УДК 512.66

ОСОБЕННОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОВ КАТЕГОРИИ ИЕРАРХИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ

к.т.н. К.А. Метешкин
(Представил д.т.н., проф. А.А. Метешкин)

Исследуются особенности представления объектов категории иерархическими структурами. Предлагается иерархическую структуру представлять теоретико-модельной конструкцией.

Последнее десятилетие уходящего столетия характеризуется бурным развитием информационных технологий, основу которых составляют средства коммуникаций. Все чаще с целью управления организационно-техническими системами, обладающими сложными многоуровневыми структурами, применяются вычислительные сети различного уровня (глобальные, корпоративные, локальные). Для управления такими системами, тенденции развития которых показаны в работе [1], требуется разработка специального математического обеспечения (СМО). Сложность отношений между элементами в многоуровневых иерархических системах не позволяет использовать для формального описания процессов управления традиционно применяемые при этом формальные системы в виде логических исчислений (исчислений высказываний, предикатов различных порядков и др.).

Для разработки СМО, которое обеспечивало бы заданный уровень общности описанию процессов управления, и вместе с тем, удовлетворяло условию совместимости с другим математическим аппаратом, которым пользуются при формальном представлении объектов и процессов на отдельных уровнях иерархии сложной многоуровневой системы воспользуемся методами теории категорий.

Теория категорий является одним из приложений общей топологии [2,3], методы которой позволяют формально представлять процессы управления сложными системами в обобщенном виде.

Основополагающим понятием в теории категорий является понятие - "объект категории", который обозначается (Ob). Примечательным свойством представления категории в виде взаимосвязанной совокупности ее объектов является то, что объекты категории могут быть любой природы. Другими словами, объекты категории могут быть заданы множествами, топологическими пространствами, алгебраическими конструкциями, формальными теориями и др.

При разработке моделей, обеспечивающих управление сложными многоуровневыми системами, необходимо учитывать их структуру. Поэтому при задании объектов категории особый интерес представляют объекты, структура которых определяется следующими соотношениями:

$$\{\{\{\, \mathbf{O_1} \subset \mathbf{O_2} \,\} \subset \mathbf{O_3} \,\} \subset ,\ldots, \subset \mathbf{O_n} \,\} = \mathbf{O}\,; \tag{1}$$

$$\mathbf{O_1} > \mathbf{O_2} > \mathbf{O_3} >, \ldots, > \mathbf{O_n}\,; \tag{2}$$

$$\mathbf{f} \;:\big(\, \mathbf{o_i^j} \in \mathbf{O_j} \,\big) \to \left\{ \mathbf{o_k^\xi} \right\} \in \mathbf{O_\xi}\,, \tag{3}$$

где $\mathbf{i}$ - элемент множества $\mathbf{O_j}$; $\mathbf{n}$ - количество уровней в структуре объекта категории; $\mathbf{k} = \overline{\mathbf{1},\alpha}$ - номер элемента множества $\mathbf{O_\xi}$.

Первое соотношение определяет вложенный характер структуры задаваемого объекта категории. В теории сложности [4] такие конструкции множеств называют "башнями множеств". Во втором соотношении знак ">" обозначает отношение строгого порядка, т.е. между элементами различных уровней иерархии структуры объекта категории существуют отношения строгого порядка. Третье соотношение ставит в соответствие один, $\mathbf{i}$-й элемент вышестоящего уровня $\mathbf{O_j}$, нескольким элементам $\mathbf{k}$ нижестоящего уровня иерархии $\mathbf{O_\xi}$ задаваемого объекта категории.

Графически такой составной объект категории (составной потому, что состоит из нескольких уровней вложений) можно представить в виде некоторой совокупности множеств, связанных конусами морфизмов (рис.1). Понятие конуса морфизмов приведено в работе [2].

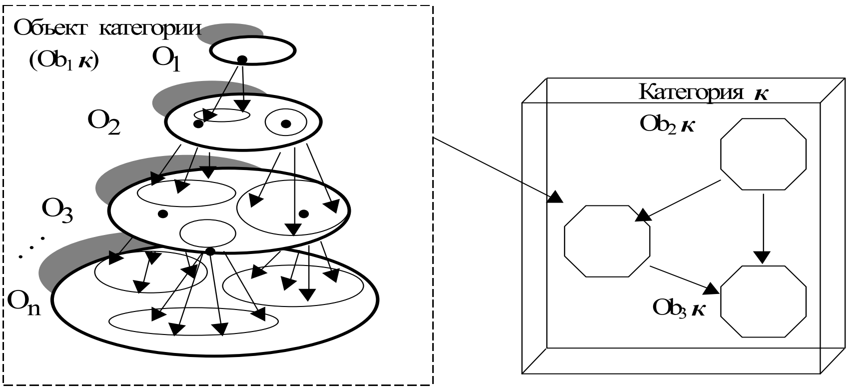

Рис. 1. Иллюстрация объекта категории в виде многоуровневой иерархической структуры

Предположим, что для каждого уровня иерархии исследуемого объекта разработаны формальные теории, описывающие ее предметные области. Формальную теорию в обобщенном виде представим тройкой

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{i}} = \left\langle \Sigma_{O_i}, A_{O_i}, L_{O_i} \right\rangle, \quad \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,n}},$$

где Σ_{O_i} - сигнатура теории, состоящая из кортежа моделей $\left\{ M^1_{O_i}, M^2_{O_i}, \ldots, M^m_{O_i} \right\} \in \Sigma_{O_i}$, формально представляющими элементы предметной области уровня $\mathbf{O_i}$ иерархии объекта категории; A_{O_i} - аксиоматика над сигнатурой Σ_{Oi}, где $\{A1, A2, \ldots, AN\} \in A_{O_i}$, $\mathbf{N}$ - количество аксиом; L_{O_i} - правила логического вывода, позволяющие из аксиом теории выводить теоремы (следствия или заключения).

