УДК 629.7.017.1: 519.2

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

к.т.н. В.Ю. Дубницкий, В.В. Дегтяренко
(представил д.т.н., проф. В.С. Харченко)

Определены погрешности формул, аппроксимирующих функций нормального распределения, даны рекомендации по области их применения. Выбор рекомендуемых границ областей проведён по критерию минимума среднего значения модуля относительной погрешности аппроксимации.

При моделировании изменения состояния сложных технических систем под влиянием экстремальных воздействий применяют вероятностные модели, основанные на биномиальном законе распределения [1].

В свою очередь, для статистических выводов, основанных на анализе результатов моделирования с использованием этого закона, пользуются интегральной теоремой Муавра – Лапласа. Её применение требует знания численных значений функции нормального распределения (ФНР). Таким образом, алгоритмы, вычисляющие значения ФНР, являются неотъемлемой частью моделирующих комплексов, используемых при изучении влияния экстремальных воздействий на состояние сложных технических систем.

Целью настоящей работы является использование различных способов аппроксимации ФНР и выбор областей их применения.

Из литературы известны способы аппроксимации ФНР в виде бесконечных степенных рядов [2], бесконечных цепных дробей [3], полиномов специального вида [4] и эмпирических формул [5, 6]. В указанных работах также даны оценки погрешности аппроксимации при применении этих способов.

В данном сообщении приведены результаты численного эксперимента по проверке качества аппроксимирующих выражений, приведенных в работах [4, 5, 6]. Качество аппроксимации оценивали по выражению

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\left| \mathbf{u} - \mathbf{u}^* \right|}{\mathbf{u}}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ - относительная ошибка аппроксимации; $\mathbf{u}$ – численное значение ФНР, приведённое в [7]; $\mathbf{u}^*$ - значение ФНР, полученное по одной из аппроксимирующих формул.

Относительную ошибку аппроксимации (1) определяли для следующих формул.

$$P_1(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \sum_{i=1}^{3} a_i t^i, \tag{2}$$

где a_1=0,4361836; a_2= -0,1201676; a_3=0,9372980; $t = \dfrac{1}{1+px}$; p=0,33267.

$$P_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \sum_{i=1}^{5} b_i t^i, \tag{3}$$

где b_1 = 0,319381530; b_2 = -0,356563782; b_3 = 1,781477937;

b_4 = -1,821255978; b_5 = 1,330274429; $t = \dfrac{1}{1+px}$; p = 0,2316419.

$$P_3(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{4} c_i x^i\right)^{-4}, \tag{4}$$

где c_0 = 1; c_1 = 0,196854; c_2 = 0,115194; c_3 = 0,000344; c_4 = 0,019527.

$$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{6} \alpha_i x t^i\right)^{-16}, \tag{5}$$

где α_0 =1; α_1 = 0,498673470; α_2 = 0,0211410061; α_3 = 0,0032776263;
α_4 = 0,0000380036; α_5 = 0,0000488906; α_6 = 0,0000053830.

Выражения (2) - (5) приведены в работе [4]. В работе [5] приведены аппроксимационные формулы вида

$$P_5(x) = 1 - 0.65\left(\exp\left(-0{,}443\,(0{,}75 + x)^2\right)\right) \tag{6}$$

и

$$P_6(x) = \left(1 + \exp(-1{,}703x)\right)^{-1}. \tag{7}$$

В работе [6] приведена формула вида

$$P_7(x) = \begin{cases} 1 - 0.650\left(-0.470(0.750 - x)^2\right), & x \ge 0; \\ 0.650\left(-0.470(0.750 - x)^2\right), & x < 0. \end{cases} \tag{8}$$

В выражениях (2) - (8) принято, что $P_j(x),\ j = \overline{1,7}$, приближенное значение нормированной ФНР вида

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

В процессе эксперимента принимали, что аргумент $\mathbf{x} \in [\mathbf{-4; 4}]$ для всех $\mathbf{P_j(x)}$, $\mathbf{j = \overline{1,7}}$. Результаты расчетов относительной ошибки $\boldsymbol{\varepsilon}$, выполненные по формуле (1), показаны на графиках, помещенных на рис. 1 - 4.

Следует отметить, что при $\mathbf{x < 0}$ все исследованные формулы дают большие величины относительной погрешности $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0{,}3}$. Поэтому их рекомендовано применять при значении аргумента $\mathbf{x \geq 0}$, а при $\mathbf{x < 0}$, используя приведенное в [7] тождество

$$\mathbf{F(x) + F(-x) \equiv 1},$$

вычислять величину

$$\mathbf{F(x) \approx 1 - P_j(x), \;\; j = \overline{1,7}}.$$

Таким образом, аппроксимация ФНР может быть выполнена правилу

$$\mathbf{F(x) \approx \begin{cases} P_j(x), & x \geq 0; \\ 1 - P_j(x), & x < 0 \end{cases}} \tag{9}$$

при $\mathbf{j = \overline{1,7}}$.

Величины относительной ошибки ε для соответствующих областей изменения аргумента ФНР показаны на рис. 1 - 4.

