УДК 629.7.054

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

к.т.н. С.В. Чёрный, В.А. Жилин
(представил д.т.н., проф. О.Н. Фоменко)

Предлагается аналитический подход к определению оптимальной структуры измерителей высших производных физических величин, обеспечивающей снижение влияния зоны нечувствительности на точность измерений.

Измерителям физических величин с механическими чувствительными элементами (ЧЭ) присуща нелинейность типа зоны нечувствительности, обусловленная моментом сухого трения в опорах ЧЭ. К таким измерителям, в частности, относятся акселерометры и гироскопические измерители угловых параметров движения (ГИУПД) летательных аппаратов (ЛА).

В [1] предлагается новый подход к решению задачи снижения влияния зоны нечувствительности, основанный на эффекте ее внутренней вибрационной линеаризации за счет “оживления” ЧЭ измерителя. Суть такого “оживления” состоит в обеспечении автоколебательного движения ЧЭ относительно среднего уровня измеряемого сигнала. При этом амплитуда автоколебаний ЧЭ больше величины порога чувствительности, что обеспечивает наблюдение измеряемого сигнала даже в пределах конструктивно присущей измерителю зоны нечувствительности. В то же время амплитуда автоколебаний на измерительном выходе существенно ниже порога чувствительности благодаря фильтрации автоколебаний в линейной части специального вида.

Итак, предлагается строить линейную часть в соответствии со структурой датчика производных высокого порядка (ДПВП) (рис.1), поскольку в этом случае помимо обеспечения устойчивых автоколебаний имеется возможность воспроизведения производных измеряемой величины [2].

Перечисленные свойства измерителя наблюдаются, если коэффициенты обратной связи выбирать следующим образом [2]:

© к.т.н. С.В. Чёрный, В.А. Жилин, 2000

$$k_{n-i+1} = C_n^i \omega_0^i; \qquad C_n^i = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}, \tag{1}$$

где ω_0 - собственная частота измерителя; **n** - порядок измерителя (количество интегрирующих звеньев в структуре); C_n^i - полиномиальные коэффициенты бинома Ньютона, при этом $i = n, n-1, n-2, \ldots, 1$.

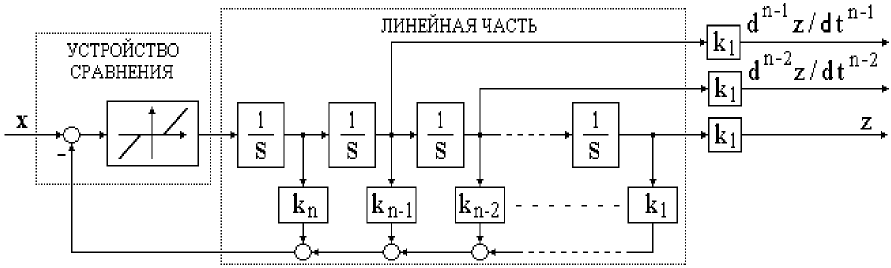

Рис. 1. Структурная схема ДПВП с нелинейным устройством сравнения

Усилительные звенья с коэффициентом усиления k_1, введенные на измерительных выходах (рис.1), предназначены для воспроизведения измеряемых производных в масштабе 1:1.

Основной посылкой, определяющей данный выбор коэффициентов обратной связи, послужило следующее обстоятельство. Когда все корни характеристического уравнения рассматриваемого измерителя отрицательны и действительны, он представляет собой последовательное соединение ***n*** реальных дифференцирующих звеньев [2]:

$$W_x^i(s) = \frac{s^i}{\prod_{j=1}^{n}(s + a_j)}, \qquad i = \overline{0, n}, \tag{2}$$

где a_j — корни характеристического уравнения.

Дифференцирующие свойства каждого из этих звеньев проявляются только в пределах от нуля до его собственной частоты a_j, так как при больших частотах сказывается фазовое запаздывание. Следовательно, для получения **n** производных в заданной полосе частот наименьший (по абсолютной величине) корень характеристического уравнения должен превышать максимальную из частот измеряемого сигнала.

Однако, возможности практической реализации не позволят расширять полосу пропускания за счет сколь угодно большого увеличения коэффициентов обратной связи k_i. Прежде всего это ограничение касается коэффициента k_1, который равен произведению всех корней характеристического уравнения. Минимальное значение k_1 при заданной полосе пропускания достигается в случае, когда все корни характеристического уравнения одинаковы [2]:

$$a_j=\omega_0=\sqrt[n]{k_1}, W_x^i(s)=\frac{s^i}{(s+\omega_0)^n}, \quad i=\overline{0,n} \,. \tag{3}$$

Данное условие обеспечивается выбором k_i в соответствии с соотношением (1). Именно такой выбор обеспечивает минимизацию фазовой (а значит, и амплитудной) ошибки формирования производных при имеющихся технических ограничениях на реализацию коэффициентов усиления в обратной связи измерителя.

