_j и σ_j зависят от выбранных микропараметров $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

В процессе оценки устойчивости таких систем возникает необходимость исследования устойчивости целых семейств характеристических квазиполиномов

$$H = \left\{ f(p) : f(p) = Q(p) + R(p) \sum_{j=1}^{N} \gamma_j e^{-\tau p \sigma_j}, \gamma_j \geq 0, 0 \leq \sigma_j \leq 1, \sum_{j=1}^{N} \gamma_j = 1 \right\}. \quad (2)$$

Рассмотрим два случая: первый – когда параметры $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$ из $[0, 1]$ заранее известны, и второй – когда эти параметры считаются априори не заданными.

Если число неопределенных параметров невелико, то можно применить метод D – разбиения Ю.И. Неймарка [3]. В случае зависимости квазиполиномов от большого числа неопределенных параметров, необходимо развивать новые подходы в анализе устойчивости. Отметим, что достаточные условия устойчивости некоторых семейств квазиполиномов приведены, например, в [4-7].

Введем в рассмотрение более широкое, чем (2), семейство квазиполиномов

$$\widetilde{H} = \left\{ f(p) \left| \begin{array}{ll} f(p) = Q(p) + R(p)\int\limits_{\alpha}^{1} e^{-\tau p \sigma} dg(\sigma); & \\ \int\limits_{\alpha}^{1} dg(\sigma) = 1, \int\limits_{\alpha}^{1} |dg(\sigma)| = 1; & 0 \le \alpha < 1 \end{array} \right. \right\}, \tag{3}$$

позволяющее применить в дальнейших исследованиях устойчивости методы функционального анализа. Здесь интеграл понимается в смысле Лебега – Стилтьеса.

В дальнейшем будем считать полином $\mathbf{Q(p) + R(p)}$, получающийся при $\boldsymbol{\tau = 0}$, устойчивым.

Теорема 1. Для того, чтобы квазиполиномы семейства $\widetilde{\mathbf{H}}$ были устойчивыми необходимо и достаточно, чтобы были устойчивыми все квазиполиномы двух однопараметрических семейств:

$$H_1 = \left\{ f(p) \left| \, f(p) = Q(p) + R(p) e^{-\tau p \sigma}, \sigma \in [\alpha, 1] \right. \right\};$$

$$H_2 = \left\{ f(p) \left| \, f(p) = Q(p) + R(p)\left(\theta e^{-\tau p \alpha} + (1-\theta) e^{-\tau p}\right), \theta \in [0, 1] \right. \right\}.$$

Док-во. Необходимость очевидна, в силу включения $H_1, H_2 \subset \widetilde{H}$. Докажем достаточность. Пусть в семействе $\widetilde{\mathbf{H}}$ имеется неустойчивый квазиполином

$$f_0(p) = Q(p) + R(p)\int\limits_{\alpha}^{1} e^{-\tau p \sigma} dg_0(\sigma).$$

Рассмотрим семейство функций $G = \{g(\sigma, t), t \in [0, 1]\}$, обладающих свойствами:

$$g(\sigma, 0) = g_0, \quad g(\sigma, 1) = \begin{cases} 0, \alpha \le \sigma < 1; \\ 1, \sigma = 1; \end{cases}$$

$$\int\limits_{\alpha}^{1} dg(\sigma, t) = \int\limits_{\alpha}^{1} |dg(\sigma, t)| = 1, \forall t \in [0,1];$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \quad |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|g(\sigma, t_1) - g(\sigma, t_2)\| < \varepsilon,$$

где норма $\|\cdot\|$ обозначает полную вариацию функции на сегменте $\mathbf{[0, 1]}$.

Пусть $\mathbf{g(\sigma,\ t)} \in \mathbf{G}$. Обозначим через $\mathbf{C(t)}$ точную верхнюю грань вещественных частей корней квазиполинома $\mathbf{Q(p)+R(p)\int\limits_{\alpha}^{1} e^{-\tau\lambda\sigma}dg(\sigma,t)}$. В силу теоремы о непрерывной зависимости корней квазиполиномов от параметров [1] и теоремы Хелли о предельном переходе под знаком интеграла Стилтьеса, функция $\mathbf{C(t)}$ будет непрерывной на $\mathbf{[0,\ 1]}$. Более того, $\mathbf{C(0) \geq 0}$ и $\mathbf{C(1) < 0}$, так как квазиполином

$$\mathbf{Q(p)+R(p)\int\limits_{\alpha}^{1} e^{-\tau p\sigma}dg(\sigma,1)=Q(p)+R(p)e^{-\tau p}}$$

устойчив по условию. Следовательно, найдется $\mathbf{t_1} \in \mathbf{[0,\ 1)}$ такое, что $\mathbf{C(t_1) = 0}$.