Из рис. 1 видно, что аппроксимация вида $\mathbf{P_3(x)}$ имеет наихудшее качество, определенное по условию (1). Поэтому из дальнейшего анализа ее исключили.

Весь диапазон изменения аргумента x был представлен в виде

$$\mathbf{x = x_0 + rh}, \tag{10}$$

где $\mathbf{x_0 = 0}$; $\mathbf{h = 0{,}5}$; $\mathbf{r = \overline{0;8}}$.

Исходя из особенностей решаемой задачи, отрезок изменения переменной $\mathbf{x}$: $\mathbf{0 \leq x \leq 4}$ был разделен на три не пересекающихся промежутка:

$\mathbf{Y_1 = [0;1]}$, $\mathbf{Y_2 = (1;3]}$, $\mathbf{Y_3 = (3;4]}$.

Наилучшей для аппроксимации в $\mathbf{m}$ - м интервале; $\mathbf{m = 1,2,3}$ считали такую формулу из (2) – (8), для которой величина среднего модуля погрешности аппроксимации

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{\frac{1}{K_m} \sum_{\mathit{l}=1}^{K_m} \varepsilon_{\mathit{l}}}, \;\; \mathbf{\mathit{l} = \overline{1, K_m}}, \;\; \mathbf{m = 1,2,3} \tag{11}$$

наименьшая.

Результаты расчета величины $\boldsymbol{\delta}$ и рекомендации по области применения формул аппроксимирующих ФНР приведены в таблице.

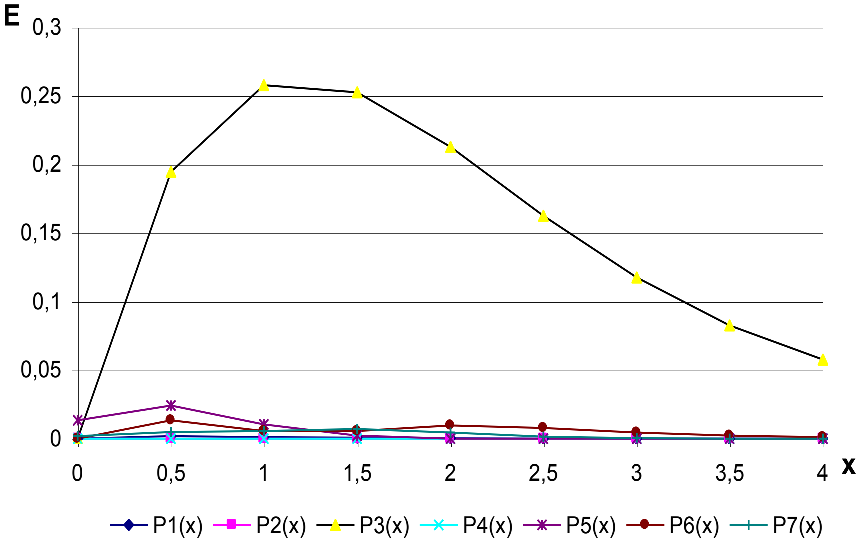

Рис. 1. Изменение относительной погрешности аппроксимации функции нормального распределения при $0 \le x \le 4$

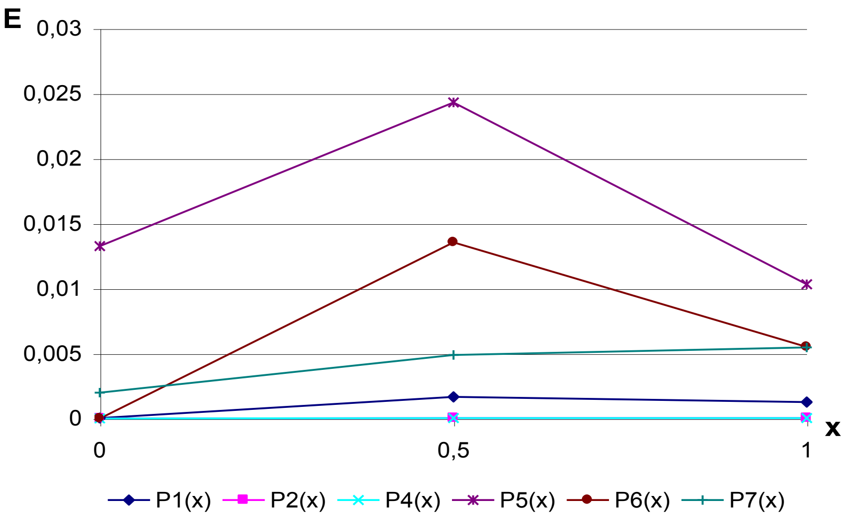

Рис.2. Изменение относительной погрешности аппроксимации функции нормального распределения при $0 \le x \le 1$