Необходимо отметить, что современные акселерометры и ГИУПД ЛА соответствуют рассматриваемой структуре ДПВП при n = 2. Конструкция этих приборов такова, что первые два интегрирующих звена и коэффициенты k_n и k_{n-1} в структуре на рис. 1 описывают соответственно динамику движения ЧЭ и электронный контур обратной связи. Поэтому при построении предлагаемых измерителей на базе существующих серийных прототипов только за счет изменения электронной обратной связи коэффициент k_n остается неизменным (описывает инерционные свойства механического ЧЭ). Остальные же коэффициенты настраиваются по k_n согласно соотношению (1). А значит, теоретически возможно измерение производных в количестве (n -1) [1].

В этой связи естественным представляется вопрос о том, сколько же производных входного сигнала может быть в действительности измерено на фоне воздействия шумов.

Будем полагать, что наибольшим весом среди составляющих погрешности обладает инструментальная погрешность от влияния зоны нечувствительности. Данное предположение справедливо для измерителей параметров движения с механическим ЧЭ, использующихся на маневренных основаниях (например, акселерометры и ГИУПД ЛА). Тогда в результате трансформации погрешности от зоны нечувствительности в погрешность от автоколебательного движения ЧЭ, шумом являются пересчитанные ко входу измерителя, не отфильтрованные линейной частью остаточные автоколебания на выходе последнего интегратора.

Можно выделить два основных фактора, ограничивающих количество производных сигнала, которые возможно измерить. Во - первых, при ограниченном располагаемом коэффициенте усиления k_1 фильтрация автоколебательного шума требует выбора оптимальной структуры измерителя (оптимального порядка n) [1]. Во - вторых, нельзя обеспечить одинаково минимальную погрешность даже на двух, а, тем более, на всех измерительных выходах одновременно.

Рассмотрим последнее обстоятельство подробнее. Пусть измеряемый сигнал и шум (в нашем случае автоколебания) являются соответственно гармоническими функциями вида:

$$\mathbf{x = A_{пс} \sin(\omega_{пс} t)} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{\varepsilon = A_{ш\,вх} \sin(\omega_{ш} t)}, \tag{4}$$

где $\mathbf{A_{пс}}$ и $\boldsymbol{\omega_{пс}}$ - соответственно амплитуда и частота изменения измеряемого (полезного) сигнала;

$\mathbf{A_{ш\,вх}}$ - амплитуда автоколебательного шума на выходе последнего интегратора, приведенная ко входу измерителя;

$\boldsymbol{\omega_{ш}}$ - частота автоколебательного шума.

Данное допущение имеет под собой то основание, что линейная часть измерителя (рис. 1) соответствует гипотезе фильтра низких частот [1].

В этом случае спектральная плотность мощности ошибки выходного сигнала ДПВП по **i**-той производной может быть описана соотношением

$$\mathbf{S_i(\omega) = \omega_{пс}^{2i}\left[1 - \frac{\omega_0^n \cdot 2\cos\left(n \cdot arctg\,\frac{\omega_{пс}}{\omega_0}\right)}{\left(\omega_{пс}^2 + \omega_0^2\right)^{n/2}} + \frac{\omega_0^{2n}}{\left(\omega_{пс}^2 + \omega_0^2\right)^{n}}\right] S_{пс}(\omega) +} \tag{5}$$

$$\mathbf{+ \frac{\omega_0^{2n}\,\omega_{ш}^{2i}}{\left(\omega_{ш}^2 + \omega_0^2\right)^{n}} S_{ш}(\omega)},$$

где $\mathbf{S_i(\omega)}$ - спектральная плотность мощности (СПМ) ошибки по **i** - й производной, **i** = 0,…, **n**-1;

$\mathbf{S_{пс}(\omega)}$ - СПМ полезного (измеряемого) сигнала;

$\mathbf{S_{ш}(\omega)}$ - СПМ шума на выходе последнего интегратора;

$\boldsymbol{\omega_0}$ - собственная частота; **n** - порядок ДПВП.