Положим $\mathbf{g_1(\sigma) = g(\sigma,\ t_1)}$. Квазиполином $\mathbf{f_1(p)=Q(p)+R(p)\int\limits_{\alpha}^{1} e^{-\tau p\sigma}dg_1(\sigma)}$ имеет чисто мнимые корни, откуда следуют равенства

$$\begin{cases} \xi(\omega_1)=\int\limits_{\alpha}^{1}(1-\cos\omega_1\tau\sigma)dg_1(\sigma)\,; \\ \eta(\omega_1)=\int\limits_{\alpha}^{1}\sin\omega_1\tau\sigma dg_1(\sigma), \end{cases} \tag{4}$$

где $\xi(\omega)=\mathrm{Re}\dfrac{Q(i\omega)+R(i\omega)}{R(i\omega)},\ \eta(\omega)=\mathrm{Im}\dfrac{Q(i\omega)+R(i\omega)}{R(i\omega)}$.

Введем в рассмотрение следующее множество точек координатной плоскости

$$Z(\omega)=\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases} x=\int\limits_{\alpha}^{1}(1-\cos\omega\tau\sigma)dg(\sigma), \\ y=\int\limits_{\alpha}^{1}\sin\omega\tau\sigma dg(\sigma), \end{cases} \int\limits_{0}^{1}dg(\sigma)=\int\limits_{0}^{1}|\,dg(\sigma)\,|=1\right\}. \tag{5}$$

Очевидно, что $\big(\xi(\omega_1),\eta(\omega_1)\big)\in Z(\omega_1)$ и $\big(\xi(\omega),\eta(\omega)\big)\notin Z(\omega)$ при достаточно малых значениях ω. Из теоремы Рисса о представлении замкнутого выпуклого множества [8] следует, что множество $\mathbf{Z(\omega)}$ является замкнутой выпуклой оболочкой кривой

$$z(\omega)=\big\{(x,y)\,\big|\ x=1-\cos\omega\tau t,\ y=\sin\omega\tau t,\ t\in[\alpha,1]\big\}.$$

Нетрудно видеть, что кривая $\mathbf{Z(\omega)}$ является сектором окружности, заданной уравнением $\mathbf{(x-1)^2+y^2=1}$. Учитывая устойчивость квазиполинома $\mathbf{Q(p) + R(p)}$ и непрерывность рассматриваемых функций по ω, можно найти значение ω_2 для которой $\left(\xi(\omega_2),\eta(\omega_2)\right)\in\partial Z(\omega_2)$. Здесь, $\partial\mathbf{Z}$ – граница множества $\mathbf{Z}$, которая состоит из кривой $\mathbf{z}(\omega)$ и отрезка

$$l(\omega)=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x=1-\left(\sigma\cos\omega\tau\alpha+(1-\sigma)\cos\omega\tau\right),\\ y=\sigma\sin\omega\tau\alpha+(1-\sigma)\sin\omega\tau,\end{cases}\ \sigma\in[0,1]\right\}.$$

Кривой $\mathbf{z}(\omega)$ и отрезку $\mathbf{1}(\omega)$ соответствуют семейства квазиполиномов $\mathbf{H_1}$ и $\mathbf{H_2}$. Таким образом, в одном из этих семейств найдется квазиполином с нулями $\pm\, i\omega_2$, что противоречит условию устойчивости квазиполиномов. Полученное противоречие доказывает теорему.

Рассмотрим теперь подмножества $\widetilde{H}(\delta)(0\le\delta<1)$ семейства $\widetilde{H}$, состоящие из функций, вошедших в $\widetilde{H}$, и имеющих в нуле скачок величиной не менее, чем δ. Повторяя рассуждения, приведенные выше, можно без труда доказать справедливость следующего утверждения, уточняющего теорему 1.

Теорема 2. Для того, чтобы квазиполиномы семейства $\widetilde{H}(\delta)$ были устойчивыми необходимо и достаточно, чтобы были устойчивыми все квазиполиномы двух однопараметрических семейств:

$$H_1(\delta)=\left\{f(p)\,\middle|\,f(p)=Q(p)+R(p)\left(\delta+(1-\delta)\,e^{-\tau p\sigma}\right),\quad \sigma\in[\alpha,1]\right\};$$

$$H_2(\delta)=\left\{f(p)\,\middle|\,\begin{matrix}f(p)=Q(p)+R(p)\left(\theta+\delta(1-\theta)\,e^{-\tau p\alpha}+(1-\theta)(1-\delta)\,e^{-\tau p}\right),\\ \theta\in[0,1]\end{matrix}\right\}.$$

Замечание 1. Кривая $\mathbf{z}(\omega)$ в данном случае является сектором окружности, заданной уравнением $(x-(1-\delta))^2+y^2=(1-\delta)^2$.

Замечание 2. Полагая $\delta = 0$ в формулировке теоремы 2, мы получим теорему 1.

Следствие. Если квазиполином $\mathbf{Q(p)+R(p)}$ — устойчив, то найдется δ_0 такое, что все квазиполиномы семейств $\widetilde{H}(\delta)(0\le\delta<\delta_0)$ устойчивы для любого запаздывания τ.