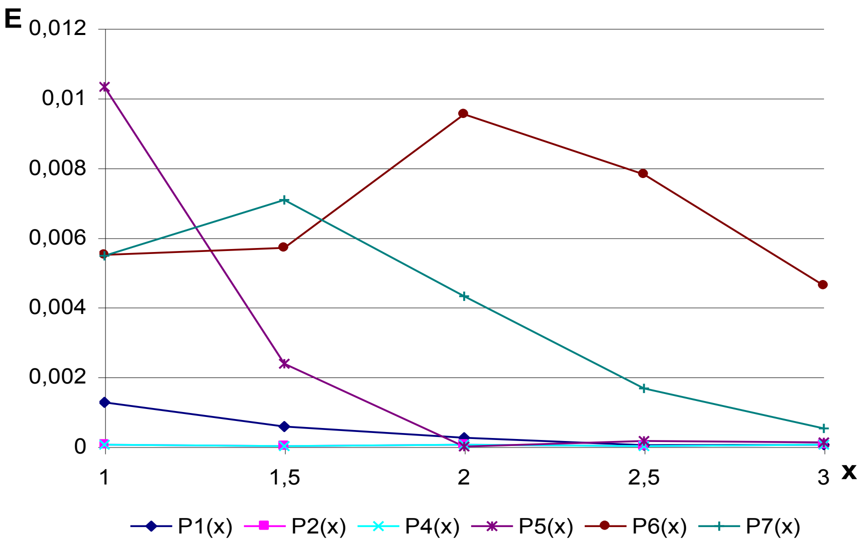

Рис. 3. Изменение относительной погрешности аппроксимации функции нормального распределения при $1 < x \leq 3$

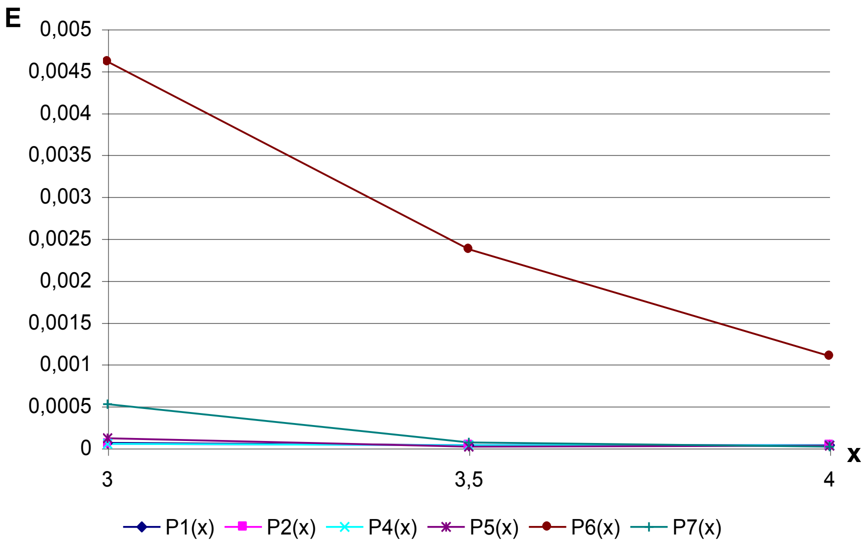

Рис. 4. Изменение относительной погрешности аппроксимации функции нормального распределения при $3 < x \leq 4$

Таблица

Рекомендуемые области применения формул аппроксимирующих функций нормального распределения

Область изменения аргумента **x**	Рекомендуемое выражение	Модуль относительной погрешности, δ
$0 \le x \le 1$	$P_2(x)$	$0{,}35 \cdot 10^{-6}$
$1 < x \le 3$	$P_4(x)$	$0{,}39 \cdot 10^{-6}$
$3 < x \le 4$	$P_5(x)$	$0{,}15 \cdot 10^{-6}$

Выводы:

1. Предлагаемые способы аппроксимации могут быть использованы при оценке результатов моделирования величины или кратности экстремальных воздействий.

2. Если вероятность **P** моделируемого события $\mathbf{0 \le P \le 0{,}8413}$ и $\mathbf{0{,}1587 < P < 0{,}5}$, то рекомендуется аппроксимация вида $\mathbf{P_2(x)}$.

Если $\mathbf{0{,}8413 < P \le 0{,}9986}$ и $\mathbf{0{,}0014 < P \le 0{,}1587}$, то вероятность моделируемого события крайне мала и рекомендуется аппроксимация вида $\mathbf{P_4(x)}$. Если $\mathbf{0{,}9986 < P \le 0{,}9999}$ и $\mathbf{0{,}0001 < P \le 0{,}0014}$, то рекомендуется аппроксимация вида $\mathbf{P_5(x)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харченко В.С., Тимонькін Г.М., Сичов В.О., Лисенко І.В. Теорія надійності та живучості елементів і систем літальних комплексів. – Харків.: ХВУ, 1997. – 395 с.

2. Митропольский А.К. Интеграл вероятностей. – Л.: Изд. ЛГУ, 1972. – 86 с.

3. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. – К.: Наукова думка, 1984. – 595 с.

4. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

5. Крапивин В. Ф. О теории живучести сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 246 с.

6. Тамм Ю. А., Гомозова Т.А. К аппроксимации интеграла вероятностей // Электросвязь. – 1970. – № 9. – С. 77 - 78.

7. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. – 411 с.

Поступила в редколлегию 19.10.2000