Поскольку мощность сигнала пропорциональна квадрату его амплитуды, а СПМ есть мощность, отнесенная к частоте процесса, то дисперсия ошибки **i** - й производной выходного сигнала (или СПМ в точке, соответствующей одной гармонике, т.е. как бы в точке мгновенного приращения $\boldsymbol{\delta\omega}$) будет определяться соотношением

$$D_{ош}^{i}=\omega_{nc}^{2i}\left[1-\frac{2\omega_0^n\cdot\cos\left(n\cdot\mathrm{arctg}\frac{\omega_{nc}}{\omega_0}\right)}{\left(\omega_{nc}^2+\omega_0^2\right)^{n/2}}+\frac{\omega_0^{2n}}{\left(\omega_{nc}^2+\omega_0^2\right)^n}\right]\cdot\frac{A_{nc}^2}{\delta\omega}+ \tag{6}$$

$$+\frac{\omega_0^{2n}\ \omega_ш^{2i}\ A_{ш\,вх}^2}{(\omega_ш^2+\omega_0^2)^n\ \delta\omega}\ .$$

Передаточная функция от входа измерителя к выходу последнего интегратора по ошибке (для сигнала, гипотетически содержащего только первую гармонику) имеет вид

$$W_{D_{вх}}^{D_{вых}}(s)=\frac{\omega_0^{2n}}{\left(\omega_ш^2+\omega_0^2\right)^n}\ . \tag{7}$$

При этом

$$D_{вх}\cong\frac{A_{ш\,вх}^2}{2};\ D_{вых}\cong\frac{A_ш^2}{2}\ ,$$

где $A_ш$ - амплитуда автоколебаний на выходе последнего интегратора), поскольку при определении дисперсии гармонической функции **f(x)**, взятой за целое количество периодов можно принять

$$f^2(x)=A^2\sin^2(\omega t)=\frac{A^2(1-\cos 2\omega t)}{2}=\frac{A^2}{2}\ . \tag{8}$$

На основании соотношения (7)

$$\frac{A_{ш\,вх}^2}{2}\ \cong\ \frac{\left(\omega_щ^2+\omega_0^2\right)^n}{\omega_0^{2n}}\cdot\frac{A_щ^2}{2}\ . \tag{9}$$

Дисперсия **i** - й производной определяется соотношением

$$D_{np}^{i}=\omega_{nc}^{2i}\cdot\frac{A_{nc}^2}{\delta\omega}\ . \tag{10}$$

Тогда на основании (6), (9), (10) относительная погрешность воспроизведения **i** - й производной, содержащая информацию об отношении сигнал/шум имеет вид

$$D^{i}_{\text{отн}} = \left[1 - \frac{2 \quad \omega_0^{n} \cdot \cos\left(n \cdot \operatorname{arctg}\frac{\omega_{\text{пс}}}{\omega_0}\right)}{\left(\omega_{\text{пс}}^{2} + \omega_0^{2}\right)^{n/2}} + \frac{\omega_0^{2n}}{\left(\omega_{\text{пс}}^{2} + \omega_0^{2}\right)^{n}}\right] + \frac{\omega_0^{2n}\,\omega_i^{2i}\,A^{2}_{\text{ш вх}}}{\omega_{\text{пс}}^{2\ \ i}\left(\omega_{\text{ш}}^{2} + \omega_0^{2}\right)^{n} \cdot A^{2}_{\text{пс}}} = \tag{11}$$

$$= \left[\ 1 \ - \ \frac{2\omega_0^{n}\ \cos\left(n \cdot \operatorname{arctg}\frac{\omega_{\text{пс}}}{\omega_0}\right)}{\left(\omega_{\text{пс}}^{2} + \omega_0^{2}\right)^{n/2}} \ + \ \frac{\omega_0^{2\ \ \ n}}{\left(\omega_{\text{пс}}^{2} + \omega_0^{2}\right)^{n}}\right] + \ \frac{\omega_{\text{ш}}^{2i}\,A_{\text{ш}}^{2}}{\omega_{\text{пс}}^{2\ \ i}\,A_{\text{пс}}^{2}} \ .$$