Заметим, что модели M_{O_i} формально представляются набором базовых множеств и отношениями между ними, что соответствует записи $M^{\hbar}_{O_i} = \left\{ B_v, W_q \right\}$, где $\hbar$ - ординал сигнатуры теории, а $\mathbf{v}$ и $\mathbf{q}$ - индексы соответствующие текущим номерам базового множества элементов модели (**B**) и множества отношений (**W**) между ними, соответственно.

Предположим, что предметные области всех уровней иерархии объекта категории представлены формальными теориями $\boldsymbol{T}_0, \ldots, \boldsymbol{T}_n$ и их сигнатуры содержат модель являющуюся началом конусов морфизмов. Тогда можно записать $\overset{\bullet}{M}_O \in \Sigma_O$, $\overset{\circ}{M}_{O_1} \in \Sigma_{O_1}, \ldots, \overset{\circ}{M}_{O_n} \in \Sigma_{O_n}$, где $\overset{\bullet}{M}_O$ корневая модель, принадлежащая сигнатуре Σ_O формальной теории $\boldsymbol{T}_0$, а $\overset{\circ}{M}_{O_1}, \ldots, \overset{\circ}{M}_{O_n}$ узловые модели соответствующих сигнатур формальных теорий $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_n$, которые также являются вершинами конусов морфизмов, но на смежных уровнях иерархии объекта категории.

Сделанные предположения, а также соотношения (1,2,3) позволяют записать следующую теоретико - модельную конструкцию

$$\boldsymbol{T}_0 \supset \begin{cases} \boldsymbol{T}^1_1 \supset \vdots \begin{cases} \boldsymbol{T}^{1.2}_1 \supset \ldots; \\ \boldsymbol{T}^{1.2}_\beta \supset \ldots; \end{cases} \\ \vdots \\ \boldsymbol{T}^1_\alpha \supset \vdots \begin{cases} \boldsymbol{T}^{\alpha.2}_1 \supset \ldots; \\ \boldsymbol{T}^{\alpha.2}_\chi \supset \ldots, \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

которая будет справедлива лишь в том случае, когда сигнатуры формальных теорий не пересекаются. В этом случае справедливо соотношение

$$\Sigma_{O_0} = \Sigma_{O_1} \bigcup \Sigma_{O_2} \bigcup, \ldots, \bigcup \Sigma_{O_n}. \tag{5}$$

Другими словами, сигнатура формальной теории T_0 будет объединять все подмножества моделей, лежащих у основания конусов морфизмов всех уровней иерархии составного объекта (рис. 1). Аналогичным образом для T_0 формируется аксиоматика, обозначим ее $\mathbf{A}_{\mathbf{O}_0}$.

В математической логике логический вывод на иерархических структурах называется деревом вывода. Доказательство возможности логического вывода на древовидных структурах при условии, что вершины древовидного графа не пересекаются, приведены в работе [5]. Учитывая результаты этих доказательств, будем полагать, что дерево вывода, обозначим его $\mathbf{L}_{\mathbf{O}_0}$, объединяет все теоремы формальных теорий $T_1, \ldots, T_n$. Тогда окончательно можно записать

$$T_0 = \left\langle \Sigma_{\mathbf{O}_0}, \mathbf{A}_{\mathbf{O}_0}, \mathbf{L}_{\mathbf{O}_0} \right\rangle. \tag{6}$$

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, формальные теории должны разрабатываться в рамках единого формализма. Во-вторых, $T_1, \ldots, T_n$ являются подтеориями теории T_0 и для проверки ее непротиворечивости необходимо проверить на непротиворечивость все подтеории. Проверка на непротиворечивость теоретико - модельной конструкции (4) выходит за рамки настоящей работы. Здесь также не приводятся более сложные преобразования, связанные с пересечением сигнатур формальных подтеорий одного уровня иерархии структуры $\mathbf{O}$.

Таким образом, предложен относительно простой вариант представления объекта категории. Предложенный метод представления объекта категории позволяет перейти от иерархической структуры к одной формальной теории T_0, что значительно упрощает построение правил, задающих переход из одной категории в другую, т.е. задание функтора между категориями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Метешкин К.А., Чевардин В.Е. Тенденции развития структур организационных систем военного назначения // Системи обробки інформації. – Харків: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2000. – Вип 1(7). – С. 85 - 89.

2. Александрян Р.А., Мирзахонян Э.А. Общая топология. – М: Высш. школа, 1979. – 336 с.

3. Введение в топологию / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. – М.: Наука, 1995. – 416 с.

4. Солодовников В.В., Тумаркин В.И. Теория сложности и проектирование систем управления. – М.: Наука, 1990. – 168 с.

5. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1971. – 320 с.

Поступила в редколлегию 5.10.2000