Док-во. Рассмотрим кривую $\Gamma=\left\{(x,y)\,\middle|\,x=\xi(t),\,y=\eta(t),\ t\in(0,+\infty)\right\}$, где функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ определяются равенством (4). Обозначим через $\mathbf{K}(\delta)$ замкнутый круг радиуса $\mathbf{1 - \delta}$ с центром в точке $(1 - \delta, 0)$ т. е.

$$\mathbf{K}(\delta)=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x-(1-\delta))^2+y^2\le(1-\delta)^2\right\}.$$

При $\delta = 0$ множество $K(\delta)$ вырождается в точку $(0, 0)$ и поэтому мы можем определить $\delta_0\,(\delta_0 > 0)$ как наименьшее из всех δ $(0 \le \delta < 1)$ обладающих свойством $\Gamma \cap \partial K(\delta) \ne \varnothing$.

Перейдем к формулировке условий устойчивости для квазиполиномов семейств H. Согласно теореме Каратеодори о выпуклых множествах в конечномерных пространствах [8], аналог множества $Z(\omega)$ для H является замкнутой выпуклой оболочкой множества точек

$$h=\left\{h_i=(x_i,y_i)\,\middle|\,x_i=1-\cos\omega\tau\sigma_i,\ y_i=\sin\omega\tau\sigma_i,\ i=1,\ldots,N\right\}.$$

В данном случае, граница множества $Z(\omega)$ состоит из отрезков соединяющих точки h_i и h_{i+1} при $i=1,\ldots,N$, где $h_{N+1}=h_1$.

Теорема 3. Если величины $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_N$ известны $(0\le\sigma_1<\sigma_2<\ldots,<\sigma_N\le 1)$, то все квазиполиномы семейства H устойчивы тогда и только тогда, когда устойчивы N квазиполиномов

$$f_j(p)=Q(p)+R(p)e^{-\tau p\sigma_j},\ j=1,\ldots,N,$$

и N однопараметрических семейств квазиполиномов

$$K_j=\left\{f(p)\,\middle|\,f(p)=\theta f_j(p)+(1-\theta)f_{j+1}(p),\ \theta\in[0,1]\right\},$$
$$j=1,\ldots,N,\ f_{N+1}(p)=f_1(p).$$

Следствие. Пусть $\sigma_1=0,\gamma_1\ge\delta,0\le\delta<1$. Тогда устойчивость всех квазиполиномов семейства H равносильна устойчивости квазиполиномов

$$f_j(p)=Q(p)+R(p)(1-\delta)e^{-\tau p\sigma_j},\ j=1,\ldots,N$$

и однопараметрических семейств

$$K_j=\left\{f(p)\,\middle|\,f(p)=\theta f_j(p)+(1-\theta)f_{j+1}(p),\ \theta\in[0,1]\right\},\ j=1,\ldots,N,\ f_{N+1}(p)=f_1(p).$$

Рассмотрим случай, когда наряду с параметрами $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_N$ также неизвестными априори являются параметры $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_N$.

Теорема 4. Все квазиполиномы семейства H устойчивы тогда и только тогда, когда устойчивы все квазиполиномы семейств H_1 и H_2.

Если параметры $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_N$ известны, то поставленную задачу можно решить, используя реберную теорему [5], согласно которой проверка устойчивости семейства $\mathbf{H}$ сводилась бы к проверке квазиполиномов $\mathbf{f_j(p)}$ и $\frac{\mathbf{N(N-1)}}{\mathbf{2}}$ однопараметрических семейств

$$\mathbf{K_j = \left\{ f(p) \,\middle|\, f(p) = \theta f_j(p) + (1-\theta)\, f_k(p),\ \theta \in [0,1] \right\},}$$

$$\mathbf{j = 1, \ldots, N,\ k = 1, \ldots, N,\ (j \neq k).}$$

Таким образом, теорема 3 позволяет уменьшить число проверяемых семейств уже при $\mathbf{N > 3}$.

Следовательно, исследование устойчивости семейств квазиполиномов $\mathbf{H}$ или $\mathbf{\tilde{H}}$ сводится к исследованию устойчивости более простых семейств, для которых применимы методики, изложенные, например в [6,7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Белман Р., Кук К. Дифференциально - разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
2. Понтрягин Л.С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // Изв. АН СССР. Сер. Мат. – 1942. – Т. 6. – С. 115 - 134.
3. Неймарк Ю.И. Д - разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости лианеаризованных распределенных систем) // Приклад. механика и математика. – 1949. – Т. 13. – С. 349 - 380.
4. Barmish B.R., Shi Z. A simple test for robust stability of delay system // Ibid. – 1988. – P. 92 - 97.
5. Fu M., Olbrot A.W., Polis M.P. Robust stability for time delay systems: the edge theorem and graphical test // IEEE Trans. – 1989. – AS. 34, № 8 – P. 813 - 820.
6. Жабко А.П., Харитонов В.Л. Методы линейной алгебры в задачах управления. – С-Пб.: Изд. С-Пб. ун-та, 1993.
7. Kharitonov V.L., Zhabko A.P. Robust stability of time delay systems // IEEE Trans. – 1994. – Vol.39. – P. 2388 - 2398.
8. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 552 с.

Поступила в редколлегию 21.08.2000