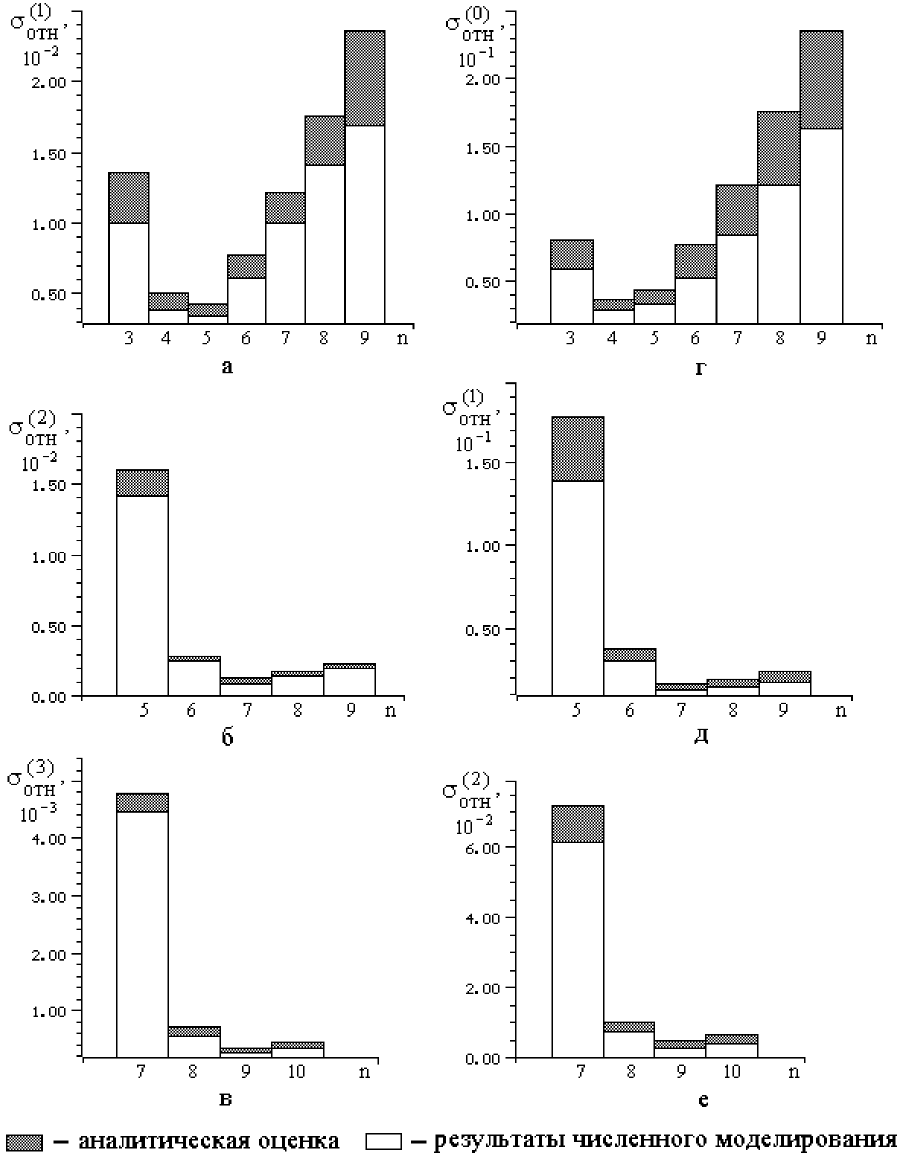

Рис. 2. Относительное среднее квадратическое отклонение погрешности воспроизведения производных для $\mathbf{A_{nc} = 1}$, $\boldsymbol{\omega_{nc}} = \mathbf{0{,}0175}$ **Гц**, $\boldsymbol{\omega_0} = \mathbf{100}$ **Гц**, $\boldsymbol{\Delta_0 = 6 \cdot 10^{-4}}$ (а – в) и $\boldsymbol{\Delta_0 = 9{,}5 \cdot 10^{-2}}$ (г – е).

Величины $\mathbf{A_{ш}}$ и $\boldsymbol{\omega_{ш}}$ можно определить по известным для ДПВП зависимостям [1]. На рис. 2 приведены результаты оценки точности измерения производных входного сигнала (4), полученные в соответствии с соотношением (11), а также по методике синтеза [1].

Из полученных результатов следует, что оптимизировать измеритель по критерию минимума погрешности можно либо относительно самой измеряемой величины (рис. 2, г), либо относительно какой-либо одной ее производной. Чем выше порядок производной, которую требуется получить с минимальной погрешностью, тем более высоким должен быть порядок измерителя, что для высоких частот измеряемой величины чревато снижением точности из-за нарастания динамической составляющей погрешности [1]. В последнем случае следует располагать значительным запасом по максимальному коэффициенту усиления $\mathbf{k_1}$.

Совпадение результатов оптимизации ДПВП, полученных аналитически при учете одной гармоники, с результатами применения методики [1], использующей численное моделирование, позволяет считать предложенный здесь подход вариантом аналитического определения оптимальной структуры измерителей высших производных физических величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный С.В., Жилин В.А. Методика синтеза измерителей высших производных с нелинейным устройством сравнения // Системи обробки інформації. – Харків: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 1999. – Вип. 2(6). – С. 119 - 129.

2. Чёрный С.В. Основы теории датчиков производных высокого порядка // Научно - методические материалы по алгоритмическому обеспечению пилотажно - навигационных комплексов. – Харьков: ХВВАИУ. – 1990. – С. 3 - 29.

Поступила в редколлегию 11.10.2000